ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Un nouvel invariant pour les algèbres de von Neumann.* Note (*) de M. **Alain Connes**, présentée par M. Gaston Julia.

A toute algèbre de von Neumann $\mathbf{M}$ de genre dénombrable, nous associons un invariant $S(\mathbf{M})$, sous-ensemble fermé de $\mathbf{R}_+$, défini comme intersection des spectres des opérateurs modulaires associés par la théorie de Tomita aux états normaux et fidèles sur $\mathbf{M}$.

Si $\mathbf{M}$ est semi-finie, $S(\mathbf{M}) \subset \{0, 1\}$.

Si $\mathbf{M}_\lambda$ désigne les facteurs étudiés par Powers, avec $0 < \lambda < 1/2$, nous montrons que $S(\mathbf{M}_\lambda) = \{u^n, n \in \mathbf{Z}\}$, $u = (1-2\lambda)/(1+2\lambda)$, ce qui donne une nouvelle démonstration du non-isomorphisme des $\mathbf{M}_\lambda$.

$\mathbf{M}$ désigne une algèbre de von Neumann dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, $\alpha$ un vecteur totalisateur et séparateur pour $\mathbf{M}$; $\mathbf{M}'$ le commutant de $\mathbf{M}$.

L'opérateur qui à $x\alpha$, où $x \in \mathbf{M}$ associe $x^*\alpha$ (resp. qui à $y\alpha$, $y \in \mathbf{M}'$ associe $y^*\alpha$) est préfermé ([3]); nous notons $S_\alpha$ (resp. $F_\alpha$) sa fermeture, $S_\alpha = J_\alpha \Delta_\alpha^{1/2}$ la décomposition de $S_\alpha$ étudiée dans ([3]), $\Delta_\alpha = F_\alpha S_\alpha$ est un opérateur positif.

Soit $\varphi$ un état normal et fidèle sur $\mathbf{M}$, soit $\mathfrak{H}_\varphi$, $\Pi_\varphi$, $\xi_\varphi$ la construction de Gelfand-Segal relative à $\varphi$; nous notons $\Delta_\varphi$ l'opérateur modulaire relatif au triplet $\mathfrak{H}_\varphi$, $\Pi_\varphi(\mathbf{M})$, $\xi_\varphi$.

Soit $\mathbf{M}$ une algèbre de von Neumann de genre dénombrable, nous posons $S(\mathbf{M}) = \bigcap$ Spectre $\Delta_\varphi$, $\varphi$ état normal et fidèle. $S(\mathbf{M})$ est un fermé de $\mathbf{R}_+$, et $t \neq 0$, $t \in S(\mathbf{M})$ entraîne $t^{-1} \in S(\mathbf{M})$, car $J_\varphi \Delta_\varphi J_\varphi = \Delta_\varphi^{-1}$; de plus, $S(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2) = S(\mathbf{M}_1) \cup S(\mathbf{M}_2)$, où $\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2$ désigne un produit d'algèbres de von Neumann.

Théorème 1. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une algèbre de von Neumann opérant dans* $\mathfrak{H}$, *si l'ensemble* $\mathfrak{G}$ *des vecteurs totalisateurs et séparateurs de norme un est non vide, l'ensemble* $S(\mathbf{M})$ *est l'ensemble des* $t \geq 0$, *tels que pour tout* $\varepsilon > 0$, *et tout* $\alpha \in \mathfrak{G}$, *il existe* $x \in \mathbf{M}$, $y \in \mathbf{M}'$ *tels que* $\| x\alpha \| = 1$, $\| t^{1/2} x\alpha - y\alpha \| < \varepsilon$, $\| x^*\alpha - t^{1/2} y^*\alpha \| < \varepsilon$.

Il résulte des lemmes suivants :

Lemme 2. — *Soit* $\varphi$ *normal fidèle sur* $\mathbf{M}$, *il existe* $\alpha \in \mathfrak{G}$, *et* U *isométrie de* $\mathfrak{H}_\varphi$ *sur* $\mathfrak{H}$ *tels que* $U\xi_\varphi = \alpha$, $U\Delta_\varphi U^{-1} = \Delta_\alpha$.

