Le premier conférencier de la matinée est Alain Connes qui arrive tout droit de Boston pour nous parler de ***Quelques avatars de l'isomorphisme de Thom***

Mon but aujourd'hui est d'essayer d'expliquer un théorème, qui est une résolution partielle de la conjecture de Novikov pour une classe de groupes qui est une classe très large, qui est la classe des groupes hyperboliques. Ce que je voudrais faire, c'est énoncer le théorème, expliquer en quel sens la démonstration du théorème est basée sur la géométrie différentielle non-commutative, et ensuite essayer d'expliquer, assez brièvement, comment l'isomorphisme de Thom a joué un rôle essentiel dans l'élaboration de ce résultat.

Mais en fait, je vais commencer par parler du problème d'invariance à homotopie près des classes de Pontryagin et en fait, je vais commencer par parler de travaux de Thom, puisqu'il est clair qu'au départ, la théorie du cobordisme de René Thom implique pratiquement qu'il existe une formule pour la signature d'une variété, orientée de dimension $4n$, uniquement en fonction d'un polynôme qui invente les classes de Pontryagin. La raison pour cela, ce sont les propriétés élémentaires de la signature et le fait que, on connaît, justement grâce à la théorie du cobordisme de René Thom, on connaît exactement les classes de cobordisme de variétés et d'autre part, le problème de la signature est un problème rationnel, c'est-à-dire que la torsion s'élimine.

Donc en fait, on a un théorème, qui est le théorème de signature de Hirzebruch, et qui s'énonce sous la forme suivante : il existe donc un polynôme universel pour chaque n (ce sont toujours des polynômes homogènes dans les classes de Pontryagin) $L_1 = \frac{1}{3}p_1, L_2 = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)$ et le polynôme général est déterminé par la règle suivante qui est que, si on considère la somme de $1 + L_1 + L_2 + \ldots$, cette somme-là est une fonction mulitplicative de $1 + p_1 + p_2 + \ldots$ et d'autre part, le coefficient des puissances de p_1 qui apparaît ici est le même que celui qui apparaît dans la fonction $\dfrac{\sqrt{t}}{\tanh\sqrt{t}}$, ce qu'on vérifie en regardant les espaces projectifs.

Le théorème de Hirzebruch dit la chose suivante : la signature d'une variété M est

Transcription de la vidéo d'Alain Connes sur Carmin visionnable ici :
https://www.carmin.tv/fr/video/quelques-avatars-de-lisomorphisme-de-thom
(Denise Vella-Chemla, septembre 2022).
Se reporter également au cours au Collège de France d'Alain Connes de l'année 88-89 dans cette page
https://www.college-de-france.fr/chaire/alain-connes-analyse-et-geometrie-chaire-statutaire
et à l'article trouvable dans la page de Publications du site officiel d'Alain Connes ici
https://alainconnes.org/wp-content/uploads/novikov-1.pdf
ou à l'article de référence *Conjecture de Novikov et groupes hyperboliques* de A. Connes et H. Moscovici, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., vol. 307, no. 9, pp. 475-480, 1988, ISSN: 0249-6291.

donnée par l'évaluation du polynôme L, qui a le bon degré, sur la classe fondamentale de M :

$$\mathrm{Sign}(M) = \langle L(M), [M] \rangle$$

D'autre part, il y a une remarque, qui est due à Cahn, et qui dit qu'il n'y a pas d'autre combinaison des classes de Pontryagin qui donne un invariant rationnel pour la variété, c'est-à-dire que les classes de Pontryagin, d'après un théorème de Novikov, sont des invariants d'homéomorphismes. Mais par contre si on cherche des combinaisons d'autres polynômes en fonction des classes de Pontryagin qui sont invariants d'homotopie, ces polynômes-là sont les seuls.

Alors si on considère maintenant des variétés qui ne sont pas simplement connexes, donc si on part d'une variété M, en général bien sûr, $\pi_1(M)$ n'est pas trivial, on peut former des combinaisons de classes de Pontryagin mais on peut aussi invoquer une classe de cohomologie ω qui appartient à la cohomologie du groupe Γ ; ici, je note ça $H^*(B\Gamma, \mathbb{C})$ mais bien sûr, c'est la cohomologie de groupe, il s'agit de cocycles de groupes si vous voulez. Et à ce moment-là, on peut, chaque fois qu'on prend une variété qui a pour groupe fondamental Γ, on a automatiquement une application classifiante ψ qui va de M dans $B\Gamma$ et on peut former l'expression suivante, qui est une forme plus élaborée de la signature, que je noterai comme ça :

$$\mathrm{Sign}_\omega(M) = \langle L(M)\psi^*(\omega), [M] \rangle$$

en appelant ω un élément de la cohomologie de $B\Gamma$. Cette signature sera l'évaluation sur la classe fondamentale de M du produit *(montrant $L(M)$)* ici, je ne prends pas un seul polynôme L, mais je prends la somme non homogène des polynômes L pour les divers degrés, et je multiplie ça par l'image inverse de ω par l'application classifiante ($\psi^*(\omega)$) et ensuite on évalue sur la classe fondamentale de M *(c'est le $[M]$)*.

Alors Novikov a conjecturé que ces nombres-là (*encadrant la formule ci-dessus*) qui sont des nombres réels associés à une variété orientée M, pas forcément de dimension $4n$ (parce que la variété de dimension $2n$ donne des résultats intéressants), que ces nombres-là étaient des invariants d'homotopie.

Alors, ce que je veux énoncer et expliquer aujourd'hui, c'est le théorème suivant :

Théorème : (H. Moscovici et A. Connes)
$\mathrm{Sign}(M)$ *est un invariant d'homotopie dès que (le groupe fondamental)* Γ *est un groupe hyperbolique.*

Alors les groupes hyperboliques sont une classe remarquable de groupes discrets de présentation finie, dont un très grand nombre de propriétés ont été démontrées par

Mikhaïl Gromov. Et une propriété très importante de ces groupes, si vous voulez, c'est vraiment une classe de groupes qui va bien au-delà des classes de groupes pour lesquels la conjecture de Novikov avait été démontrée, parce que ce sont des groupes pour lesquels l'hyperbolicité est une définition combinatoire. Alors je vais en donner une définition, il y a un tas de définitions équivalentes, mais il y a une définition qui est la suivante. Ce sont des groupes de présentation finie, donc ce sont des groupes fondamentaux de variétés. On peut toujours choisir une variété V, de dimension 4 si on veut, telle que son groupe fondamental soit égal à Γ : $\pi_1(V) = \Gamma$. Et à ce moment-là, quelle que soit la réalisation de V qu'on choisit, l'hyperbolicité se lit sur V, V est compacte, on peut la doter d'une structure riemanienne, et l'hyperbolicité se lit de la manière suivante : elle se lit en disant que *(s'interrompant)*. Donc on considère et on choisit sur V un chemin dans V (une application de S_1 dans V), aussi différentiable qu'on veut, mais qui est telle qu'elle définisse un élément trivial dans π_1. À ce moment-là, ce qu'on demande, c'est que (évidemment, elle borde un disque), mais ce qu'on demande c'est qu'il y ait une inégalité isopérimétrique, c'est-à-dire qu'elle borde un disque D dont la surface soit majorée par une constante que multiplie la longueur du chemin γ.

$$\mathrm{Surf}(D) \leqq C\ \mathrm{long}(\gamma).$$

C'est bien sûr une propriété qui est indépendante du choix du chemin, c'est une propriété pour les chemins très longs ; pour les petits chemins, c'est évident. C'est une propriété qui se lit sur la métrique des mots, et disons que la seule propriété que je voudrais retenir de ces groupes-là, c'est qu'ils sont génériques, au sens où si on donne n générateurs et m relations, et si on donne une borne l sur la longueur des relations, si on compte la proportion des groupes hyperboliques, elle tend vers 1.

