ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Existence de facteurs infinis asymptotiquement abéliens*. Note (*) de MM. **Alain Connes** (1) et **Edward James Woods** (2), transmise par M. Laurent Schwartz.

Démonstration de l'existence de facteurs de type III asymptotiquement abéliens, les facteurs de Powers en particulier. Cela résout un problème posé par S. Sakai, Pb 42, p. 215 de (6).

S. Sakai a introduit (5) la notion d'algèbre de von Neumann asymptotiquement abélienne et a montré l'existence de facteurs de type II_1 asymptotiquement abéliens. Aucun facteur de type I ou II_∞ n'est asymptotiquement abélien [(7), (4)]. Soit A une C* algèbre dans l'espace hilbertien $\mathscr{H}$, et $(\sigma_n)_{n\in N}$ une suite d'automorphismes de A telle que $\|[\sigma_n(x), y]\| \to 0$ $n\to\infty$, $\forall x, y \in A$. En général les σ_n ne se prolongent pas à la fermeture faible M de A, et même s'ils se prolongent (par exemple si ce sont des automorphismes intérieurs de A) il peut arriver qu'ils ne soient pas fortement asymptotiquement abéliens sur M (par exemple M peut être un facteur de type I ou II_∞). Le théorème 2 donne une condition suffisante très simple (l'existence d'un état normal fidèle invariant) pour que la suite des automorphismes prolongés soit fortement asymptotiquement abélienne.

Rappelons la définition de S. Sakai :

DÉFINITION 1. — *Soit* M *une algèbre de von Neumann. Une suite d'automorphismes de* M *est dite asymptotiquement abélienne quand* $\forall x, y \in M$ $[\sigma_n(x), y]_{n\to\infty} \to 0$ *fortement. On dit que* M *est asymptotiquement abélienne quand une telle suite existe.*

Il serait inintéressant de remplacer dans cette définition la topologie forte par la topologie normique.

Cela impliquerait la commutativité de M (4).

THÉORÈME 2. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann,* $(\sigma_n)_{n\in N}$ *une suite d'automorphismes de* M, A *une sous-algèbre involutive faiblement dense dans* M *telles que*

$$[\sigma_n(x), y] \to 0 \quad \textit{fortement}\ \forall x, y\in A.$$

Alors, si il existe sur M *un état* ω *normal fidèle invariant par* σ_n *pour tout* $n\in N$, *la suite* $(\sigma_n)_{n\in N}$ *est asymptotiquement abélienne.*

La démonstration résulte facilement du lemme suivant.

LEMME 3. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann dans l'espace de Hilbert* $\mathscr{H}$, ω *un état normal fidèle sur* M *défini par un vecteur* $\Omega\in\mathscr{H}$, *et* A *une sous algèbre involutive faiblement dense dans* M.

Soient X, Y $\in M_1$, *la boule unité de* M, *et* $\varepsilon > 0$. *Alors il existe* $x, y \in A_1$ *tels que pour tout automorphisme* α *de* M *préservant* ω *on ait*

$$\|[\alpha(X), Y]\Omega\| \leqq \|[\alpha(x), y]\Omega\|+\varepsilon. \tag{1}$$

Démonstration. — Comme ω est fidèle, le vecteur Ω est séparateur pour M donc totalisateur pour M'. Soient donc $x', y' \in M'$ tels que

$$\|X\Omega-x'\Omega\|\leqq\frac{\varepsilon}{8}, \tag{2}$$

$$\|Y\Omega-y'\Omega\|\leqq\frac{\varepsilon}{8}, \tag{3}$$

Posons

$$K = \operatorname{Sup}\{\|x'\|, \|y'\|, 1\}.$$

Soient alors $x, y \in A_1$ tels que

(4) $$\|X\Omega - x\Omega\| \leqq \frac{\varepsilon}{8K},$$

(5) $$\|Y\Omega - y\Omega\| \leqq \frac{\varepsilon}{8K}.$$

(On applique le théorème de densité de Kaplansky.)