Comme $\mathfrak{G}$ est non vide, l'isomorphisme $\Pi_\varphi$ est spatial ([1]), ainsi $\Pi_\varphi(x) = U^{-1} x U$, posons $\alpha = U\xi_\varphi$; on vérifie que $US_\varphi U^{-1}$ est la fermeture de l'opérateur

$$\{\beta, U^{-1}\beta = \Pi_\varphi(x)\xi_\varphi \text{ pour un } x \in \mathbf{M}, US_\varphi U^{-1}\beta = U\Pi_\varphi(x^*)\xi_\varphi\},$$

d'où $S_\alpha = US_\varphi U^{-1}$ et $\Delta_\alpha = U\Delta_\varphi U^{-1}$.

LEMME 3. — *Soit* $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathfrak{G}$ :

(*a*) *Distance* ($t^{1/2}$, Spectre $\Delta_\alpha^{1/2}$) $< \varepsilon$ *si et seulement si il existe* $x \in \mathbf{M}$,

$$\| x\alpha \| = 1, \qquad \left\| \left(\Delta_\alpha^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) x\alpha \right\| < \varepsilon;$$

(*b*) $x \in \mathbf{M}$, $\| (\Delta_\alpha^{1/2} - t^{1/2})\, x\alpha \| < \varepsilon$ *entraîne l'existence de* $y \in \mathbf{M}'$ *tel que*

$$\left\| t^{\frac{1}{2}} x\alpha - y\alpha \right\| < \varepsilon, \qquad \left\| x^* \alpha - t^{\frac{1}{2}} y^* \alpha \right\| < \varepsilon;$$

(*c*) $x \in \mathbf{M}$, $y \in \mathbf{M}'$, $\| t^{1/2} x\alpha - y\alpha \| < \varepsilon$, $\| x^* \alpha - t^{1/2} y^* \alpha \| < \varepsilon$ *entraîne*

$$\left\| \left(\Delta_\alpha^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) x\alpha \right\| < 2\,\varepsilon.$$

(*a*) Résulte de la densité de $\mathbf{M}\alpha$ dans le domaine de $\Delta_\alpha^{1/2}$.

(*b*) Soit $y = J_\alpha x^* J_\alpha$; on a $y \in \mathbf{M}'$, $y\alpha = \Delta^{1/2} x\alpha$; de plus,

$$\left\| x^* \alpha - t^{\frac{1}{2}} y^* \alpha \right\| = \left\| J_\alpha \left(x^* \alpha - t^{\frac{1}{2}} y^* \alpha\right) \right\| \quad \text{et} \quad J_\alpha y^* \alpha = x\alpha.$$

(*c*) Soit $\beta = x\alpha$, $\gamma = \Delta_\alpha^{-1/2} y\alpha$; $\gamma$ et $\beta$ sont dans le domaine de $\Delta_\alpha^{1/2}$ et $\| t^{1/2} \beta - \Delta_\alpha^{1/2} \gamma \| < \varepsilon$, $\| \Delta_\alpha^{1/2} \beta - t^{1/2} \gamma \| < \varepsilon$, soit, comme $\Delta_\alpha^{1/2} (t^{1/2} + \Delta_\alpha^{1/2})^{-1}$ et $t^{1/2} (t^{1/2} + \Delta_\alpha^{1/2})^{-1}$ sont des contractions

$$\left\| t\left(t^{\frac{1}{2}} + \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \beta - t^{\frac{1}{2}} \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}} \left(t^{\frac{1}{2}} + \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \gamma \right\| < \varepsilon,$$

$$\left\| \Delta_\alpha \left(t^{\frac{1}{2}} + \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \beta - t^{\frac{1}{2}} \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}} \left(t^{\frac{1}{2}} + \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \gamma \right\| < \varepsilon.$$

La conclusion résulte de $(\Delta_\alpha^{1/2} - t^{1/2}) = (\Delta_\alpha - t)\,(\Delta_\alpha^{1/2} + t^{1/2})^{-1}$.

