

## Un modèle efficace de l'espace-temps pour géométriser le modèle standard

Alain Connes  
Cern 2004

- Ok, donc, je suis mathématicien et vous savez, ce que je veux expliquer, bien sûr, on m'a posé cette question : "qu'est-ce qui est fondamental en mathématiques ?... etc." et je veux dire que d'une certaine manière, vous savez, la façon dont je vois les choses, parce que je suis devant un public composé principalement de physiciens, c'est que je vais essayer de mettre en évidence d'une manière ou d'une autre les différences d'approche entre les mathématiques et la physique.

Et je veux dire que la première chose en mathématiques, vous savez, si vous y réfléchissez, le point principal des mathématiques, c'est qu'elles sont vraiment une usine de fabrication de nouveaux concepts. Donc d'une certaine manière, si vous voulez, la première chose fondamentale est que par le processus de distillation dans l'alambic de l'esprit humain, ce que nous produisons, ce sont des concepts qui sont a priori extrêmement simples parce qu'ils sont comme des particules élémentaires de pensées. Donc par exemple, si vous pensez à un nombre comme le nombre 3, qu'est-ce que le nombre 3 ? Je veux dire que le nombre 3 est une qualité qui est commune à tous ces ensembles qui deviennent vides après que vous en ayez retiré un élément, un autre élément et un autre élément, d'accord ? C'est le nombre 3. Donc, euh, plus encore, je veux dire que je suis entièrement d'accord avec ce que Groot disait à propos de la communication avec d'autres civilisations et en fait, il y avait un mathématicien qui a écrit un livre entier qui s'appelle Lincos<sup>1</sup>. C'est un langage qui permet de communiquer simplement en disant "il y a un signal ou il n'y a pas de signal". Et à partir de là, vous pouvez communiquer des concepts très élémentaires comme les nombres, l'addition, la multiplication, etc. Et puis vous obtenez ce que vous souhaitez.

Alors, si vous voulez, la première chose que nous fabriquons en quelque sorte, je veux dire les particules élémentaires de la pensée, ce sont ces nouveaux concepts. Et la deuxième chose, c'est que la façon dont nous devons procéder, si vous voulez, dans nos investigations, c'est une façon de procéder en fait assez différente de celle des physiciens, dans le sens où nous essayons de comprendre les choses d'en haut. Je vais vous donner des exemples très rapidement. Mais je voulais prendre deux concepts qui ne sont pas triviaux, qui sont au centre des mathématiques et qui sont en constante évolution, juste pour préciser quelque chose, pour préciser les sujets que vous connaissez et ces deux concepts sont les suivants : (*écrivaint* ESPACE et SYMÉTRIE *au tableau*) le premier concept est le concept d'ESPACE et le deuxième concept est le concept de SYMÉTRIE.

Bon, alors, ces éléments occupent vraiment aussi une place centrale en mathématiques ainsi qu'en physique. Mais je veux dire que la façon dont un mathématicien procède est assez différente de l'approche méthodologique, si vous voulez, d'un physicien. Donc, typiquement, ce qui s'est passé, je veux dire, pour un espace, je vais juste mettre deux transparents. Pour l'espace, vous savez, je

---

Dans le cadre du Symposium de Richard Dawkins, Gerard't Hooft et Alain Connes au Cern en 2004.

Référence youtube de la conférence : Alain Connes : "Un modèle efficace de l'espace-temps pour géométriser le Modèle Standard".

<https://www.youtube.com/embed/vBWPxGsXHD0>.

Transcription en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X et traduction : Denise Vella-Chemla, assistée des outils google, corrigé autant que possible en juillet 2025.

<sup>1</sup>abréviation pour lingua cosmica.

veux dire, c'étaient, bien sûr, les architectes et les peintres du Moyen Âge etc, qui utilisaient la perspective ; c'est une chose très bien comprise. Je ne sais pas comment installer cet appareil, ça n'a pas d'importance, je veux dire, vous connaissez l'image, ok ? (*puis projetant (sic !) la Cène*)

Les mathématiciens, et en particulier Desargues, ont essayé de mettre ces règles empiriques de perspective et autres sur une bonne base. Ils ont donc essayé de concevoir un bon modèle mathématique pour cela et qu'ont-ils conçu ? Ils ont conçu ce qu'on appelle la géométrie projective. La géométrie projective, qu'est-ce que c'est ? Je veux dire que c'est une géométrie dans laquelle les axiomes, si vous voulez les conditions qui seront remplies par la géométrie, sont incroyablement simples. Qu'est-ce que c'est ? Il y aura des points et des lignes et il y a juste 4 axiomes :

- deux points déterminent une ligne ;
- une ligne a au moins trois points ;
- deux lignes qui proviennent de deux points qui sont sur deux lignes coplanaires (c'est à dire deux lignes qui se rencontrent) se rencontrent en un point ;
- et l'axiome final est que la géométrie (le quatrième axiome est le dernier) est que la géométrie est engendrée par un nombre fini de points.