Donc en fait, si on choisit au hasard générateurs et relations, on tombera sur un groupe hyperbolique. Ce que je veux absolument expliquer en détail, c'est peut-être moins les détails de la démonstration du théorème, que la raison pour laquelle ce théorème invoque la géométrie non-commutative[1]. En fait, c'est presque évident au départ : la raison est qu'on s'intéresse à la signature. Lorsqu'on regarde la signature ordinaire, c'est une forme quadratique et si on travaille modulo la torsion ce qui est le cas ici, ça n'est pas très difficile de regarder ce que c'est qu'une forme quadratique, une forme quadratique réelle bien sûr. Maintenant le problème, c'est qu'on doit travailler avec une information plus grande. C'est-à-dire que la seule signature ordinaire donnera seulement la combinaison avec ω la classe triviale. Donc on doit pouvoir introduire des classes arbitraires. Et donc, on doit pouvoir utiliser d'une certaine manière le fait que la situation est équivariante par rapport au groupe Γ. Bien sûr, elle n'est pas équivariante par rapport au groupe Γ sur la variété M. Mais elle devient équivariante sur le groupe Γ lorsqu'on regarde le revêtement de M qui

[1]Sourit à cette idée.

est groupe fondamental Γ *(écrit au tableau* $\begin{array}{c}\widetilde{M}\\ \downarrow \pi\\ M\end{array}$*)*. Et à ce moment-là, ce qu'on doit faire, c'est travailler non plus sur M mais sur $\widetilde{M}$ en gardant en tête qu'on a toujours le groupe Γ qui agit.

Alors la première chose qu'on va faire, c'est essayer de définir une signature équivariante d'une certaine manière, non pas de M mais de $\widetilde{M}$, et on va se demander où va habiter cette signature-là. Alors on va voir qu'il va y avoir deux définitions de cette signature. Ces deux définitions vont faire intervenir, comme on y est familier en topologie, un changement de l'anneau de base, c'est-à-dire qu'au lieu de prendre les nombres complexes et de travailler avec les nombres complexes, on va toujours travailler avec l'anneau qui est l'anneau du groupe *(écrit* $\mathscr{A} = \mathbb{C}\Gamma$*)*. Comme on ignore la torsion, en fait, on va travailler avec l'anneau du groupe à coefficients complexes. Et on va voir très vite pourquoi le fait qu'on s'intéresse à des formes quadratiques sur cet anneau de base impose pratiquement, très vite, d'étudier les C^*-algèbres, et de s'occuper d'une C^*-algèbre, et pourquoi ça va donner l'outil de base.

Alors maintenant, ce qui se passe, c'est qu'il y a deux définitions, il y a deux manières d'envisager la signature équivariante.

Je vais d'abord décrire la première.

La première provient de la théorie de la chirurgie équivariante : on considère une triangulation de M, on remonte cette triangulation à $\widetilde{M}$, et on obtient à ce moment-là un complexe de modules $\varepsilon_0 \stackrel{d}{\to} \varepsilon_1 \stackrel{d}{\to} \varepsilon_2 \ldots$ (avec une différentielle d) jusqu'à la dimension de M, et tous ces modules, au lieu d'être des espaces vectoriels de dimension finie deviennent des modules sur l'algèbre $\mathscr{A}$, et deviennent des modules libres, ou au moins des modules projectifs de type fini. On fait une espèce de chirurgie algébrique sur ce complexe-là et on arrive, sans changer l'invariant de signature, à remplacer ce complexe-là par un complexe court, par un seul élément H, (j'oublie de dire qu'on est obligé bien sûr de garder l'information qui est donnée par le fait que M est une variété, c'est-à-dire qu'on a un cycle fondamental, ce qui permet de parler d'une dualité de Poincaré. Alors cette dualité de Poincaré, quand on assemble le complexe d'une bonne manière, donne H un élément de l'ensemble des matrices suffisamment grandes $M_q(\mathscr{A})$ avec $\mathscr{A} = \mathbb{C}\Gamma$, un peu comme un élément d'un groupe de Witt. C'est-à-dire que cet élément est auto-adjoint d'une part ($H = H^*$), c'est ce qui définit la forme quadratique, et d'autre part, il n'est pas du tout uniquement déterminé, modulo les matrices auto-adjointes triviales, donc modulo certaines opérations élémentaires, mais surtout modulo les matrices auto-adjointes de la forme $\begin{bmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{bmatrix}$. On a une addition naturelle dans le groupe etc. La première chose que l'on obtient comme un invariant, par cette théorie-là, c'est une forme quadratique, qui est donnée, à équivalence près des formes quadratiques.

La deuxième forme de la signature, c'est une forme beaucoup plus opératorielle, c'est une forme qui remplace le fait qu'on prend une triangulation de la variété et donc qu'on utilise sa finitude par des opérateurs elliptiques, ce qui est équivalent, mais ce qui est un petit peu plus facile à manier d'une certaine manière. Donc la deuxième forme consiste à considérer l'espace $\widetilde{M}$ et sur cet espace, l'opérateur $\widetilde{D}$ qui est l'opérateur de signature. Alors si on regarde cet opérateur de signature, c'est un opérateur qui est elliptique sur $\widetilde{M}$, et à un tel opérateur... Bon, il y avait, par exemple, le théorème d'Atiyah-Singer pour les revêtements, mais ce qu'on veut faire ici, c'est qu'on veut vraiment avoir un élément de K-théorie de l'algèbre $\mathscr{A}$, si on a un élément du groupe de Witt. Donc en fait, on est obligé de faire la chose suivante : on va construire un élément e, qui va jouer le rôle de la signature, de K_0, de K-théorie, $[e] \in K_0(\mathscr{A} \otimes R)$, non pas de $\mathscr{A}$[2]... (c'est assez facile de voir que l'anneau $\mathscr{A}$ va avoir une K-théorie triviale) mais de $\mathscr{A} \otimes R$, et ce produit tensorisé par un anneau R qui est universel, joue presque le rôle de l'équivalence de Morita. Bien sûr, on n'aura pas équivalence de Morita car si c'était le cas, on aurait $K_0(\mathscr{A} \otimes R) = K_0(\mathscr{A})$. Cet anneau R, c'est l'anneau des matrices infinies $[a_{ij}]$ telles que les a_{ij} décroissent plus vite que tout inverse d'un polynôme, lorsque i et j tendent vers l'infini. En fait, il y a une autre manière de l'écrire, R est l'algèbre des noyaux régularisants sur la variété M, $R = [a_{ij}] = C^\infty(M \times M)$. Et cette seconde écriture $R = C^\infty(M \times M)$ est indépendante du choix de M. Si on prend des valeurs propres du Laplacien, on s'aperçoit que cette algèbre-là des noyaux régularisants est indépendante du choix de la variété, et est égale à l'anneau des matrices $[a_{ij}]$.

