Géométrie non-commutative et fonction zeta de Riemann

Par Alain Connes

Selon mon premier professeur Gustave Choquet, on court le risque, lorsqu'on affronte ouvertement un problème non résolu bien connu, de rester dans les mémoires davantage par son échec que par quoi que ce soit d'autre. Après avoir atteint un certain âge, j'ai réalisé qu'attendre “en sécurité” jusqu'à atteindre le point final de sa vie était une alternative aussi auto-destructrice.

Dans cet article, je reviendrai d'abord sur mon travail initial sur la classification des algèbres de von Neumann et je le projetterai dans la lumière inhabituelle de la Théorie basique des nombres d'André Weil.

J'expliquerai alors que cela mène à une interprétation naturelle des zéros de la fonction zeta de Riemann et à un paradigme géométrique dans lequel le Frobenius, ses valeurs propres et l'interprétation de la formule de Lefschetz des formules explicites continue d'être vérifiée pour les corps de nombres. Sera démontrée alors la positivité de la distribution de Weil en supposant la validité de l'analogue de la formule de trace de Selberg. Cette dernière reste non démontrée et est équivalente à RH pour toutes les L-fonctions à Grössencharakter.

1. Théorie du corps de classes local et classification des facteurs

Soit K un corps *local*, i.e. un corps discret localement compact. L'action de $K^* = GL_1(K)$ sur le groupe additif K par multiplication,

$$(\lambda, x) \to \lambda x \qquad \forall \lambda \in K^*, x \in K, \tag{1}$$

avec l'unicité, à mise à l'échelle près, de la mesure de Haar du groupe additif K, amène un homomorphisme,

$$a \in K^* \to |a| \in \mathbb{R}_+^*, \tag{2}$$

de K^* vers $\mathbb{R}_+^*$, appelé le *module* de K. Son domaine

$$\mathrm{Mod}(K) = \{|\lambda| \in \mathbb{R}_+^* \,;\, \lambda \in K^*\} \tag{3}$$

Référence : Mathematics: frontiers and perspectives, p. 35-54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
Retranscription en Latex : Denise Vella-Chemla, août 2022.

est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_+^*$.

Les corps $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ (des quaternions) sont les seuls corps avec $\mathrm{Mod}(K) = \mathbb{R}_+^*$, on les appelle les corps locaux archimédiens.

Soit K un corps local non archimédien, alors

$$R = \{x \in K \; ; \; |x| \leq 1\}, \tag{4}$$

est l'unique sous-anneau compact maximal de K et le quotient R/P de R par son unique idéal maximal est un corps fini $\mathbb{F}_q$, (avec $q = p^l$ une puissance de nombre premier). On a,

$$\mathrm{Mod}(K) = q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*. \tag{5}$$

Soit K commutatif. Une extension $K \subset K'$ de degré fini de K est dite *non ramifiée* ssi la dimension de K' sur K est l'ordre de $\mathrm{Mod}(K')$ comme sous-groupe de $\mathrm{Mod}(K)$. Quand il en est ainsi, le corps K' est commutatif, est engendré sur K par les racines de l'unité d'ordre premier à q, et est une extension cyclique de Galois de K, de groupe de Galois engendré par l'automorphisme $\theta \in \mathrm{Aut}_K(K')$ tel que,

$$\theta(\mu) = \mu^q, \tag{6}$$

pour toute racine de l'unité d'ordre premier à q dans K'.

Les extensions non ramifiées de degré fini de K sont classées par les sous-groupes,

$$\Gamma \subset \mathrm{Mod}(K), \Gamma \neq \{1\}. \tag{7}$$

Soit alors $\overline{K}$ une fermeture algébrique de K, $K_{\mathrm{sep}} \subset \overline{K}$ la fermeture algébrique séparable, $K_{\mathrm{ab}} \subset K_{\mathrm{sep}}$ l'extension abélienne maximale de K et $K_{\mathrm{un}} \subset K_{ab}$ l'extension non ramifiée maximale de K, i.e. l'union de toutes les extensions non ramifiées de degré fini. On a,

$$K \subset K_{\mathrm{un}} \subset K_{\mathrm{ab}} \subset K_{\mathrm{sep}} \subset \overline{K}, \tag{8}$$

et le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{un}} : K)$ est topologiquement engendré par θ appelé l'automorphisme de Frobenius.