En d'autres termes, il y a un nombre fini de points, ce qui signifie que si vous répétez l'opération consistant à prendre des lignes engendrées par deux points, vous obtenez tous les points. C'est tout. Les mathématiciens ont complètement classé ces géométries. Ils les ont toutes trouvées. Et ce qu'ils ont trouvé, c'est qu'il y a un espace projectif sur ce qu'on appelle un corps, d'accord. Qu'est-ce qu'un corps ? Vous connaissez le corps des nombres rationnels, vous connaissez le corps des nombres réels, mais si vous faites de la géométrie projective avec un corps de nombres réels, vous ratez tout. Je veux dire que vous diriez que vous savez que nous vivons dans un espace réel qui est en trois dimensions, donc vous ratez tout parce que nous faisons de la géométrie plane ; avec des nombres complexes au lieu de nombres réels, tous les cercles passent par deux points qui ont été trouvés par Poncelet, qui sont à l'infini et qui ont des coordonnées complexes qui sont appelées les points cycliques. Et alors tout devient miraculeusement plus simple, et meilleur, d'accord ? C'est donc là que les mathématiciens diffèrent des physiciens : ils classent tous les cas, d'accord, c'est une différence très très importante.

Maintenant le second point est que quand ils ont classifié tous les cas, ils ont classifié tous les exemples de cas qui sont dits locaux, qui sont localement compacts. Qu'ont-ils trouvé ? Ils ont trouvé le corps des nombres réels, celui des nombres complexes, mais ils en ont trouvé d'autres : ils ont trouvé le corps des nombres  $p$ -adiques, ils ont trouvé les corps de fonctions sur un corps fini et il y a les corps archimédiens. La liste est complète, vous pouvez la regarder, et vous savez qu'il n'y en a pas d'autres. Donc si vous voulez, la différence principale entre les deux approches (des mathématiciens et des physiciens) est qu'en mathématiques, on dessine la totalité de la scène, vous affichez en quelque sorte le paysage du monde. Et ensuite, vous pouvez vous y promener. Et en particulier, ce qu'ils ont trouvé dans le cas de la géométrie projective, c'est que le corps  $K$  n'a pas besoin d'être commutatif.

Donc si vous vous limitez en quelque sorte au cas commutatif vous serez gêné. Bon maintenant sur cette image vous pouvez déjà voir cette dualité entre l'ange de la géométrie et le diable de l'algèbre.

Qu'est-ce que la dualité ?

La dualité en question, c'est la chose suivante : où est l'ange de la géométrie ? Eh bien vous savez, vous dessinez des images, c'est joli, vous voyez, en un éclair, vous voyez l'image entière etc., et en un éclair, par exemple vous pouvez apprécier un théorème. Alors laissez-moi vous présenter un théorème qui est bien connu qui est dû à Morley qui est le seul théorème sur les triangles qui n'était pas connu des Grecs, ok. C'est un beau théorème, je l'ai montré à mon père, il l'a compris immédiatement : vous prenez n'importe quel triangle, ok, n'importe quel triangle le triangle ABC est complètement arbitraire vous en trissectez les angles, vous décomposez chaque angle en trois portions égales, vous trouvez les intersections des trissecteurs, et vous obtenez un petit triangle au milieu ; ce triangle est toujours équilatéral. C'est un beau résultat, vous savez, qui avait été démontré par Morley. Maintenant, essayez de le démontrer, cela vous coûtera du temps, vous aurez des difficultés, ok. Donc l'ange de la géométrie vous dit qu'il y a quelque chose de très beau, maintenant, prouvez-le. Et disons que c'est un fait connu qu'il n'y a pas de belle preuve géométrique de cela, mais voici l'argument algébrique qui vient du diable de l'algèbre et qui est équivalent, je veux dire, qui en fait est un résultat plus fort que celui-ci.

Quel est-ce résultat ? Ce résultat provient du fait que maintenant, vous pensez au groupe des transformations affines de la droite :  $x$  a pour image  $ax + b$ , je veux dire ce n'est pas une chose très compliquée, ok ? Maintenant ces transformations ont un point fixe, elles ont un  $x$  qui est fixé par la transformation, ok, c'est ce que j'appelle un point fixe. Et maintenant le théorème que vous pouvez donner au lycée en fait il a été donné à l'examen de mathématiques après que j'ai trouvé la preuve, il a été donné au Capes ok, avec quelques éléments fournis, donc quel est l'énoncé ? C'est que vous prenez ce groupe de transformations affines, et vous écrivez l'équivalence entre deux conditions, la condition a) et la condition b). La condition a) est que  $f^3g^3h^3$  est égal à 1 où  $f, g$  et  $h$  sont des éléments du groupe. La condition b) est qu'il existe  $j$  qui est, si vous voulez, la partie amplitude du produit  $fgh$  dont le cube est égal à 1 qui est nul et de ce fait, cela dit que si vous prenez  $\alpha + j\beta + j^2\gamma$  est égal à zéro, vous êtes toujours sur la droite et donc,  $\alpha$  est un point fixe de  $fg$ ,  $\beta$  est un point fixe de  $gh$  et  $\gamma$  est un point fixe de  $hf$ . Maintenant ça, vous pouvez le vérifier juste par calcul matriciel, c'est très très simple. Maintenant que faites-vous ? Maintenant, vous prenez la droite, non pas la droite réelle, non, vous prenez la droite complexe, et vous prenez  $f$  et  $g$  et  $h$  comme étant les rotations autour du point  $A$  d'angle  $2a$ , autour du point  $B$  d'angle  $2b$  et autour du point  $C$  d'angle  $2c$  ok ? Et vous le faites, bon, vous faites le calcul, vous trouvez que  $f$  est égal à 1 : c'est juste parce que la somme des angles d'un triangle fait  $\pi$ , c'est exactement la même chose, donc vous en déduisez que vous avez la deuxième condition, qui est  $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$  mais le point fixe de  $fg$  est exactement l'intersection des deux tri-secteurs, idem pour le point fixe de  $gh$ , idem pour le point fixe de  $hf$ . Et cette condition  $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$  est une condition bien connue pour obtenir un triangle équilatéral, qu'on apprend au lycée en fait, ok ? Donc vous voyez, voilà l'ange de la géométrie ; voilà le diable de l'algèbre. Mais le diable a beaucoup de pouvoir, pourquoi ? Parce que ce théorème qui est de ce côté-là, maintenant il est vrai pour n'importe quel corps.<sup>2</sup>