Alors comment a-t-on abouti à un élément de $K_0(\mathscr{A} \otimes R)$? Simplement en construisant une paramétrix pour D. Alors ce qu'on fait, on écrit qu'il existe une paramétrix pour D notée $\widetilde{D}Q$, et il existe une paramétrix Q qui est Γ-invariante. Donc on choisit Q, Γ-invariante, et on écrit qu'on a $S_0 = \widetilde{D}Q - 1$ et $S_1 = Q\widetilde{D} - 1$ qui sont des opérateurs qui, si on était dans le cas compact, seraient simplement des opérateurs régularisants, mais ici, on n'est plus dans le cas compact, mais Γ-compact si vous voulez, et ce qu'on a, ce ne sont pas des éléments de R mais des éléments de R tensorisé par $\mathbb{C}\Gamma$ parce qu'on a le groupe Γ qui est là. Donc en fait, ce qu'on va obtenir avec ces deux éléments, on construit le projecteur e par la formule suivante : *(dit à part lui)* (bon alors là, je ne sais pas si je vais m'en souvenir, donc je préfère regarder dans mes notes, sinon, je vais écrire quelque chose de faux) :

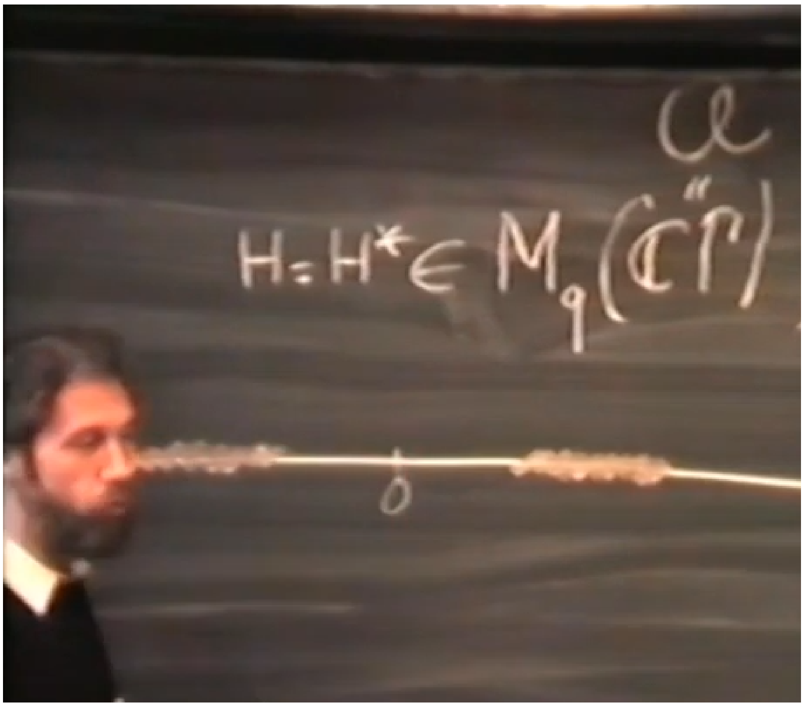
$$e = \begin{bmatrix} S_0^2 & S_0(1+S_0)Q \\ S_1 D & 1 - S_1^2 \end{bmatrix}$$

Donc c'est une petite formule algébrique, qui vient simplement d'une suite exacte en... Il y a des formules équivalentes à celle-là. Le fait que cette formule soit exactement

[2] $\mathscr{A} = \mathbb{C}\Gamma$.

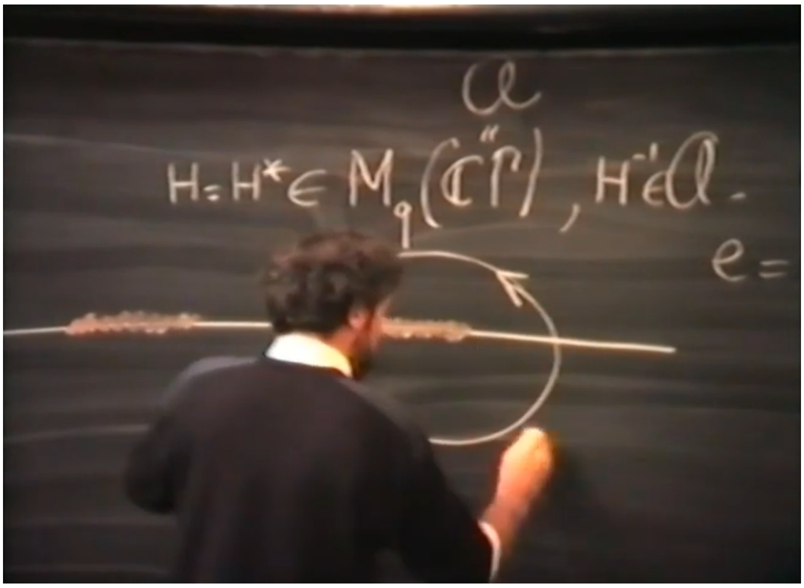
comme ça n'est pas très important. On arrive à construire un projecteur, une classe de K-théorie, uniquement déterminé à partir de l'opérateur $\widetilde{D}$ de signature sur $\widetilde{M}$ et à partir d'une paramétrix.

Alors, on a ces deux formes-là. On va voir que la forme 2, est une forme extrêmement importante pour faire des calculs, est une forme extrêmement importante pour obtenir des formules, parce que finalement ce qu'on veut, c'est non pas avoir un invariant dans le groupe abstrait comme le groupe de Witt, mais on veut un nombre. On veut le nombre qui est donné par la formule de Novikov. Donc on va voir que la formule 2 est très pratique pour obtenir un nombre, mais par contre la formule 2 n'est pas invariante par homotopie.



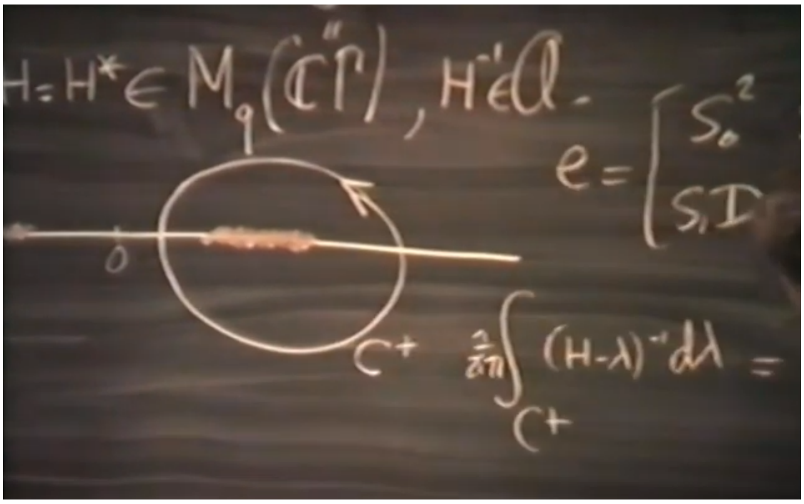
Par contre, la formule 1, elle, est difficile pour obtenir un nombre, mais elle est invariante par homotopie. Donc il est nécessaire d'aller plus loin, pour savoir quelle est la relation entre 1 et 2. Alors si vous avez une forme quadratique dans des cas très simples, cette forme quadratique, pour la classifier, ce que vous devez faire, c'est prendre le nombre de valeurs propres qui sont négatives. Une manière géométrique de voir ça, ça consiste à faire une intégrale de Cauchy, ça consiste à *(dessinant le dessin ci-dessus au tableau)*, on a $H = H^* \in M_q(\mathbb{C}\Gamma)$ (avec $\mathscr{A} = \mathbb{C}\Gamma$), et H est inversible $H^{-1} \in \mathscr{A}$. A priori, on se dirait, l'opérateur H, on va regarder son spectre, comme l'opérateur est auto-adjoint, bon, eh bien, on va dire que son spectre est auto-adjoint, comme il est inversible, il ne contient pas 0, et donc, on va simplement pouvoir faire ça *(il entoure les valeurs propres positives d'un cercle sur lequel il dessine une flèche* *dans le sens horaire, c'est le chemin C).* On fait une intégrale de Cauchy sur un chemin C plus un sur deux pi l'intégrale sur C^+ de $(H-\lambda)^{-1}d\lambda$ *(voir ci-dessous).*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C^+}(H-\lambda)^{-1}d\lambda = e_+$$