La correspondance (7) est donnée par,

$$K' = \{x \in K_{\mathrm{un}}\ ;\ \theta_\lambda(x) = x \quad \forall \lambda \in \Gamma\}, \tag{9}$$

avec des notations plutôt évidentes telles que θ_q est le θ de (6). Soit alors W_K le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}} : K)$ dont les éléments induisent sur K_{un} une puissance entière de l'automorphisme de Frobenius. On munit W_K de la topologie localement compacte dictée par la séquence exacte de groupes,

$$1 \to \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}} : K_{\mathrm{un}}) \to W_K \to \mathrm{Mod}(K) \to 1, \tag{10}$$

et le résultat principal de la théorie du corps de classes local affirme l'existence d'un isomorphisme canonique,

$$W_K \xrightarrow{\sim} K^*, \tag{11}$$

compatible avec le module.

L'étape de base dans la construction de l'isomorphisme (11) est la classification des algèbres centrales simples de dimension finie A sur K. Toute telle algèbre est de la forme,

$$A = M_n(D), \tag{12}$$

où D est une algèbre (centrale) de division sur K et le symbole M_n désigne les matrices $n \times n$.

De plus D est le produit croisé d'une extension non ramifiée K' de K par un 2-cocycle sur son groupe de Galois cyclique. La cohomologie élémentaire des groupes amène alors l'isomorphisme,

$$\mathrm{Br}(K) \xrightarrow{\eta} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \tag{13}$$

du groupe de Brauer des classes des algèbres centrales simples sur K (avec produit tensoriel comme loi de groupe), dans le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ des racines de 1 dans $\mathbb{C}$.

Toute la discussion ci-dessus a été menée en supposant que K est non archimédien. Pour les corps archimédiens $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les mêmes questions ont une réponse bêtement simple. Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, on a $K = \overline{K}$ et toute l'image s'effondre. Pour $K = \mathbb{R}$ la seule valeur non triviale de l'invariant de Hasse η est

$$\eta(\mathbb{H}) = -1. \tag{14}$$

Un groupe de Galois G est par construction totalement déconnecté de telle façon qu'un morphisme de K^* dans G est nécessairement trivial sur la composante connexe de $1 \in K^*$.

Soit k un corps *global*, i.e. un sous-corps discret cocompact d'un anneau commutatif (non discret) localement compact semi-simple A. (Cf. Iwasawa *Ann. of Math.* **57** (1953).) L'anneau topologique A est canoniquement associé à k et appelé l'anneau Adèles de k, on a,

$$A = \prod_{\text{res}} k_v, \tag{15}$$

où le produit est le produit restreint des corps locaux k_v étiquetés par les places de k.

Quand la caractéristique de k est $p > 1$ de telle façon que k est le corps de fonctions sur $\mathbb{F}_q$, on a

$$k \subset k_{\text{un}} \subset k_{\text{ab}} \subset k_{\text{sep}} \subset \overline{k}, \tag{16}$$

où, comme ci-dessus $\overline{k}$ est une fermeture algébrique de k, k_{sep} la fermeture algébrique séparable, k_{ab} l'extension abélienne maximale et k_{un} est obtenu en adjoignant à k toutes les racines de l'unité d'ordre premier à p.

On définit le groupe de Weil W_k comme ci-dessus comme le sous-groupe de $\text{Gal}(k_{\text{ab}} : k)$ de ces automorphismes qui induisent sur k_{un} une puissance entière de θ,

$$\theta(\mu) = \mu^q \qquad \forall \mu \text{ racine de 1 d'ordre premier à } p. \tag{17}$$

Le théorème principal de la théorie du corps de classes global affirme l'existence d'un isomorphisme canonique,

$$W_k \simeq C_k = GL_1(A)/GL_1(k), \tag{18}$$

de groupes localement compacts.

Quand k est de caractéristique 0, i.e. est un corps de nombres, on a l'isomorphisme canonique,

$$\text{Gal}(k_{\text{ab}} : k) \simeq C_k/D_k, \tag{19}$$

où D_k est la composante connexe de l'identité dans le groupe de classes d'idèles $C_k = GL_1(A)/GL_1(k)$, mais à cause des places archimédiennes de k il n'y a pas d'interprétation de C_k analogue à l'interprétation du groupe de Galois pour les corps de fonctions. Selon A. Weil [28], “La recherche d'une interprétation pour C_k si k est un corps de nombres, analogue en quelque manière à l'interprétation par un groupe de Galois quand k est un corps de fonctions, me semble constituer l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des nombres à l'heure actuelle ; il se peut qu'une telle interprétation renferme la clef de l'hypothèse de Riemann...”.

Les groupes de Galois sont par construction les limites projectives des groupes finis attachés aux extensions finies. Pour obtenir des groupes connectés on doit clairement relâcher pour les extensions finies la condition de finitude, condition qui est la même que la dimensionalité finie des algèbres simples centrales. Puisque les places archimédiennes de k sont responsables de la non trivialité de D_k il est naturel de poser la question préliminaire suivante,

“Y a-t-il une théorie de Brauer non triviale des algèbres simples centrales sur $\mathbb{C}$?”