Par exemple, le théorème est vrai pour le corps à quatre unités, il est vrai pour n'importe quel

---

<sup>2</sup>Note de la traductrice (Denise Vella-Chemla) : on pourra se reporter à cette application geogebra que j'ai écrite pour tester des cas d'application du théorème <https://www.geogebra.org/calculator/ucc58ncv>.

corps. Alors maintenant, l'image que vous avez ici, qu'a-t-elle fait ? Elle a déclenché un processus cérébral qui va des zones visuelles du cerveau aux zones linguistiques du cerveau et l'algèbre utilise les zones linguistiques. Et à partir de ces zones linguistiques, vous obtenez une assertion qui est purement linguistique, qui est une manipulation algébrique de symboles, etc. Mais maintenant, cela a un pouvoir énorme parce que maintenant cela ne s'applique pas seulement à votre image visuelle originale ; cela s'applique à une classe d'exemples beaucoup plus large, d'accord ? Chaque angle, ok, vous décomposez chaque angle en trois parties égales vous coupez les trois secteurs, vous obtenez un petit triangle au milieu ; ce triangle est toujours équilatéral. C'est un beau résultat, vous savez, qui a été trouvé par Morley. Maintenant, essayez de le prouver, vous aurez du mal, ok. Donc je veux dire que je vous ai montré l'ange de la géométrie, je vais vous montrer le diable de l'algèbre, ok. Donc l'ange de la géométrie vous dit qu'il y a quelque chose de très beau, maintenant, prouvez-le, ok. Et c'était, je veux dire en fait, je veux dire que c'est un fait connu qu'il n'y a pas de belle preuve géométrique de cela, mais voici l'énoncé algébrique qui vient du diable de l'algèbre et qui est équivalent, je veux dire, qui est en fait beaucoup plus fort que cela.

La deuxième leçon que nous pouvons tirer de cette axiomatique, qui est cruciale en mathématiques, c'est qu'il y a des questions qui, pour les physiciens et pour beaucoup de gens, peuvent paraître complètement ésotériques. La question typique était que, lorsque vous regardez les axiomes d'Euclide, il y en a beaucoup plus que les axiomes que je vous ai montrés pour la géométrie projective, il y a beaucoup, beaucoup d'axiomes.

Mais maintenant, si vous regardez ces axiomes, vous trouvez qu'il y en a un qui est dérangent, vous devez comprendre que lorsque vous l'aurez enlevé, la liste ne sera pas beaucoup plus courte parce que c'est une liste très longue, ok. Donc il y avait cet axiome, si vous voulez, qui disait justement que la somme des angles d'un triangle est égale à  $\pi$  c'était un des axiomes d'Euclide. On l'appelle l'axiome de l'unique parallèle mais c'est vraiment un axiome qui dit que la somme des angles d'un triangle est égale à  $\pi$ .

Maintenant dans le modèle de Klein, donc les mathématiciens ont beaucoup réfléchi, ils ont essayé de prouver cet axiome. Legendre, pendant une longue partie de sa vie, a essayé de prouver cet axiome mais en essayant de prouver cet axiome, ils ont découvert qu'il y avait un nouveau monde, qui leur était inconnu, qu'ils ont découvert parce qu'il était cohérent. Donc ce qu'ils ont trouvé c'est que si vous laissez tomber cet axiome, que la somme des angles d'un triangle est égale à  $\pi$ , c'est toujours cohérent, d'accord, vous trouvez un monde cohérent, et finalement vous vous rendez compte que pour être dans un tel monde, c'est simple, les points de la géométrie ont juste à être maintenant les points qui sont à l'intérieur d'une ellipse ; vous n'autorisez pas tous les points, vous autorisez seulement les points qui sont à l'intérieur d'une ellipse. Les lignes droites sont toujours les lignes droites habituelles mais maintenant vous voyez qu'en dehors d'une droite donnée, appelons-la la droite  $D$ , vous pouvez faire passer plusieurs parallèles parce que ces deux lignes ne se rencontrent pas à l'intérieur de l'ellipse, d'accord. Le problème est que ce n'est pas suffisant pour définir la géométrie, vous devez définir la distance entre les points qui est le logarithme du rapport croisé entre les quatre points comme  $A, B, a, b$ , d'accord. Et puis vous trouvez que tous les axiomes euclidiens sont vrais mais l'axiome de l'unique parallèle n'est pas vrai. Alors qu'est-ce que vous gagnez avec ça, vous dites "oh d'accord je ne peux pas supprimer cet axiome de cette liste". Pas du tout, ce n'est pas ce que vous gagnez : ce que vous gagnez, ce sont deux grandes ouvertures sur

l'idée de géométrie ; la première ouverture est l'ouverture de Galois, d'accord, qui était, je veux dire, l'idée des groupes de Lie, de Sophus Lie, qui est l'idée de symétrie, donc c'est la première grande ouverture dans laquelle ce que vous ferez, c'est de dire que cette géométrie non euclidienne est belle à cause de ses symétries, à cause du fait que vous voulez pouvoir transporter des corps rigides partout et ainsi de suite.