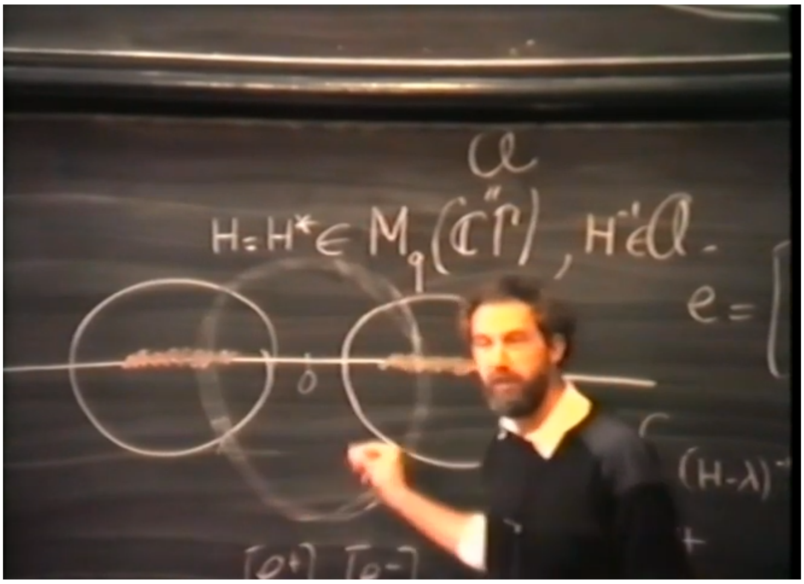


Et ça, ça doit définir un projecteur e_+, de même, on a e_- qui est le correspondant côté demi-plan négatif. Et on devrait avoir que

$$e_+ - e_- = [e]$$



Bon alors, il y a un tas de raisons pour lesquelles ça, c'est faux, a priori, si vous voulez. La première raison, c'est qu'il n'y a pas de K-théorie dans l'algèbre $\mathbb{C}\Gamma$. En général, la K-théorie de $\mathbb{C}\Gamma$ est triviale. La deuxième raison, c'est qu'il est complètement faux, en général, pour les spectres d'algèbres de Banach générales, que le spectre d'un élément auto-adjoint soit auto-adjoint. Si vous prenez $\mathbb{C}\Gamma$, c'est immédiatement faux parce que, par exemple, si vous regardez un élément comme $1 - \frac{1}{2}g$ où g est un générateur du groupe, si vous inversez cet élément, il va avoir une infinité de coefficients non nuls, et donc son inverse ne sera pas dans l'algèbre. Mais si vous regardez une algèbre comme $\ell^1(\Gamma)$, eh bien, à moins que le groupe Γ soit très simple, dans l'algèbre $\ell^1(\Gamma)$, le spectre d'un élément auto-adjoint inversible, en général, ça va être une couronne. Et donc, en général, il sera impossible de passer à travers, et il sera impossible de détecter e_+ et e_- ici. Donc on voit qu'on ne peut pas être aussi naïf que ça, on ne peut pas simplement écrire cette égalité et essayer de l'utiliser.



Ce qu'il faut faire, c'est absolument nécessaire à ce point-là, il faut trouver une algèbre qui contienne $\mathbb{C}\Gamma$ et telle que le spectre d'un élément dans cette algèbre soit auto-adjoint, si l'élément est auto-adjoint, le spectre soit réel. Donc c'est exactement à ce point-là que les C^*-algèbres interviennent. Alors quelle est la C^*-algèbre qui intervient ici. Alors soit $A = C^*(\Gamma)$ la C^*-algèbre de Γ, comment est-elle définie ? On a simplement un espace naturel de Hilbert $\mathscr{H}$ qui est égal à $\mathscr{H} = \ell^2(\Gamma)$. Dans cet espace de Hilbert, on a la représentation régulière de Γ, et donc on peut regarder la fermeture, simplement, de $\mathbb{C}\Gamma$ pour la norme *(il note)* $\overline{\mathbb{C}\Gamma} = A$. Si le groupe était commutatif, ce qu'on aurait obtenu comme ça, ce serait simplement l'algèbre des fonctions continues sur le dual de Pontryagin du groupe. Dans le cas non-commutatif, on a une algèbre, cette algèbre bien sûr n'est plus commutative en général, et ce qu'on voudrait faire, c'est de la topologie sur l'espace en question, bien qu'il ne soit plus décrit par cette algèbre-là, qui n'est plus commutative.

Ce qu'on sait en tout cas, c'est que (c'est un lemme) l'égalité $[e^+]-[e^-]=e$ est vraie dans la K-théorie de A, dans $K_0(A)$.

Une question d'un auditeur : "qu'est ce que A ?". C'est la C^*-algèbre du groupe, c'est la fermeture normique de l'algèbre du groupe dans l'espace ℓ^2. Dans l'espace ℓ^2, on a une norme naturelle, qui est la norme des opérateurs dans le Hilbert, on regarde simplement l'adhérence normique. Et le point de cette adhérence normique, c'est que dans le cas commutatif, si Γ était commutatif, on obtiendrait exactement A égale l'ensemble des fonctions continues sur le dual de Pontryagin de Γ, qu'on note $A=C(\widehat{\Gamma})$. C'est pour ça qu'on prend cette fermeture normique.

Le premier lemme qui est important, c'est que cette égalité que je cherchais tout à l'heure, en fait, elle est vraie, mais elle est vraie dans cette K-théorie, dans $K_0(A)$. Par contre, elle n'est pas vraie dans $K_0(C(\Gamma))$ car même si vous prenez le cas commutatif, même si vous prenez $\Gamma=\mathbb{Z}^2$ par exemple, $K_0(C(\Gamma))$ sera en général égal à $\mathbb{Z}$ et vous n'aurez pas du tout les éléments qu'il faut pour pouvoir écrire l'égalité.

Une remarque du même auditeur, à laquelle il est répondu : j'utilise le produit tensoriel *algébrique*. Le produit tensoriel $\mathscr{A}\otimes R$ écrit plus haut pourrait être réécrit sous la forme $R\Gamma$: on a cet anneau tensoriel universel R des suites dont les coefficients décroissent très rapidement, pratiquement, ce R, c'est une forme un peu élaborée de M^∞. En K-théorie algébrique, on utilise toujours M^∞ d'un anneau ; ici, c'est un M^∞ qui est un petit peu plus élaboré, au sens où on utilise des matrices à décroissance rapide, mais à ce moment-là, la K-théorie est suffisamment riche, justement, pour contenir ces éléments-là.

Bon, maintenant, j'ai besoin d'un outil, qui est un outil essentiel de topologie différentielle. Mais ou lieu d'écrire cet outil sous la forme géométrique à laquelle on est habitué, je vais écrire cet outil sous une forme algébrique, et je l'appliquerai immédiatement à la situation de trouver un invariant, qui redonne la formule de Novikov.