Dans la suite, $\mathfrak{M}$ désigne l'algèbre des matrices d'ordre 2, $\mathbf{H}$ l'espace de Hilbert obtenu en posant

$$(\alpha, \beta) = \text{Trace}\ \beta^* \alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \in \mathfrak{M}, \quad \beta \in \mathfrak{M}.$$

On pose

$$\eta = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \qquad \text{où} \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}; \quad \text{on a } \| \eta \| = 1.$$

$\mathfrak{H}$ désigne l'espace de Hilbert produit tensoriel d'une infinité dénombrable de couples $(\mathbf{H}, \eta)_n$, $n \in \mathbf{N}$.

L'on note $\Pi_n$, (resp. $\Pi'_n$) la représentation (resp. antireprésentation) de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{H}$ qui à $x$ associe $\Pi_n(x)$ [resp. $\Pi'_n(x)$] tel que

$$\Pi_n(x)\,(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_{n-1} \otimes \alpha_n \otimes \alpha_{n+1} \otimes \ldots) = \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_{n-1} \otimes x\alpha_n \otimes \alpha_{n+1} \otimes \ldots$$

(resp. $\alpha_n x$ au lieu de $x\alpha_n$).

$\mathbf{M}_\lambda$ désigne l'algèbre de von Neumann engendrée par les $\Pi_n(\mathfrak{M})$.

THÉORÈME 4. — *(a) Si* $\mathbf{M}$ *est de genre dénombrable, semi-finie, alors* $S(\mathbf{M}) \subset \{0, 1\}$.

*(b)* $S(\mathbf{M}_\lambda) = \{u^n, n \in \mathbf{Z}\}$, $u = (1 - 2\lambda)/(1 + 2\lambda)$.

*(a)* Soit $\tau$ une trace normale fidèle semie finie sur $\mathbf{M}$, $\mathfrak{H}_\tau$ l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt, $\Pi$ (resp. $\Pi'$) la représentation (resp. anti-représentation) de $\mathbf{M}$ dans $\mathfrak{H}_\tau$ par multiplication à gauche (resp. à droite).

Soit $h \in \mathfrak{H}_\tau$ positif, non singulier, $\Delta_h$ l'opérateur modulaire relatif à $(\mathfrak{H}_\tau, \Pi(\mathbf{M}), h)$.

LEMME 5. — *Soit* $\nu \in \mathbf{R}$, *alors* $\Delta_h^{i\nu} = \Pi(h^{2i\nu})\,\Pi'(h^{-2i\nu})$.

D'après ([3]), le groupe modulaire $\sigma_\nu$ est

$$\sigma_\nu(x) = h^{2i\nu}\, x\, h^{-2i\nu}, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_h^{i\nu}\, xh = h^{2i\nu}\, xhh^{-2i\nu}.$$

Comme $\Pi(\mathbf{M})$ et $\Pi'(\mathbf{M})$ commutent l'on a Spectre $\Delta_h^{1/2}$ inclus dans (Spectre $h$).(Spectre $h^{-1}$).

L'assertion *(a)* résulte de l'existence de $h_1$ (resp. $h_2$) positif non singulier, élément de $\mathfrak{H}_\tau$ dont le spectre ne contient que des $(1/2)^k$, $k \in \mathbf{N}$ [resp. des $(1/3)^k$, $k \in \mathbf{N}$].

*(b)* Soit $\delta$ l'opérateur modulaire relatif au triplet $(\mathrm{H}, \mathfrak{N}, \eta)$ ; soit

$$z = \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

on a $\| z\eta \| = 1$, $u^{1/2} z\eta = \eta z$ et $u^{1/2}\eta z^* = z^*\eta$ ; d'après les lemmes 3, 5, Spectre $\delta = \{u, 1, u^{-1}\}$.