Mais en fait, cela donnait une ouverture beaucoup plus large, et cette ouverture beaucoup plus large est venue de Gauss et Riemann ; et ce qu'ils ont fait, c'est de modéliser la géométrie dans une situation que vous connaissez très bien sous le nom de  $g_{\mu\nu}ds$ , comme à la surface de la Terre, etc., mais je veux dire que le principal nouvel apport, le principal nouvel ingrédient ici, c'est qu'au lieu d'avoir à faire de la géométrie d'une manière complètement si vous voulez, en quelque sorte harmonieuse, dans laquelle vous pouvez déplacer des corps rigides et donc, maintenant ce que vous voulez, vous voulez avoir une variété de points qui a une dimension qui n'est pas fixe plus un élément de longueur, d'accord. Et l'élément de longueur est prescrit essentiellement arbitrairement ; si vous voulez, la longueur de l'élément de longueur est prescrite simplement comme une forme quadratique locale. Ce qui est très important, c'est que les notions habituelles continuent d'avoir du sens dans cette nouvelle géométrie, donc la notion de ligne droite continue d'avoir du sens et bien sûr, je veux dire, vous savez probablement tous que la principale raison pour laquelle cette géométrie a eu autant de succès, c'est que vous obtenez la loi de Newton dans un potentiel  $V$  donné lorsque, au lieu de faire que le temps passe, vous savez, comme dans l'espace-temps de Minkowski, ce que vous faites, c'est que le temps passe d'une manière différente, selon la hauteur à laquelle vous vous trouvez dans le potentiel newtonien. Et maintenant, si vous continuez, je veux dire qu'un peu de cela, je pense que cela a probablement une certaine utilité au CERN, mais je veux dire que typiquement, par exemple, lorsque les gens ont creusé le tunnel sous le canal, ils ont utilisé la correction qui est donnée par cela afin de se positionner avec le GPS, par rapport aux satellites. Je veux dire que cette correction n'est pas triviale ; le temps passe vraiment différemment, lorsque vous êtes à un endroit différent dans le potentiel newtonien, d'accord.

Maintenant, comme je l'ai dit, d'accord, cette théorie a eu un succès incroyable et elle a eu un succès incroyable en tant que modèle de relativité générale et je viens de vous rappeler ces choses que vous connaissez aussi assez bien.

Je suppose que vous savez ce qu'est le potentiel de courbure, les équations d'Einstein et ces équations sont vérifiées avec une précision incroyable dans l'histoire du pulsar binaire et ainsi de suite. Bon, il s'agit juste de rappeler cela rapidement, ok.

Donc maintenant, si vous voulez, la mentalité des mathématiciens est assez différente, elle est très très différente, dans le sens où au lieu d'essayer de résoudre un problème de physique spécifique, complètement spécifique, ce que nous faisons, c'est que nous essayons de regarder de manière harmonieuse les concepts généraux de la géométrie et ainsi de suite. Maintenant, il s'est avéré que l'idée habituelle de la géométrie qui est modélisée par cette géométrie riemannienne a récemment beaucoup évolué et elle a évolué de manière spectrale.

Donc ici, je vous montre un spectre et ce sur quoi je souhaite insister, c'est ce qui suit : il y a eu une découverte fondamentale, vous le savez tous, qui est due à Heisenberg et qui est que lorsque

vous essayez de modéliser, disons, dans le monde riemannien, dans l'idée de variétés, lorsque vous essayez de modéliser un système microscopique comme un atome qui est une interaction avec un rayonnement, d'accord, les seules données que vous avez sont spectrales, d'accord. Donc ce que vous avez, ce sont les spectres de la lumière émise ou de la lumière absorbée, etc. Maintenant, lorsque les gens essaient de modéliser cela et lorsque vous essayez d'appliquer le modèle classique, vous trouvez une loi qui n'est pas compatible avec les lois expérimentales qui est la loi de Ritz Rydberg. Maintenant, la loi de Ritz-Rydberg vous dit que les rayons spectraux se combinent, ils se combinent selon une certaine loi de combinaison, qui est appelée le principe de combinaison de Ritz-Rydberg et qui dit qu'une ligne qui est toujours étiquetée par deux indices comme  $i$  et  $j$ , l'état initial et final combinés avec  $j$ ,  $k$  vous donne la transition de ligne  $i, k$ .

Heisenberg a alors eu l'idée de transporter ce que l'on obtiendrait comme produit des coordonnées sur l'espace classique dans cette configuration à partir de la loi expérimentale. Et il a obtenu une nouvelle loi et cette loi est la loi de composition des matrices. C'est donc la loi des matrices et ce qu'il a immédiatement remarqué, bien sûr, c'est que cette loi n'est pas commutative et cela signifie que ce que vous avez, c'est que les coordonnées que vous utiliseriez normalement comme coordonnées sur un espace ne commutent plus, d'accord.

Donc les mathématiciens quand ils sont face à ça, ok, ils doivent prendre au sérieux ce message et ils doivent aussi prendre au sérieux le message de Desargues parce que la géométrie desarguienne, c'est la géométrie qui est venue de l'espace projectif : le corps qui était là n'était pas un corps commutatif. Donc en fait il fallait étendre tous nos concepts de géométrie, si vous voulez, à ces situations non commutatives dans lesquelles les coordonnées sur un espace, l'espace qu'on regarde, ne sont plus commutatives, ok.