Alors cet outil de topologie différentielle, si vous voulez, on a l'isomorphisme de Chern, qui permet d'associer à un fibré des classes caractéristiques, et qui ensuite, disons, si on veut obtenir un nombre à partir de ces classes caractéristiques, ce qu'on peut faire, c'est regarder $Ch(E)$ et l'accoupler par exemple avec une classe d'homologie ; cette classe d'homologie, je veux y penser comme étant un courant, un courant de de Rham, dans le cas des variétés. *(Il note)* $\langle Ch(E), c\rangle$ parce que je veux utiliser, non plus seulement la topologie, c'est-à-dire la C^*-algèbre A, mais je veux utiliser une espèce de structure différentielle sous-jacente. Alors, ce que je vais faire, c'est écrire un lemme algébrique, qu'il sera très facile de réinterpréter, de repenser en termes de courant, je vais tout de suite montrer comment, mais qui sera formulé de telle sorte qu'à aucun moment, je n'utiliserai le fait que les fonctions commutent entre elles, que les coordonnées des variétés commutent entre elles. Alors je vais écrire ce lemme. Et au lieu de l'écrire pour tout n, ce qui le rendrait assez incompréhensible, je vais l'écrire seulement pour la dimension 2.

Lemme* ($n = 2$): *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre.* (Pensez par exemple à l'algèbre des fonctions $\mathbb{C}^\infty$ sur une variété (mais elle n'a aucune raison d'être commutative), *et $\tau(f^0, f^1, f^2)$, une fonctionnelle trilinéaire d'éléments de $\mathscr{A}$, telle que (elle vérifie deux conditions très simples)* :

a) $\tau(f^1, f^2, f^0) = \tau(f^0, f^1, f^2)$ (τ est inchangée par permutation cyclique).

La deuxième condition va faire intervenir le lien avec le produit. La première condition ne fait pas intervenir le lien avec le produit. La seconde condition va faire intervenir le lien avec le produit et va généraliser la condition d'avoir une trace. Vous savez qu'une trace est caractérisée par la condition $\tau(f^0, f^1) - \tau(f^1 f^0) = 0$. Alors ici on va avoir plus de termes à mettre, et la condition va donner (la seule condition qu'on vérifie, c'est de ne jamais changer l'ordre des variables) :

b) $\tau(f^0 f^1, f^2, f^3) - \tau(f^0, f^1 f^2, f^3) + \tau(f^0, f^1, f^2 f^3) - \tau(f^3 f^0, f^1, f^2) = 0.$

Alors si ces 2 conditions sont vérifiées, alors, on va pouvoir construire, grâce à cette fonctionnelle-là, un invariant de K-théorie. L'énoncé du lemme est le suivant :

(Fin de l'énoncé du lemme commencé ci-dessus)
Alors l'égalité suivante définit un homomorphisme de $K_0(\mathscr{A} \to \mathbb{C})$.

On part d'une classe de projecteurs, bon disons, d'un projecteur, $e \in M_q(\mathscr{A})$ (donc qui vérifie $e = e^2$) et on lui associe le nombre complexe $\tau(e, e, e)$ (alors, bien sûr, a priori, τ n'était pas défini sur les matrices, mais on prolonge la définition de τ aux matrices, je mets ça entre parenthèses : à chaque fois que j'aurai des produits, je prendrai comme définition que $\tau(a^0 \otimes m^0, \ldots, a^2 \otimes m^2) = \tau(a^0, a^1, a^2)\mathrm{Tr}(m^0 m^1 m^2))$. C'est une manière complètement canonique de prolonger ça aux matrices. Et on vérifie facilement que les propriétés a) et b) restent vraies.

Donc si vous voulez, le point de ce lemme est le suivant : le point, c'est qu'alors qu'une trace définit évidemment un invariant de K-théorie, en associant à chaque projecteur la trace du projecteur, ici, on a une trace d'ordre plus élevé, qui également définit un invariant de K-théorie. Et si vous prenez l'exemple le plus simple, prenons un exemple. Prenons pour $\mathscr{A}$ les fonctions C^∞ sur une variété, l'algèbre commutative des fonctions C^∞ sur une variété, $\mathscr{A} = C^\infty(M)$, et considérons un courant de de Rham C, fermé, de dimension 2. Bon il est clair que le 2 ici n'a rien à faire, mais je le prends simplement pour éviter d'écrire de longues formules. Eh bien, à ce moment-là, on peut poser $\tau(f^0, f^1, f^2)$ égale le courant C évalué sur la forme différentielle $\tau(f^0, f^1, f^2) = \langle C, f^0 df^1 \wedge df^2 \rangle$. Il est immédiat que :

- la propriété a) est équivalente au fait que le courant soit fermé ; elle ne serait pas vraie si le courant n'était pas fermé.

- Et la propriété b), elle, est vraie en général, et elle résulte simplement de la règle de Leibniz de différenciation d'un produit.

Et remarquez une autre chose, c'est que j'aurais pu, dans ce cas-là, écrire une propriété plus forte que a). J'aurais pu écrire l'invariance par tout le groupe symétrique. Mais cette invariance serait cassée dès que je passe aux matrices. Quand je passe aux matrices, je dois faire le produit par la trace du produit des matrices dans l'ordre cyclique, et cette trace n'est pas invariante par des permutations arbitraires, c'est pour ça qu'on se limite aux permutations cycliques, c'est pour ça qu'on est obligé de regarder seulement les permutations cycliques. Alors dans ce cas-là, si on cherche quelle est la flèche de K-théorie, alors lorsqu'un fibré, si vous voulez, est représenté par un projecteur, lorsque vous représentez un fibré par un projecteur, c'est toujours possible bien sûr, le fibré a automatiquement une connexion canonique qui est la connexion grassmanienne, qui est l'image inverse de la connexion sur la grassmanienne. Et si vous cherchez ce que va vous donner la formule que j'ai écrite ici, la formule $\tau(e, e, e)$, eh bien ce que vous obtenez, c'est l'intégrale sur le courant C, de *e de de*, ou $\langle C, e\ de\ de \rangle$, maintenant on a affaire à des matrices, non plus à des scalaires, et ça, c'est exactement la formule qui donne l'accouplement du caractère de Chern avec le courant C, à une normalisation près bien sûr, parce que ça, ça va donner la courbure de la connexion grassmanienne.

Alors maintenant, donc, on a notre outil. Notre outil, c'est ce qui va remplacer les courants de de Rham. C'est un outil qui a toutes sortes de développements, qui ne me seront pas vraiment utiles pour mon exposé ici, mais si vous voulez, ce lemme est en quelque sorte le point de départ de la cohomologie cyclique. Qu'est-ce que la cohomologie cyclique ? La cohomologie cyclique, ça consiste à reconnaître que dans ce lemme, il y a une cohomologie qui est cachée. Et la cohomologie qui est cachée, c'est qu'en fait cette formule[3], on peut la réécrire $B\tau = 0$, où B est le bord de Hochschild et qu'en fait, on peut négliger les bords, c'est-à-dire qu'il y a une manière triviale de construire des fonctionnelles vérifiant a) et b) et donc qu'on a affaire à une cohomologie, qui est la cohomologie cyclique et qu'ensuite on peut calculer pour les variétés, etc.

