ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Flots des poids sur les facteurs de type III.*
Note (*) de MM. **Alain Connes** et **M. Takesaki**, transmise par M. Laurent Schwartz.

L'étude des poids à centralisateur proprement infini conduit à associer à tout facteur une action ergodique de $\mathbf{R}_+^*$ sur un espace mesurable. Aux ensembles mesurables correspondent les classes de poids à équivalence unitaire près. L'action de $\mathbf{R}_+^*$ correspond à l'opération $\varphi \to \lambda\varphi$, $\lambda > 0$. Si M n'est pas de type III_0, le flot est transitif et égal à $\mathbf{R}_+^*$ agissant sur $\mathbf{R}_+^*/\mathbf{R}_+^* \cap S(M)$. Sinon le sous-groupe virtuel $S_V(M)$ de $\mathbf{R}_+^*$ « noyau » de l'action de $\mathbf{R}_+^*$ généralise S (M) et est relié aux descriptions connues des facteurs de type III_0.

La définition du flot des poids de M est fonctorielle, ce qui permet d'associer à M un homomorphisme γ_M de Aut M dans le groupe des automorphismes du flot. Quand M est un facteur de Krieger, cela permet de calculer entièrement $\mathrm{Out}_0\, M = \mathrm{Aut}\, M/\overline{\mathrm{Int}\, M}$. L'homomorphisme modulaire δ_M se prolonge au groupe dual $S_V(M)\hat{}$ de $S_V(M)$ et permet d'obtenir Out M comme extension de $S_V(M)\hat{}$ par un groupe d'automorphismes d'une algèbre de von Neumann de type II_∞.

1. Comparaison des poids de multiplicité infinie. — Un poids de multiplicité infinie sur une algèbre de von Neumann M est par définition un poids normal fidèle semi-fini φ dont le centralisateur M_φ est proprement infini.

Définition 1. — *Soient* φ_1, φ_2 *des poids de multiplicité infinie sur* M; *on écrit :*

(*a*) $\varphi_1 \sim \varphi_2$ *quand il existe un unitaire* $u \in M$ *tel que* $\varphi_1(x) = \varphi_2(uxu^*)$, $\forall x \in M_+$.

(*b*) $\varphi_1 \prec \varphi_2$ *quand il existe une isométrie* $w \in M$, $ww^* \in M_{\varphi_2}$ *avec* $\varphi_1(x) = \varphi_2(wxw^*)$, $\forall x \in M_+$.

On montre que $\sim$ est la relation d'équivalence correspondant à la relation de préordre $\prec$.

Théorème 2. — *Soit* M *un facteur proprement infini de genre dénombrable. Il existe alors un couple unique* (p_M, P_M) *tel que :*

(*a*) P_M *soit une algèbre de von Neumann abélienne;*

(*b*) p_M *soit une surjection de l'ensemble des poids de multiplicité infinie de* M *sur l'ensemble des projecteurs non nuls de genre dénombrable de* P_M;

(*c*) *on ait* $(p_M(\varphi_1) \leqq p_M(\varphi_2)) \Leftrightarrow (\varphi_1 \prec \varphi_2)$, *pour tous* φ_1, φ_2.

Théorème 3. — *Soit* M *un facteur à prédual séparable, proprement infini et* (p_M, P_M) *comme dans le théorème* 2 :

(*a*) *Pour tout* $\lambda > 0$, *il existe un automorphisme unique* Z_λ *de* P_M *tel que* $Z_\lambda p_M(\varphi) = p_M(\lambda\varphi)$, $\forall\, \varphi$ *de multiplicité infinie.*

(*b*) *Il existe un projecteur unique* $d_M \neq 0$, *de genre dénombrable tel que* $Z_\lambda d_M = d_M$, $\forall \lambda > 0$.

On montre que d_M est le plus grand projecteur d de P_M tel que l'application $\lambda \to Z_\lambda x$ soit continue fortement pour tout $x \in (P_M)_d$.

Définition 4. — *Soit* M *une algèbre de von Neumann proprement infinie à prédual séparable. On appelle poids dominant sur* M *tout poids* φ *de multiplicité infinie tel que* $\varphi \sim \lambda\varphi$, $\forall \lambda > 0$.

Le théorème 3 montre l'existence et l'unicité (modulo $\sim$) du poids dominant.