D'accord, je veux juste le mentionner très brièvement, mais laissez moi vous donner un exemple d'une surprise qui est arrivée il y a très longtemps, en fait dans les années 70, donc la surprise qui est arrivée est la suivante, eh bien, nous parlons de surprise, mais la grande surprise était la suivante ; c'est que si vous prenez une algèbre de coordonnées sur un espace non commutatif, elle évolue avec le temps ; elle a une évolution temporelle donnée par Dieu qui ne vient que de sa non commutativité, qui ne vient que de la différence entre la gauche et la droite, d'accord. Donc je veux dire qu'il y a, si vous voulez, une application canonique de la droite réelle qui est le groupe à un paramètre des automorphismes, des classes d'automorphismes, ce qui signifie que cette algèbre si vous la regardez 10 minutes après qu'elle a tourné, d'accord, elle a une évolution temporelle complètement canonique, d'accord.

Donc c'était la première surprise. Ce qui était très important c'était d'étendre à ce cadre les idées riemanniennes, les idées de mesure des distances et ainsi de suite et je vais juste vous montrer le transparent je vais juste mettre ce transparent pour vous dire quelle est la différence et pour vous dire de quelle façon la mesure des distances diffère dans cette nouvelle géométrie de ce qu'elle est dans l'ancienne géométrie.

La différence est très simple à expliquer : vous savez qu'à la fin du XVIIIe siècle, les gens ont essayé d'unifier l'unité de longueur. Ils ont donc demandé à des gens comme Laplace et Lagrange "que peut on faire pour avoir une bonne unité de longueur ?". Donc la première réponse était "bien,

prenons la longueur d'un pendule qui bat pendant une seconde", d'accord. Mais si vous faites ça et que vous grimpez au sommet du Mont Blanc, vous savez, vous aurez une différence, donc ce n'est pas bon, d'accord. Et aussi, il faut définir la seconde, d'accord. Donc ils ont beaucoup réfléchi, ils ont beaucoup réfléchi et ensuite ce qu'ils ont pensé c'est "eh bien, prenons le plus grand objet disponible, d'accord, qui est la Terre, d'accord, sur lequel on peut mesurer, et prenons une toute petite partie de cet objet, 1/40 millionième de la circonférence de la Terre", d'accord, ils le définissent exactement, "et ensuite faisons un mètre, la géométrie se mesurera par le mètre, et déposons-le quelque part", d'accord, c'était au Pavillon de Breteuil à Paris et c'est l'unité de longueur. Mais pensez-y, vous savez, et ils y ont réfléchi pendant longtemps. Au bout d'un moment, ils se rendent compte que le compteur rétrécissait, qu'il y avait quelque chose qui n'allait pas, et puis si on veut mesurer quelque chose, il faut aller à Paris, comparer, ce n'est pas pratique, ok.

Donc en 1960, ils ont trouvé une nouvelle définition. Et la nouvelle définition est qu'il y a une certaine raie orange dans le krypton, d'accord, et que l'unité de longueur devrait être un multiple de cette longueur d'onde de la longueur d'onde de la raie orange dans le spectre du krypton. Maintenant... Ensuite, on a changé ça pour le césium, le krypton a été remplacé par le césium et bien sûr, on peut convertir la longueur en temps, en utilisant la vitesse de la lumière. Donc il n'y a pas de problème, d'accord. Maintenant, quel est l'avantage ? L'avantage est évident parce que si nous devons communiquer avec une autre civilisation, nous ne pourrions pas leur dire d'unifier nos unités de longueur en venant à Paris et en comparant leur unité au mètre, d'accord. Mais nous pourrions leur dire : "allez, je veux dire, regardez votre tableau périodique des éléments, prenez cet élément, prenez son spectre etc. et on y arriverait." Maintenant, ce qui se passe, c'est que dans la géométrie non commutative, qui est cette géométrie différente, ce qui se passe, c'est que précisément, l'unité de longueur est exactement de cette nature spectrale.

Et en fait, l'unité de longueur est exactement ce que les physiciens appellent le propagateur de fermion, c'est l'inverse de l'opérateur de Dirac. Et cette théorie s'applique dans un cadre beaucoup plus large que la géométrie riemannienne ordinaire ; elle contient la géométrie riemannienne, mais par exemple, l'action d'Einstein que j'ai présentée avant, je veux dire l'action de Hilbert-Einstein, vous savez, celle qui, lorsque vous différenciez par rapport à  $g_{\mu\nu}$ , vous donne l'équation d'Einstein. Cette équation, qu'est-ce que c'est ? Je veux dire, quelle est cette action ? C'est juste l'aire, l'aire bidimensionnelle d'un espace à quatre dimensions. Donc vous prenez un espace à quatre dimensions, d'accord, et au lieu d'écrire l'intégrale de  $ds^4$ , ce qui vous donnerait le volume à quatre dimensions, vous prenez quelque chose de bizarre, vous écrivez l'intégrale de  $ds$  au carré.

Maintenant, si vous connaissez l'action d'Einstein, vous savez que  $1/g$  a une dimension de un sur la longueur au carré. Donc en fait, vous mesurez exactement l'aire de cet espace, vous regardez une aire à deux dimensions.