Alors quel est le rapport avec ce dont je parle maintenant. Maintenant, on n'a pas affaire à des variétés, on n'a pas affaire à $C^\infty(M)$, on a affaire à l'algèbre $C(\Gamma)$ où Γ est un groupe discret. D'autre part, quelle est la donnée du problème de Novikov ? La donnée, c'était un cocycle de groupe, puisque ce qu'on avait au départ, c'est une donnée de base, qui est le cocycle ω, qui est la classe de cohomologie, comme classe

[3]la formule b) ci-dessus.

de cohomogie sur $d\Gamma$, mais de manière équivalente, on a un cocycle de groupe. Donc on a, si vous voulez,

$$c(g_1, \ldots, g_n) \text{ cocycle de groupe}$$

Donc ce que l'on a, c'est un scalaire, chaque fois qu'on a n éléments du groupe. Alors, ce que je veux faire, c'est à partir d'un tel cocycle de groupe, je veux construire ce qui est derrière-là, au tableau, là, je veux construire une fonctionnelle τ qui vérifie les propriétés a) et b). Alors on a le lemme suivant, qui est complètement élémentaire, mais qui est utile par rapport à ce qu'on veut faire.

Lemme : *Soit c un cocycle de groupe de dimension n, alors l'égalité suivante définit un cocycle cyclique, donc c'est-à-dire une fonctionnelle vérifiant les propriétés a) et b), généralisée à n quelconque, τ_c sur l'algèbre du groupe $\mathscr{A} = \mathbb{C}\Gamma$;*

Donc je veux savoir ce que c'est que $\tau_c(a^0, a^1, \ldots, a^n)$. Remarquez qu'il y a une variable de plus ici que tout à l'heure, puisque je dois commencer par a^0, où chacun des a^i est un élément de $\mathbb{C}\Gamma$. Alors comme on a affaire à une fonctionnelle qui est multilinéaire, eh bien, il suffit de savoir quelle est la valeur de cette quantité lorsqu'on prend des éléments du groupe, puisque par multilinéarité, on le saura en général. Alors donc en fait, au lieu de supposer que ce sont des éléments de $\mathbb{C}\Gamma$, je vais supposer que ce sont des éléments du groupe *(et il remplace $\tau_c(a^0, a^1, \ldots, a^n)$ par)* $\tau_c(g^0, g^1, \ldots, g^n)$. Alors la définition est la suivante : on pose que c'est égal à $(g^i \in \Gamma)$:

$$\tau_c(g^0, g^1, \ldots, g^n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g^0 g^1 \ldots g^n \neq 1 \\ c(g^1, \ldots, g^n) & \text{si} \quad g^0 g^1 \ldots g^n = 1 \end{cases}$$

Alors vous voyez immédiatement que la première condition est invariante par permutation cyclique : si vous permutez les variables par permutation cyclique, ça ne change pas la condition que le produit des variables soit égal à 1. Pour la deuxième condition, dès que le cocycle est normalisé, c'est un petit exercice de vérifier qu'on a effectivement affaire à un cocycle cyclique.

Maintenant, on dispose d'un accouplement grâce au lemme que j'avais écrit avant, on dispose d'un accouplement entre la K-théorie de l'algèbre $\mathscr{A}$ en généralisant ce lemme, que j'avais écrit seulement pour le cas $n = 2$ *(il montre le lemme marqué d'une étoile ci-dessus)*, en généralisant pour un n quelconque, on dispose d'un accouplement entre la K-théorie de l'algèbre $\mathscr{A}$ et la cohomologie cyclique. Donc comme on a ce cocycle cyclique particulier, chaque fois qu'on a une classe de K-théorie, on a un nombre.

On avait la deuxième forme de la signature, qui était ici, je vous rappelle que la deuxième forme de la signature, c'était un élément qui appartenait à $K_0(\mathbb{C}\Gamma \otimes R)$ ($\mathbb{C}\Gamma$ tensorisé par l'anneau R des suites à décroissance rapide) :

$$[e] \in K_0(\mathbb{C}\Gamma \otimes R)$$

Alors cet anneau R des suites à décroissance rapide a comme propriété qu'il a une trace naturelle. Chaque fois qu'on a un élément de R, on peut définir Trace(r) $(r \in R)$ comme la somme des valeurs diagonales r_{ii} (Trace$(r) = \sum r_{ii}$), et on en déduit que, non seulement l'accouplement de K-théorie a lieu avec $\mathbb{C}\Gamma$, lorsqu'on a un cocycle de groupe, mais il a également lieu avec $\mathbb{C}\Gamma$ tensorisé par R (i.e. $\mathbb{C}\Gamma \otimes R$).

Alors je vais d'abord écrire un premier résultat, qui est un premier théorème, qui généralise le théorème d'Atiyah-Singer pour les revêtements, et qui va nous permettre de commencer à travailler.

Alors ce premier théorème; (on obtient, à un coefficient près qui est très important, que :

Théorème 1 :

$$\langle [e], \tau_c \rangle \quad = \quad \frac{1}{(2\pi i)^q} \frac{q!}{(2q)!} \langle L(M) \Psi^*(c)[M] \rangle.$$

$$\textit{avec } \ \tau_c \textit{ est un cocycle de groupe}, \quad e \in K_0(\mathbb{C}\Gamma \otimes R) \ \textit{ et } \ n = 2q$$

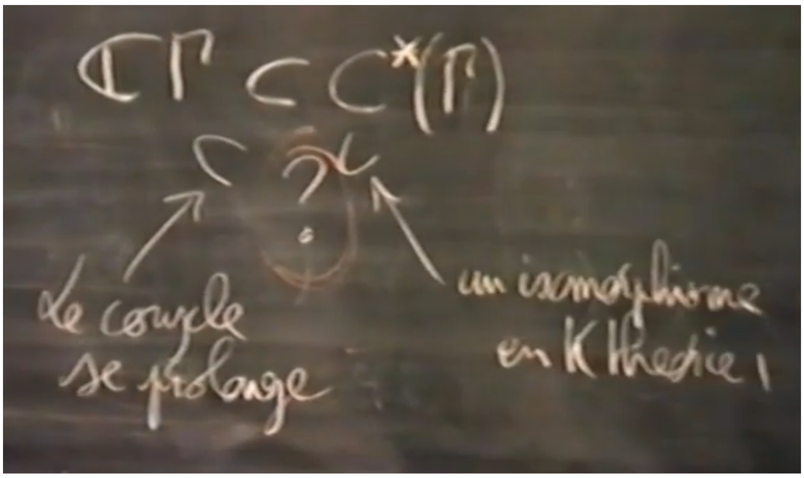
$L(M)$ est le polynôme, $\Psi^*(c)$ est l'image inverse du cocycle par l'application classifiante évaluée sur la classe fondamentale de M.

Donc en fait, le terme de droite, qui est la formule de Novikov, est en fait égal, à un coefficient non nul près, au terme de gauche, qui est égal à l'accouplement entre le cocycle cyclique et la signature vue en tant qu'élément de la K-théorie de cette algèbre $R(\Gamma)$.