DÉFINITION 5. — *Soit* M *un facteur proprement infini à prédual séparable, on appelle flot des poids de* M *la restriction à l'algèbre de von Neumann* $(P_M)_{d_M}$ *de l'action* Z *de* $\mathbf{R}_+^*$ *sur* P_M.

L'action Z ainsi restreinte est continue et ergodique. Dans la terminologie de G. Mackey ([2]), à toute action ergodique d'un groupe localement compact G correspond un sous-groupe virtuel de G, noyau de cette action. Nous notons $S_V(M)$ le sous-groupe virtuel de $\mathbf{R}_+^*$ associé au flot des poids de M.

THÉORÈME 6. — *Soit* M *comme dans le théorème* 5, *on a*

$$(\text{M } n'est\ pas\ de\ type\ \text{III}_0) \Leftrightarrow (S_V(M) = S(M) \cap \mathbf{R}_+^*)$$
$$\Leftrightarrow (S_V(M)\ est\ un\ sous\ groupe\ ordinaire\ de\ \mathbf{R}_+^*).$$

Ainsi $S_V(M)$ coïncide avec $S(M) \cap \mathbf{R}_+^*$ sauf dans le cas III_0 où il apparaît comme le spectre modulaire virtuel de M.

THÉORÈME 7. — *Soient* N *une algèbre de von Neumann,* τ *une trace normale fidèle semi-finie sur* N, G *un groupe localement compact,* U *un homomorphisme continu de* G *dans* Aut N *tel que l'action* $\overline{\text{U}}$ *correspondante de* G *sur le centre de* N *soit libre et ergodique.*

Soient H *le sous-groupe virtuel de* G *associé à l'action* $\overline{\text{U}}$ *et* ρ *l'homomorphisme de* H *dans* $\mathbf{R}_+^*$ *correspondant au cocycle*

$$s \to \rho_s = \frac{d\,\tau\,U_s}{d\tau}\Delta(s),$$

où Δ *est la fonction modulaire de* G.

Alors le produit croisé de N *par* G via U *est un facteur* M *tel que* $S_V(M) = \overline{\rho(H)}$ *au sens de* ([2]), p. 194.

COROLLAIRE 8. — *Soient* M *un facteur de type* III *à prédual séparable,* N *une algèbre de von Neumann de type* II_∞, τ *une trace normale fidèle semi-finie sur* N, *et* $s \to \theta_s$ *un groupe à un paramètre d'automorphismes de* N *tels que* $\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau,\ \forall s \in \mathbf{R}$ *et que* M *soit le produit croisé de* N *par* **R** via θ [*cf.* ([3])].

Alors le flot des poids de M *est la restriction au centre de* N *de l'action* $\lambda \to \theta_{-\mathrm{Log}\,\lambda},\ \lambda \in \mathbf{R}_+^*$.

COROLLAIRE 9. — *Soient* M *un facteur de type* III_0, N *une algèbre de von Neumann de type* II_∞, τ *une trace normale fidèle semi-finie sur* N *et* $\theta \in$ Aut N *tel que* $\tau \circ \theta = \tau(\rho\,.)$, $\rho \geqq \lambda_0 > 1$ *et que* M *soit produit croisé de* N *par* θ [*cf.* ([1])].

Alors le flot des poids de M *est le flot construit sur la restriction de* θ *au centre de* N, *sous la fonction* ρ.

COROLLAIRE 10. — *Soient* G *un groupe virtuel principal* [([2]), p. 204] *et* Δ *la fonction modulaire sur* G [*homomorphisme de* G *dans* $\mathbf{R}_+^*$ *défini dans* ([2]), p. 198]. *Soit* M *le facteur engendré par la représentation régulière de* G, *alors :*

$$S_V(M) = \overline{\Delta(G)}.$$

De plus les algèbres N des descriptions ([1]) et ([3]) de M comme produit croisé se calculent à partir de la représentation régulière du noyau [au sens de ([2]), p. 196] de Δ.

COROLLAIRE 11. — *Soient* M_1 *et* M_2 *deux facteurs proprement infinis à prédual séparable alors :*

$$S_V(M_1 \otimes M_2) = \overline{S_V(M_1) S_V(M_2)}.$$

En particulier $S(M_1 \otimes M_2) \supset \overline{S(M_1) S(M_2)}$.