Donc, la seule chose que je veux mentionner, c'est que lorsque vous adoptez ce point de vue, alors, d'accord, et je veux dire que cela n'est apparemment pas encore largement connu, mais je veux dire que lorsque vous adoptez ce point de vue, le lagrangien, qui est la partie du modèle standard de cette gravitation, acquiert une forme incroyablement simple : ce lagrangien qui est une combinaison des deux choses, tout d'abord, vous savez, lorsque vous regardez ce lagrangien, vous regardez les symétries ; les symétries contiennent un groupe de morphismes différent, qui vient de

la partie gravitation, mais il contient aussi un groupe de transformations de jauge de deuxième espèce qui viennent du modèle standard. Maintenant, si vous essayez d'observer un espace qui a comme groupe de symétries différents morphismes, ce que vous trouverez, c'est qu'il n'y a pas de variété qui fonctionne, et c'est l'idée de Kaluza-Klein, que cela ne fonctionne pas. Parce que si vous prenez un modèle de Kaluza-Klein, en fait, vous obtiendrez un groupe beaucoup plus grand, qui est toujours un groupe simple qui n'a pas de sous groupe normal comme les transformations de jauge par difféomorphismes.

Mais, il existe un espace non commutatif très joli et simple, qui fait le travail et la raison pour laquelle il fait le travail est que précisément, lorsque vous prenez un espace non commutatif, il a des morphismes qui sont relativement triviaux et qu'on dit intérieurs en mathématiques. Et comme ce n'est pas commutatif, son  $x$  tend vers l'inverse de  $u$ , voyez-vous, car  $u$  ne commute pas avec  $x$ . On ne peut pas déplacer  $u$  et obtenir  $x$ . C'est donc un automorphisme non trivial. Mais c'est un automorphisme intérieur, dit intérieur en mathématiques, et il correspond exactement aux symétries internes en physique.

Il s'avère que l'action qui combine l'action d'Einstein et l'action du modèle standard est obtenue par cet espace très simple, qui est le produit de l'espace-temps ordinaire par un espace fini. Lorsque l'on prend comme action le nombre de valeurs propres de l'élément de droite, on prend donc cet élément de droite et on compte le nombre de valeurs propres de cet élément qui sont supérieures à la longueur donnée ; on le développe et on trouve ceci. D'accord ? Ma conclusion est la suivante : Dirac avait proposé une stratégie qui consistait à modifier la mécanique quantique. Je propose une autre stratégie : modifier la géométrie. Il existe de nombreuses bonnes raisons mathématiques pour le faire. Cela a déjà eu un impact considérable en mathématiques, notamment en appliquant la géométrie à des espaces non commutatifs.

Il existe de nombreux exemples d'espaces non commutatifs dans lesquels cette nouvelle géométrie s'applique, permettant des calculs impossibles autrement. Ce que je propose, c'est une stratégie différente : modifier la géométrie pour la rendre quantique, ce qui est à peu près le cas ici. Une fois que c'est fait, on peut commencer à faire ce qu'on ferait normalement pour la gravité, mais simplement parce que l'espace sera légèrement plus complexe, Cette théorie gravitationnelle pure contiendra en fait la gravité ordinaire et les champs de matière, d'accord ? C'est donc une proposition telle que, par exemple, le boson de Higgs n'est pas du tout naturel. Il est calculé à partir d'un calcul gravitationnel et on obtient un doublet habituel de bosons de Higgs, un doublet complexe de bosons de Higgs. Et ce qui joue le rôle de métrique, si vous voulez, ce qui joue le rôle de métrique dans l'espace fini, c'est exactement la matrice de Yukawa du modèle standard. Elle contient donc à la fois, si vous voulez, les masses de Yukawa et la matrice de mélange de Kobayashi-Maskawa, et tout cela est incorporé dans la géométrie de l'espace fini. Je pense avoir été assez bref, mais je m'arrêterai là.

L'ANIMATEUR : Merci beaucoup. Malheureusement, je ne suis pas mathématicien, donc je ne peux pas vous poser de questions. Quelqu'un d'autre ? Oui, monsieur.

ALAIN CONNES : Non, non, en Angleterre, le kilo est en Angleterre. Ils pensent à le changer, bien sûr, je veux dire, le kilo lui même perd du poids, c'est bien connu.

L'AUDITEUR : J'ai une question plus sérieuse. Je veux dire, puisque la masse est générée vraisemblablement par le mécanisme de Higgs, je me demande si vous pouvez faire des prédictions particulières à partir de votre modèle...

ALAIN CONNES : pour dire ça, je veux dire que ce modèle, je veux dire que la formation de Higgs est un grand désert, auquel je ne crois pas bien sûr. Ok, ce modèle favorise un Higgs de 160 G, ouais exactement, et il donne ... (?) 5, ce qui n'est pas si mal. Et il donne un certain nombre de choses, vous savez, mais je veux dire, ce qu'il fait, c'est qu'il vous donne l'auto-couplage quartique du Higgs à un certain type d'unification, donc il favorise ... de cela. Maintenant, il s'avère que l'action qui combine l'action d'Einstein plus l'action du modèle standard est obtenue par cet espace très simple qui est le produit de l'espace-temps ordinaire par un espace fini quand on prend comme action juste le nombre de valeurs propres de l'élément de longueur, ok, donc vous prenez votre élément de longueur et vous comptez le nombre de valeurs propres de cet élément de longueur qui sont plus grandes que la longueur donnée ; vous le développez et vous trouvez ça ok ? Donc, je veux dire que ce sur quoi je veux conclure, c'est la chose suivante : Dirac avait proposé une stratégie qui était de changer la mécanique quantique ; je propose une autre stratégie : et celle-ci en tant que stratégie est de changer la géométrie. Et il y a plein de bonnes raisons du côté mathématique de faire ça, ça a déjà eu un impact assez important en mathématiques si vous voulez faire ça, en appliquant la géométrie à des espaces qui ne sont pas commutatifs.