Mais c'est vraiment là que le problème commence. Lorsqu'on est là, on pourrait dire "ah ben, c'est vrai, la conjecture de Novikov est vraie" parce qu'on a exprimé un théorème de l'indice, on a le terme de droite qui est le problème de Novikov, qui est le problème d'invariance par homotopie de ce terme-là, qui est égal au terme de gauche, qui est effectivement un terme de signature. Mais ce terme de signature, il était défini en utilisant des opérateurs elliptiques. Il était défini comme un élément de $K_0(R(\Gamma))$. Et on ne savait pas, c'est bien ce que j'avais écrit au tableau, on ne sait pas en général démontrer l'invariance par homotopie de ce terme-là *(le K_0...)*. Tout ce qu'on sait, c'est que lorsqu'on regarde les 2 dans la K-théorie de la C^*-algèbre, ils coïncident, et comme l'autre est invariant par homotopie, celui-là, lorsqu'on regarde son image dans la C^*-algèbre est invariant par homotopie. Alors c'est là qu'un problème d'analyse apparaît, et c'est là que la propriété que le groupe est hyperbolique va intervenir.

Donc la dernière partie de mon laïus sera simplement une partie d'analyse et maintenant, il me faut aller un tout petit peu plus loin que l'outil de topologie différentielle vu seulement au niveau de l'algèbre, ici, et il faut, grosso modo, que je fasse la même opération que l'opération, que l'on dit en trois mots pour les variétés, qui consiste à dire la chose suivante : en topologie différentielle, il est crucial, lorsque vous avez un problème de topologie, par exemple un fibré, topologique a priori, que vous puissiez le rendre C^∞. Alors on dit, bon, on prend un fibré, on le rend C^∞, mais il est très important qu'il n'y ait qu'une seule manière de le rendre C^∞, c'est-à-dire qu'en fait, ce qui est crucial, c'est que lorsqu'on regarde l'application de K_0 de l'algèbre des fonctions C^∞ de M (notée $K_0(C^\infty(M))$) vers l'algèbre des fonctions continues sur M (notée $K_0(C(M))$) (*l'application de son ensemble de départ vers son ensemble d'arrivée se note donc* $K_0(C^\infty(M)) \to K_0(C(M))$), c'est vraiment un exemple typique de ce qui se passe en topologie différentielle, on a ici *(à droite)* quelque chose qui est de la topologie, ici *(à gauche)*, quelque chose qui utilise la géométrie différentielle, des coordonnées régulières, etc., et il est crucial que l'on sache que cette application est un isomorphisme *(il note cela par le signe $\simeq$ sous la flèche de l'application).*

Alors dans le problème qui m'intéresse, cette question-là est une question d'analyse beaucoup plus difficile que dans le cas commutatif, et la raison, grosso modo, est la suivante : la raison est que les groupes non-commutatifs, comme le groupe Γ *(s'interrompant).* Ce qu'on sait, si vous voulez, c'est qu'on a l'inclusion $\mathbb{C}\Gamma \subset C^*(\Gamma)$. Si le groupe était commutatif, ça reviendrait à inclure les polynômes de Laurent, ou les polynômes trigonométriques dans les fonctions continues. Si on regarde les polynômes de Laurent, ou les polynômes trigonométriques, leur K-théorie n'est pas la même que la K-théorie des fonctions C^∞, parce que si vous inversez, si vous regardez le spectre, vous allez avoir des problèmes, parce que lorsque vous calculez l'inverse d'un élément, les coefficients vont décroître à l'infini, mais ne vont pas être nuls à un moment. Donc en fait, ce qu'on cherche à faire, c'est à trouver une algèbre qui est plus grande que $\mathbb{C}\Gamma$, qui soit là *(et il complète l'inclusion déjà écrite par une algèbre qui se trouverait entre les deux algèbres déjà écrites de la façon suivante :)*



(et en ajoutant les conditions nécessaires sur les inclusions recherchées) : pour l'inclusion gauche, il faut que le cocycle se prolonge, et pour l'inclusion droite, il faut qu'on ait

un isomorphisme en K-théorie.

Alors il se fait que pour les groupes hyperboliques, ce problème a une réponse, et cette réponse résulte de plusieurs résultats d'analyse, qui sont des résultats difficiles. Et en fait, la réponse, c'est exactement l'espace de Schwartz d'Harish Chandra qui a été inventé dans la théorie des groupes semi-simples. C'est-à-dire que la réponse n'est pas du tout évidente : on définit une sous-algèbre de la C^*-algèbre $C^*(\Gamma)$, que je vais noter $\mathscr{S}(\Gamma)$, et qui est donc exactement l'analogue, si vous prenez par exemple pour Γ un sous-groupe de $\mathrm{SL}(\mathbb{R})$ par exemple, un sous-groupe cocompact, cette algèbre $\mathscr{S}(\Gamma)$ va correspondre exactement à la condition qui est duale des distributions tempérées d'Harish Chandra, c'est-à-dire qu'elle va correspondre exactement à l'espace de Schwartz. Alors comment la définit-on ? On la définit grosso modo en disant qu'un élément de l'algèbre du groupe s'écrit $\sum a_g\, g$ où g est un élément du groupe et il nous faut donner une condition de décroissance des coefficients a_g. Cette condition va être la suivante $|g|^k a_g \in \ell^2$: chaque fois qu'on multiplie a_g par une puissance du nombre générateur qui apparaît dans g c'est-à-dire la longueur des mots à la puissance k, on demande que cette suite-là appartienne à ℓ^2. Alors je souligne vraiment plusieurs fois ℓ^2 ici parce que contrairement *(s'interrompant)*. Vous connaissez bien l'espace de Schwartz dans le cas de $\mathbb{R}$: pour l'espace de Schwartz de $\mathbb{R}$, si une fonction est telle que son produit par la longueur, à toute puissance, appartient à ℓ^2, bien sûr la fonction appartient à ℓ^1. Mais ici ça n'est pas vrai. Parce que le groupe a croissance exponentielle et vous pouvez très bien avoir une fonction telle que son produit par toute longueur des mots à la puissance k appartienne à ℓ^2 sans que la fonction n'appartienne à ℓ^1. Et c'est un point crucial. C'est exactement le même point crucial que dans l'espace de Schwartz d'Harish Chandra, pour les groupes de Lie. Dans les groupes de Lie, ce qu'on fait, c'est qu'on prend une fonction sphérique et elle a la propriété d'être juste dans ℓ^2 mais pas d'être dans ℓ^1.

Donc on a cette propriété. *(Il encadre)* $\boxed{|\mathrm{g}|^k a_g \in \ell^2}$ et le lemme crucial qui est un lemme d'analyse, il consiste à mettre bout à bout les travaux d'Haagerup, Jolissaint et de la Harpe et ce lemme dit la chose suivante ; il dit qu'on a deux choses qui sont vérifiées :

Lemme : 1 *$\mathscr{S}\Gamma$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe.*

(Peu importe le terme technique, cela implique que la flèche de $K_0(\mathscr{S}\Gamma) \to K_0(C^*\Gamma)$ est un isomorphisme (*quelqu'un*[4] *intervient, AC répond* “Well, take the intersection if you want, okay, but this is exactly where the difficulty comes. I mean what you have to prove is that if a sequence satisfies this, then it is bounded as an operator and this is very difficult okay ? But let me state the lemma.” La première chose, donc, est que $\mathscr{S}\Gamma$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe et ça, avec une bonne

[4]Ofer Gabber ?

condition de $\mathscr{S}\Gamma$, c'est toujours vrai.

② Et la deuxième condition, c'est que :

Si le groupe Γ *est un groupe hyperbolique alors tout cocycle* C *qui appartient à la cohomologie du groupe (*$C \in H^*$*) qui est borné se prolonge à* $\mathscr{S}\Gamma$.