2. RÉGULARISATION DES POIDS DE MULTIPLICITÉ INFINIE. — Ce procédé permet de relier tout poids de multiplicité infinie aux poids ψ tels que $p_M(\psi) \leqq d_M$.

THÉORÈME 12. — *Soient* M, p_M, P_M, d_M *comme dans le théorème* 3. *Pour tout poids* φ *de multiplicité infinie et tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $h \in M_\varphi$, $1-\varepsilon \leqq h \leqq 1+\varepsilon$ *tel que* $p_M(\psi) \leqq d_M$ *où* $\psi = \varphi(h\,.)$.

Il en résulte que si M est de type III_λ, $\lambda \neq 0$ et si φ_1 et φ_2 sont deux poids de multiplicités infinies, il existe un unitaire $u \in M$ tel que $u \mathcal{M}_{\varphi_1} u^* = \mathcal{M}_{\varphi_2}$ où $\mathcal{M}_{\varphi_j}$ désigne le domaine de φ_j.

3. HOMOMORPHISME FONDAMENTAL POUR LES FACTEURS DE TYPE III. — Soient M, p_M, d_M, Z, comme dans le théorème 3. Pour tout $\alpha \in \mathrm{Aut}\, M$ il existe un $\bar{\alpha} \in \mathrm{Aut}\, P_M$ unique tel que $p_M(\varphi \circ \alpha^{-1}) = \bar{\alpha}\, p_M(\varphi)$ pour tout φ de multiplicité infinie.

DÉFINITION 13. — *L'homomorphisme fondamental* γ_M *est l'homomorphisme qui à tout* $\alpha \in \mathrm{Aut}\, M$ *associe la restriction* $\gamma_M(\alpha)$ *de* $\bar{\alpha}$ *à* $(P_M)_{d_M}$.

Comme $\gamma_M(\alpha)$ commute avec Z_λ, $\forall \lambda \in \mathbf{R}_+^*$ l'image de γ_M est contenue dans le groupe des automorphismes du flot de M. Ce groupe est égal à $\mathbf{R}_+^*/S(M) \cap \mathbf{R}_+^*$ dès que $S_V(M) = S(M) \cap \mathbf{R}_+^*$.

On montre, quand M est de type II_∞ que la définition ci-dessus coïncide avec ([1]), p. 224.

THÉORÈME 14. — *Soient* M *et* γ_M *comme ci-dessus :*

(*a*) *L'homomorphisme* γ_M *est continu quand on munit* Aut M *de la topologie de la convergence simple normique dans* M_* *et* Aut (*flot des poids de* M) *de la convergence simple forte.*

(*b*) *On a* $\gamma_M(\alpha) = 1$, $\forall \alpha \in \overline{\mathrm{Int}\, M}$.

Il en résulte que γ_M définit par passage au quotient un homomorphisme de $\mathrm{Out}_0 M = \mathrm{Aut}\, M/\overline{\mathrm{Int}\, M}$ dans Aut (flot des poids de M).

THÉORÈME 15. — *Soit* M *un facteur de Krieger* ([4]), *continu et infini. Alors* γ_M *définit par passage au quotient un isomorphisme de* $\mathrm{Out}_0 M$ *sur* Aut (*flot des poids de* M).

4. PROLONGEMENT DE L'HOMOMORPHISME MODULAIRE. — Soient M un facteur de type III, N, τ et $(\theta_s)_{s \in \mathbf{R}}$ comme dans le corollaire 8 ci-dessus. Soit $S_V(M)^\wedge$ le groupe des homomorphismes de $S_V(M)$ dans $T_1 = \{ z \in \mathbf{C}, |z| = 1 \}$. En identifiant (corollaire 8) le flot des poids de M au flot $\lambda \to \theta_{-\mathrm{Log}\lambda}$/Centre de N on peut associer à tout élément c de $S_V(M)^\wedge$ une classe de 1-cocycles : tout c^0 dans cette classe est une application de $\mathbf{R}_+^*$ dans les unitaires du centre de N avec $c^0_{\lambda_1}\, \theta_{-\mathrm{Log}\lambda_1}(c^0_{\lambda_2}) = c^0_{\lambda_1 \lambda_2}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 > 0$. Pour tout $s \in \mathbf{R}$, soit U_s l'unitaire du produit croisé M de N par $\mathbf{R}$ canoniquement associé. Il existe alors un automorphisme $\alpha = \alpha_{c_0}$ unique de M tel que $\alpha(x) = x$, $\forall x \in N$ et $\alpha(U_s) = c^0_{e^{-s}}\, U_s$, $\forall s \in \mathbf{R}$.