LEMME 6. — *Le vecteur* $\alpha_0 = \eta \otimes \eta \otimes \ldots \otimes \eta \otimes \ldots$ *est séparateur et totalisateur pour* $\mathbf{M}_\lambda$ *dans* $\mathfrak{H}$, Spectre $\Delta_{\alpha_0} = \{u^n, n \in \mathbf{Z}\}$.

L'espace vectoriel E engendré par les vecteurs de la forme

$$x_1\eta \otimes \ldots \otimes x_n\eta \otimes \eta \otimes \ldots \quad (\text{resp. } \eta y_1 \otimes \ldots \otimes \eta y_n \otimes \eta \otimes \ldots),$$

où $x_i \in \mathfrak{N}$ (resp. $y_j \in \mathfrak{N}$) est dense dans $\mathfrak{H}$.

$S_{\alpha_0}$ (resp. $F_{\alpha_0}$) est une extension de l'opérateur qui à l'élément ci-dessus de E associe $x_1^*\eta \otimes \ldots \otimes x_n^*\eta \otimes \eta \otimes \ldots$ (resp. $\eta y_j^*$) ; ainsi $\Delta_{\alpha_0} = F_{\alpha_0} S_{\alpha_0}$ est une extension de l'opérateur produit tensoriel algébrique de $\delta$, noté $\otimes\,\delta$, qui a un sens car $\delta(\eta) = \eta$.

Comme $(1 + \Delta_{\alpha_0})\,\mathrm{E} = \mathrm{E}$ est dense dans $\mathfrak{H}$, $\Delta_{\alpha_0}$ est la fermeture de $\otimes\,\delta$, d'où la conclusion.

LEMME 7. — *Soit* $k \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathfrak{H}$, $\| \alpha \| = 1$ ; *il existe* $x \in \mathbf{M}_\lambda$, $y \in \mathbf{M}'_\lambda$ *tels que*

$$\| x\alpha \| > 1 - \varepsilon \quad \textit{et} \quad \left\| u^{\frac{k}{2}} x\alpha - y\alpha \right\| < \varepsilon, \qquad \left\| x^*\alpha - u^{\frac{k}{2}} y^*\alpha \right\| < \varepsilon.$$

Soit $E_n$ le sous-espace de $\mathfrak{H}$ engendré par les vecteurs

$$\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_n \otimes \eta \otimes \ldots, \quad \text{où} \quad \alpha_i \in H \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

comme $E = \bigcup_1^\infty E_n$ il existe $n \in N$ et $\alpha' \in E_n$ tels que

$$\| \alpha' \| = 1 \quad \text{et} \quad \| \alpha' - \alpha \| < \varepsilon \, 2^{-\frac{k}{2}} \left( u^{\frac{k}{2}} + 1 \right)^{-1}.$$

Soit $x = \Pi_{n+1}(z) \ldots \Pi_{n+k}(z)$, $y = \Pi'_{n+1}(z) \ldots \Pi'_{n+k}(z)$; on a

$$u^{\frac{k}{2}} x \alpha' = y \alpha', \quad x^* \alpha' = u^{\frac{k}{2}} y^* \alpha', \quad \text{donc} \quad \| x \alpha \| > 1 - \varepsilon,$$

$$\left\| u^{\frac{k}{2}} x \alpha - y \alpha \right\| < \varepsilon, \quad \left\| u^{\frac{k}{2}} y^* \alpha - x^* \alpha \right\| < \varepsilon,$$

car

$$| x | \leq | z |^k \quad \text{et} \quad | z | = \left( \frac{1}{2} + \lambda \right)^{-\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{1}{2}}.$$

(*) Séance du 3 novembre 1971.

([1]) J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 2e édition, 1969.

([2]) J. T. Schwartz, *Recent progress in the structure theory of factors* (Proceedings of a Symposium, Ed. by C. O. Wilde, New York, Academic Press, 1970).

([3]) M. Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Springer, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, no 128.

1, *avenue Mathilde,*
95-*Saint-Gratien,*
*Val-d'Oise.*