Alors qu'ai-je dit ? Ce que j'ai dit c'est que la fonctionnelle C dont je parlais tout à l'heure se prolonge à l'algèbre $\mathscr{S}\Gamma$ dès que le cocycle est borné. Et donc je peux maintenant conclure. Comment est-ce qu'on démontre le théorème de Novikov pour les groupes hyperboliques ? On utilise un lemme de Mikhaïl Gromov[5], pour conclure, et qui dit la chose suivante :

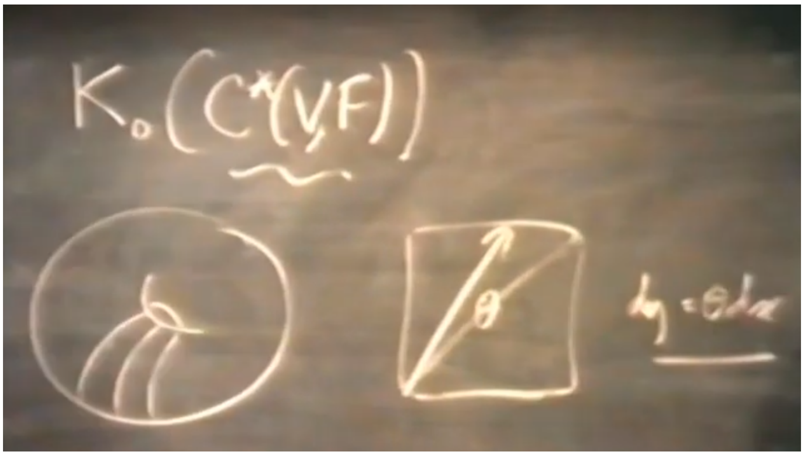
Lemme : (M. Gromov) *Si* Γ *est hyperbolique, toute classe de cohomologie* $H^*(B\Gamma)$ *est représentée par un cocycle borné.*

Alors en mettant bout à bout les estimées qui sont ici, on en déduit donc qu'on peut appliquer ces techniques de topologie différentielle. Et on applique ces techniques de topologie différentielle vraiment dans un cas non-commutatif. Et bien sûr, il y a un nombre considérable de difficultés supplémentaires qui apparaissent.

Alors je voudrais conclure mon laïus en disant deux choses : bon, je n'ai pas beaucoup parlé de l'isomorphisme de Thom pour le moment ; je me sens *(sous-entendu coupable)*... Je vais quand même dire deux mots ; la raison pour laquelle l'isomorphisme de Thom a joué un tel rôle, c'est la suivante : pour obtenir ce genre de techniques, il aurait été malsain de se restreindre aux groupes discrets. En fait, les algèbres non-commutatives qui proviennent des groupes discrets sont intimement reliées à un cadre plus général, qui est le cadre des feuilletages. Et lorsque vous avez le cadre des feuilletages, il y a d'un côté les variétés ordinaires, c'est-à-dire les feuilletages qui ont vraiment un espace-quotient, de l'autre côté les groupes discrets, d'une certaine manière. Et entre les deux, on a les feuilletages. Et alors pour les feuilletages, il se fait que si on a une variété V avec un feuilletage F (noté (V, F)), on a une liberté de manœuvre géométrique qui est plus grande et on peut voir ce qui se passe de manière plus facile. Et alors la raison pour laquelle l'isomorphisme de Thom intervient de manière cruciale, c'est que ce qu'on veut faire, c'est deviner quelle est la K-théorie, K_0 par exemple, de la C^*-algèbre du feuilletage (notée $K_0(C^*(V, F))$). Peu importe que ce soit la C^*-algèbre du feuilletage, c'est une généralisation de la C^*-algèbre du groupe si vous voulez, un feuilletage, c'est un objet dynamique comme ça, c'est un objet où l'holonomie, le pseudo-groupe d'holonomie par exemple joue le rôle du groupe

[5]Pour la collaboration A. Connes, H. Moscovici, M. Gromov, voir http://denise.vella.chemla.free.fr/AC-MG-HM-CRAS.pdf qu'on peut également trouver dans les publications de Mikhaïl Gromov dans sa page à l'IHES ou télécharger sur les archives des C.R.A.S.

Γ, et lorsqu'on cherche cette K-théorie de la C^*-algèbre du feuilletage, on s'aperçoit que, donc c'était le premier avatar de l'isomorphisme de Thom, qu'il y a un cas où l'on peut voir tout de suite ce qui se passe.



C'est le cas où on a un feuilletage dans lequel, par exemple un feuilletage comme ça, c'est très difficile à calculer même dans ce cas-là, donc dans le cas du feuilletage du tore avec une pente irrationnelle, c'était bien difficile à calculer déjà dans ce cas-là, dans le cas du feuilletage $dy = \theta dx$, eh bien, dans le cas d'un feuilletage comme ça, on s'aperçoit que, regardez ce qui se passe : vous avez l'espace-quotient, et sur cet espace-quotient, il y a un fibré en droites, dont l'espace total est la variété. Donc si on croit à l'isomorphisme de Thom, on en déduit que K_0 de l'espace-quotient, c'est-à-dire de la C^*-algèbre du feuilletage doit être égal, à un chiffre de dimension près, à $K_1(V)$. *(Il a noté) :* $K_0(C^*(V,F)) \approx K_1(V)$. Et on cherche à démontrer ça directement, on s'aperçoit, bien sûr, qu'on ne peut plus parler en termes géométriques et donc on ne peut pas avoir une démonstration trop simple. Après pas mal de travail, on arrive à démontrer ça ($K_0(C^*(V,F)) \approx K_1(V)$), et ensuite on se dit, si c'est vrai dans ce cas-là, qu'est-ce qu'on peut faire en général ? Eh bien, ce qu'on peut faire en général, on peut, en faisant de la chirurgie sur les feuilles, rendre les feuilles k-connexes pour un k arbitraire, ça c'est assez facile à faire, sans changer l'espace-quotient. Donc en fait ce qu'on peut faire, on peut, quand on a un feuilletage arbitraire, on peut chercher à trouver un autre feuilletage, W/G, tel que l'espace des feuilles soit le même $V/F = W/G$, mais tel que la structure des feuilles soit beaucoup plus simple. Et alors en fait, il y a un cas universel de ça, c'est ce qu'on appelle l'espace classifiant du groupoïde d'holonomie, donc $B(\text{Graphe}\,F)$ (d'ailleurs graphe qui a été défini par Thom) ; si on regarde cet espace classifiant $B(\text{Graphe}\,F)$, on s'aperçoit que sa situation par rapport à l'espace-quotient est grosso modo que les fibres sont des espaces contractiles. Et on en déduit que normalement, en travaillant un peu, on devrait avoir un isomorphisme qu'on appelle isomorphisme μ entre la K-homologie de cet espace classifiant $B(\text{Graphe}\,F)$ et la K-théorie de la C^*-algèbre. Alors cet isomorphisme, c'est une généralisation. Le fait que cet isomorphisme existe, c'est une généralisation très forte du problème de Novikov et en fait, pour le démontrer, on développe des techniques du type cohomologie cyclique, qui remplace la cohomologie de de Rham de l'espace-quotient, et on s'aperçoit que si on se spécialise au cas des groupes discrets, eh bien, ça marche au moins pour une classe de groupe assez grande. Ok, donc je crois que je vais m'arrêter là.

(Applaudissements)

Question : Is that a conjecture ?

Réponse : That's a conjecture, that it is an isomorphism.

Puis dernière intervention d'Ofer ?, à qui Alain Connes demande de lire l'article, pour voir si c'est simple, rires entendus et réponse interrompue par arrêt de la vidéo.