Il y a de nombreux exemples de tels espaces qui ne sont pas du tout commutatifs dans lesquels cette nouvelle géométrie s'applique, dans lesquels on peut faire des calculs qu'on ne pourrait pas faire autrement. Mais ce que je propose, je propose cette stratégie différente qui consiste à changer la géométrie pour rendre la géométrie quantique et bien sûr, d'accord, c'est à peu près ce qui se passe dans ce cas là, et puis de dire qu'une fois que c'est comme ça, d'accord, alors on peut, vous savez, commencer à faire ce qu'on ferait normalement pour la gravité, mais juste parce que l'espace sera légèrement plus compliqué, cette théorie gravitationnelle pure contiendra en fait la gravité ordinaire et les champs de matière, d'accord ? Donc c'est une proposition, d'accord, c'est une proposition, qui est telle que par exemple, ce qui se passe dans cette proposition, c'est que le boson de Higgs n'est pas du tout naturel, le boson de Higgs est calculé à partir d'un calcul gravitationnel et ce que vous obtenez, c'est un doublet habituel de bosons de Higgs, un doublet complexe de bosons de Higgs, d'accord. Et ce qui joue le rôle de la métrique, si vous voulez, ce qui joue le rôle de la métrique dans l'espace fini, c'est exactement la matrice Yukawa dans le modèle standard. Donc elle contient à la fois, si vous voulez, les masses Yukawa et la matrice de mélange Kobayashi-Maskawa et cela est incorporé dans la géométrie de l'espace fini, d'accord, d'accord.

Maintenant, il s'avère que l'action qui combine l'action d'Einstein plus l'action du modèle standard est obtenue par cet espace très simple qui est le produit de l'espace-temps ordinaire par un espace fini quand on prend comme action juste le nombre de valeurs propres de l'élément de longueur, ok, donc vous prenez votre élément de longueur et vous comptez le nombre de valeurs propres de cet élément de longueur qui sont plus grandes que la longueur donnée ; vous le développez et vous trouvez ça ok ? D'autres grandeurs. Donc si le Higgs est de 133, d'accord, alors ce n'est pas si bon pour ce modèle, vous voyez ce que je veux dire, et d'accord. Mais je veux dire que ce qu'il fait, vous voyez, le but de ce modèle est que nous avons, je veux dire que le processus psychologique dans lequel nous sommes est un peu fou parce que dans ce lagrangien très compliqué du modèle standard, nous avons isolé la partie électromagnétique et nous disons "C'est l'espace de Minkowski". Bien sûr, vous connaissez l'espace de Minkowski, si nous regardons, il vient juste de la partie électromagnétique de ce lagrangien mais ce lagrangien a beaucoup plus de parties, il a une partie faible et une partie forte. Et ce que je propose, c'est une géométrie plus grande, un cadre plus large qui peut absorber ce modèle comme étant de la géométrie pure et la réponse que vous obtenez n'est pas l'espace de Minkowski : c'est quelque chose qui est légèrement plus élaboré qui a une partie légèrement non commutative, d'accord. Donc c'est aussi simple que ça.

Je veux juste... Je ne dis pas que c'est un modèle final, mais je dis que 200 GV ou un TeV, d'accord, c'est ce qu'on voit concrètement, c'est un raffinement de l'espace de Minkowski, c'est plus raffiné, il a cet aspect légèrement non commutatif. Bon, c'est ce que je dis, je ne dis pas, vous savez, c'est une théorie de tout ou c'est un modèle final,

non non, non non, je suis extrêmement pratique et vous voyez ce que je veux dire, les pieds sur terre ; ce que je dis, c'est qu'il y a un cadre plus général pour la géométrie, qui s'applique à beaucoup plus de cas mathématiques ; c'est motivé par les mathématiques, pas par la physique, mais alors, bien sûr, cela devrait être compatible avec la physique. Maintenant, la façon dont c'est compatible avec la physique, c'est précisément que l'élément de longueur est défini comme le propagateur inverse du fermion, d'accord.

Ensuite, vous regardez et vous voyez ce que c'est et vous savez très bien que dans le modèle standard, le propagateur de fermions n'est pas seulement du Dirac pur, c'est du Dirac avec couplage Yukawa, vous voyez ce que je veux dire. Et puis, ok, vous obtenez cette géométrie plus sophistiquée, c'est tout, c'est tout ce que je dis.

UN AUTRE AUDITEUR : Ok merci, quels problèmes votre proposition résout-elle ? Je veux dire qu'elle ne fait que prédire la masse du boson de Higgs ?