THÉORÈME 16. — *Soient* M, N, τ, $(\theta_s)_{s\in\mathbf{R}}$ *comme ci-dessus.*

(*a*) *Pour tout* $c \in S_V(M)^\wedge$, *la classe* $\bar{\delta}_M(c)$ *de* α_{c_0} *dans* Out M = Aut M/Int M *ne dépend ni du choix du représentant* c_0 *de* c *ni du choix de* N, τ, θ *vérifiant les conditions du corollaire* 8.

(*b*) *L'application* $\bar{\delta}_M$ *est un homomorphisme injectif de* $S_V(M)^\wedge$ *dans* Out M *et* $\bar{\delta}_M(\bar{t}) = \delta_M(t)$, $\forall t \in \mathbf{R}$ *où l'application* $t \to \bar{t}$ *est la transposée de l'injection canonique de* $S_V(M)$ *dans* $\mathbf{R}_+^*$.

(*c*) *On a* $\gamma_M \circ \bar{\delta}_M = 1$.

(*d*) *L'image de* $\bar{\delta}_M$ *est un sous-groupe normal de* Out M *et l'action de tout* $\alpha \in$ Out M *sur cette image est déterminée par* $\gamma_M(\alpha)$.

Cette extension $\bar{\delta}$ de l'homomorphisme modulaire permet d'étendre aux facteurs de type III la suite exacte de (1), p. 225.

THÉORÈME 17. — *Soient* M, N, τ, $(\theta_s)_{s\in\mathbf{R}}$ *comme ci-dessus.*

(*a*) *Le commutant relatif de* N *dans* M *est égal au centre de* N.

(*b*) *Pour tout* $\alpha \in$ Out M *il existe* $\alpha_0 \in$ Aut M *dans la classe de* α *tel que* $\alpha_0(N) = N$ *et que la restriction de* α_0 *à* N *préserve* τ.

(*c*) *Dans* (*b*) *l'image* $\delta'(\alpha)$ *dans* Out N *de la restriction de* α_0 *à* N *ne dépend pas du choix de* α_0.

(*d*) *La suite suivante est exacte :*

$$1 \to S_V(M)^\wedge \xrightarrow{\bar{\delta}} \operatorname{Out} M \xrightarrow{\delta'} \operatorname{Out}_{\tau,\theta}(N) \to 1,$$

où

$$\operatorname{Out}_{\tau,\theta}(N) = \{\beta \in \operatorname{Out} N,\ \tau\circ\beta = \tau,\ \varepsilon_N(\theta_s)\beta = \beta\,\varepsilon_N(\theta_s),\ \forall s \in \mathbf{R}\}.$$

(*e*) *Quand on identifie le flot des poids de* M *à la restriction au centre de* N *de l'action* $\lambda \to \theta_{-\mathrm{Log}\lambda}$ *on obtient pour tout* $\alpha \in$ Aut M,

$$\gamma_M(\alpha) = \textit{restriction de } \delta'(\alpha) \textit{ au centre de } N.$$

Pour tout facteur de type III_0, on a alors :

$$\operatorname{Int} M \subset \operatorname{Image} \bar{\delta}_M \subset \overline{\operatorname{Int} M} \subset \operatorname{Noyau} \gamma_M \subset \operatorname{Aut} M.$$

(*) Séance du 11 février 1974.

(1) A. CONNES, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, 6, fasc. 2, 1973, p. 133-252.
(2) G. W. MACKEY, *Math. Ann.*, 166, 1966, p. 187-207.
(3) M. TAKESAKI, *Acta. Math.*, 131, 1973, p. 249-310.
(4) i.e. M est produit croisé d'une algèbre de von Neumann abélienne par un automorphisme.

Centre de Physique théorique,
C. N. R. S.,
31, *chemin Joseph-Aiguier,*
13274 *Marseille-Cedex* 02.