On a

(6) $$[\alpha(X), Y] = [\alpha(x), y] + \{\alpha(X)Y - \alpha(x)y\} - \{Y\alpha(X) - y\alpha(x)\}.$$

En utilisant

(7) $$\|\alpha(T)\Omega\| = \|T\Omega\|, \qquad \forall T \in M$$

(par hypothèse ω est invariant), on obtient :

(8) $$\begin{aligned}\|(\alpha(X)Y - \alpha(x)y)\Omega\| &\leqq \|(\alpha(X) - \alpha(x))Y\Omega\| + \|\alpha(x)(Y-y)\Omega\| \\ &\leqq \|\alpha(X-x)(Y-y')\Omega\| + \|y'\alpha(X-x)\Omega\| + \frac{\varepsilon}{8} \\ &\leqq 2\frac{\varepsilon}{8} + K(8K)^{-1}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{1}{2}\varepsilon.\end{aligned}$$

En remplaçant α par α^{-1} on obtient de la même façon

(9) $$\|(\alpha^{-1}(Y)X - \alpha^{-1}(y)x)\Omega\| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Donc en appliquant (7), on a

(10) $$\|(Y\alpha(X) - y\alpha(x))\Omega\| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Combinant les équations (6), (8) et (10) on obtient (1).

Q.E.D

THÉORÈME 4. — *Soient* N *un facteur*, φ *un état normal fidèle sur* N *et* $M = \bigotimes_{\nu \in \mathbf{Z}} (N, \varphi)_\nu$ *le produit tensoriel d'une infinité de couples identiques à* (N, φ). *Alors* M *est un facteur asymptotiquement abélien.*

Démonstration. — On suppose que N agit dans l'espace de Hilbert $\mathscr{K}$ et que l'état φ correspond à un vecteur totalisateur et séparateur $\Phi \in \mathscr{K}$. Soient

$$\mathscr{H} = \bigotimes_{n \in \mathbf{Z}} (\mathscr{K}_n, \Omega_n), \qquad M = \bigotimes_{n \in \mathbf{Z}} (M_n, \Omega_n), \qquad \Omega = \bigotimes_{n \in \mathbf{Z}} \Omega_n,$$

où $\mathscr{K}_n = \mathscr{K}$, $\Omega_n = \Phi$ et $M_n = N$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Soit U l'unitaire dans $\mathscr{H}$ correspondant au shift. On a $U\Omega = \Omega$ et pour tous $n \in \mathbf{N}$, $x_j \in N$, $j = -n, \ldots, n$:

(11) $$U(\bigotimes_{k<-n} 1) \otimes \left(\bigotimes_{k=-n}^{k=n} x_k\right) \otimes (\bigotimes_{k>n} 1) = (\bigotimes_{k<-n-1} 1) \otimes \left(\bigotimes_{k=-n-1}^{k=n-1} x_k\right) \otimes (\bigotimes_{k \geqq n} 1),$$

ce qui montre que les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites par M, $\sigma_n = \mathrm{A}d\,\mathrm{U}^n$, en prenant pour A la sous-algèbre involutive engendrée linéairement par les opérateurs qui apparaissent dans l'égalité (11).

Q.E.D.

En particulier les facteurs R_x, $0 < x < 1$, de Powers et R_∞ [*voir* [1]] sont asymptotiquement abéliens.

PROBLÈMES :

(1) Soit $(\sigma_n)_{n \in \mathbf{N}}$, une suite asymptotiquement abélienne sur le facteur M, avec $\sigma_n = \alpha^n$ pour un automorphisme α de M. Existe-t-il sur M un état normal invariant ?

(2) Existe-t-il un facteur de type III_0 asymptotiquement abélien ?

(*) Séance du 27 mai 1974.

(1) Chargé de Recherche au C. N. R. S.

(2) Department of Mathematics, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada.

(3) H. Araki et E. J. Woods, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto*, 4, 1968, p. 51-130.

(4) M. S. Glaser, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 178, 1973, p. 41-56.

(5) S. Sakai, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, série A, 4, 1968-1969, p. 299-307.

(6) S. Sakai, *Ergebnisse der Mathematik und iher grenzgebiete*, 60.

(7) P. Willig, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 24, 1970, p. 204-205.

Centre de Physique théorique,
31, *chemin Joseph-Aiguier,*
13274 *Marseille.*