ALAIN CONNES : Mais le principe d'action, je veux dire le principe qui donne le lagrangien, est incroyablement simple. C'est clair comme de l'eau de roche. Ce n'est pas ça et ce que je trouve, vous savez, je trouve que je fais souvent des cauchemars où le signe devant l'action d'Einstein est correct, où le signe devant l'auto-couplage de Yang Mills est correct, le signe devant le couplage minimal est correct, le signe devant le couplage quartique de Higgs que je trouve est correct, d'accord, et ainsi de suite. Donc peut être que c'est un accident, vous pouvez dire que c'est une curiosité mathématique, et ainsi de suite. Mais il se pourrait que ce ne soit pas un accident, et vous savez, à l'heure actuelle, nous avons une sorte de théorie prépondérante du point de vue sociologique, et donc, je pense qu'il est important de savoir que ce n'est pas la seule, qu'il y a d'autres possibilités, je veux dire, bien sûr, ce n'est pas à l'intersection de la géométrie non-commutative et de la théorie des cordes, que l'intersection n'est pas zéro, nous savons qu'il y a une certaine intersection. Mais vous voyez, je propose mon modèle comme un modèle efficace : ce que je propose, c'est qu'il existe une notion plus flexible de géométrie qui vous donne un modèle efficace de l'espace-temps aux énergies que nous connaissons ; bien sûr, ce n'est pas le modèle ultime, et lorsque les énergies augmenteront, nous devons savoir si les mesures correspondent ou non à cette idée de géométrie que je propose, c'est tout.

Non, je veux dire que le modèle ne prédit pas vraiment la masse de Higgs, car il ne prédit que la masse de Higgs et le coût de la création d'un grand désert entre les deux, ce à quoi je ne crois pas, d'accord. Non, je veux dire, quel problème résout-il ? Il résout, si vous voulez, le problème d'écrire l'action du modèle standard au dos d'une enveloppe et vous, je veux dire, si vous me montrez l'action du modèle standard au dos d'une enveloppe. Je le sais, je veux dire, je l'ai vu de nombreuses fois, ce n'est pas une chose que vous...

UN AUTRE AUDITEUR : Dites-vous quelque chose sur la constante cosmologique ? Ok ? Comme beaucoup d'autres théories ?

ALAIN CONNES : je peux écrire cela au dos d'une enveloppe, tu sais, je veux dire, ou au dos d'un timbre Poste, d'un timbre, non non, je veux dire je veux l'écrire au dos d'un timbre. Donc au dos d'un timbre, ok, ce que je te dis c'est que tu prends l'élément de longueur comme ça... Tu veux écrire non non non non non non non c'est de la prédiction tu vois je ne crois pas en une théorie je veux dire je détesterais vivre dans un monde...

UN AUTRE AUDITEUR : Vous dites quelque chose sur la constante cosmologique, vous dites quelque chose sur ?? Ok comme beaucoup d'autres théories ?

ALAIN CONNES : Oui, bien sûr, bien sûr, les théories... ok, bien sûr. Oui, mais je veux dire que vous ne payez pas le prix des grandes théories unificatrices dans le sens où vous ne dites pas que vous savez qu'il existe ce petit groupe de jauge, et donc non, vous obtenez juste... ce que vous obtenez, c'est le modèle standard en tant que tel. Comme vous l'avez dit, le phénomène de Higgs provient de la géométrie, laissez-moi vous expliquer...

UN AUTRE AUDITEUR : Le Higgs est-il une conséquence de la mesure de la variance ?

ALAIN CONNES : Non, non, d'accord, laissez moi vous expliquer pourquoi le phénomène provient de la géométrie, c'est si simple à expliquer, d'accord. Je veux dire que je simplifie à l'excès, d'accord, mais imaginez que vous ayez un espace-temps qui a deux côtés : le côté supérieur et le côté inférieur, d'accord. Maintenant, si vous prenez une fonction dans cet espace, d'accord, vous pouvez la différencier d'un côté, vous pouvez la différencier de l'autre côté,

mais vous pouvez aussi la différencier transversalement. Or, c'est exactement comme ça que le Higgs se produit, d'accord. Donc le Higgs se produit parce que les fonctions, lorsque vous les différenciez de ce côté ou de cet autre côté, vous donneront des champs de jauge bien sûr, mais lorsque vous les différenciez transversalement, elles vous donneront quelque chose qui n'a pas de spin bien sûr, car le spin tournerait dans un espace, il ne tournerait pas transversalement, c'est comme ça que vous obtenez le Higgs. Et vous obtenez le Higgs avec les bons nombres quantiques, vous l'obtenez avec les bons nombres quantiques, c'est peut être un accident, d'accord, vous savez.

UN AUTRE AUDITEUR : Le Higgs est il une conséquence de la mesure de la variance ?

ALAIN CONNES : Non, pas du tout, non, c'est une conséquence de la géométrie : ce que je vous donne, c'est un principe purement géométrique qui vous donne ça, c'est tout. Bon, je sais, je comprends les physiciens, vous savez, je comprends que quand Minkowski écrit son modèle de l'espace-temps, les gens peuvent lui dire "qu'est-ce que vous apportez à la relativité ?" et il ne peut rien dire ; bien sûr, ça n'apporte rien à la relativité restreinte, c'est la même chose, ce sont les mêmes équations, c'est exactement la même chose, d'accord. Ce que je vous dis c'est qu'il y a un modèle géométrique extrêmement simple qui vous donne exactement le modèle standard à partir d'un principe extrêmement simple, d'une certaine géométrie. La géométrie n'est pas si simple, la géométrie est plus délicate que la géométrie de Minkowski, c'est bon, d'accord. Je ne dis pas que je résous un problème physique.

L'ANIMATEUR : Ca ne peut pas tenir au dos d'une enveloppe, probablement pas, mais ça peut être expliqué pendant la pause café, alors nous aurons une séance de questions/réponses.