Comme nous le verrons bientôt, les algèbres centrales simples de *dimension d'approximation finie* sur $\mathbb{C}$ fournissent une réponse satisfaisante à cette question. Elles sont classifiées par leur module,

$$\mathrm{Mod}(M) \underset{\sim}{\subset} \mathbb{R}_+^*, \tag{20}$$

qui est un sous-groupe fermé virtuel de $\mathbb{R}_+^*$.

Expliquons maintenant cette assertion plus soigneusement. D'abord, on exclut le cas trivial $M = M_n(\mathbb{C})$ des algèbres de matrices. Ensuite $\mathrm{Mod}(M)$ est un sous-groupe virtuel de $\mathbb{R}_+^*$, au sens de G. Mackey, i.e. une action ergodique de $\mathbb{R}_+^*$. Tous les flots ergodiques apparaissent et M_1 est isomorphe à M_2 ssi $\mathrm{Mod}(M_1) \cong \mathrm{Mod}(M_2)$.

Le lieu de naissance des algèbres simples centrales est comme le commutant des représentations isotypiques. Quand on travaille sur $\mathbb{C}$ il est naturel de considérer les représentations unitaires dans l'espace de Hilbert de façon à restreindre notre attention aux algèbres M qui apparaissent comme commutants de représentations unitaires. On les appelle algèbres de von Neumann. Les termes central et simple conservent leur signification algébrique habituelle.

La classification fait intervenir trois parties indé pendantes,

(A) La définition de l'invariant $\mathrm{Mod}(M)$ pour les facteurs arbitraires (algèbres centrales de von Neumann).

(B) L'équivalence de toutes les notions possibles de dimensionalité d'approximation finie.

(C) La preuve que Mod est un invariant complet et que tous les sous-groupes virtuels sont obtenus.

Le module d'un facteur M a été d'abord défini ([6]) comme un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ par l'égalité

$$S(M) = \bigcap_\varphi \mathrm{Spec}(\Delta_\varphi) \subset \mathbb{R}_+ \tag{21}$$

où φ varie parmi les états (fidèles, normaux) sur M, i.e. les formes linéaires $\varphi : M \to \mathbb{C}$ telles que,

$$\varphi(x^*x) \leq 0 \qquad \forall x \in M, \varphi(1) = 1, \tag{22}$$

alors que l'opérateur Δ_φ est l'*opérateur modulaire* ([24])

$$\Delta_\varphi = S_\varphi^* S_\varphi, \tag{23}$$

qui est le *module* de l'involution $x \to x^*$ dans l'espace de Hilbert attaché à la forme sesquilinéaire,

$$\langle x, y \rangle = \varphi(y^*x), \quad x, y \in M. \tag{24}$$

Dans le cas des corps locaux, le module était un homomorphisme de groupe ((2)) de K^* à $\mathbb{R}_+^*$. La contrepartie pour les facteurs est l'homomorphisme de groupes, ([6])

$$\delta : \mathbb{R} \to \mathrm{Out}(M) = \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Int}(M), \tag{25}$$

du groupe additif $\mathbb{R}$ vu comme le dual de $\mathbb{R}_+^*$ pour l'appariement,

$$(\lambda, t) \to \lambda^{it} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ t \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

vers le groupe de classes d'automorphismes de M modulo les automorphismes intérieurs.

Le sous-groupe virtuel,

$$\mathrm{Mod}(M) \underset{\sim}{\subset} \mathbb{R}_+^*, \tag{27}$$

est le *flot des poids* ([25] [15] [8]) de M. Il est obtenu à partir du module δ comme l'action duale de $\mathbb{R}_+^*$ sur l'algèbre abélienne,

$$C = \text{Centre de } M \rtimes_\delta \mathbb{R}, \tag{28}$$

où $M \rtimes_\delta \mathbb{R}$ est le produit croisé de M par le groupe d'automorphismes modulaire δ.

Ceci permet de gérer (A), pour décrire (B) établissons simplement l'équivalence ([5]) des conditions suivantes :

(29) M est la fermeture de l'union d'une séquence croissante d'algèbres de dimensions finies.

(30) M est complémenté comme sous-espace de l'espace normé de tous les opérateurs dans un espace de Hilbert.

La condition (29) est évidemment que l'on attendrait une algèbre de dimension d'approximation finie. La condition (30) est similaire à la *moyennabilité* pour les groupes discrets et l'implication (30) $\Longrightarrow$ (29) est un outil très puissant.

On fait référence à [5] [15] [12] pour (C) et on décrit juste la construction effective de l'algèbre centrale simple M associée à un sous-groupe virtuel donné,

$$\Gamma \underset{\sim}{\subset} \mathbb{R}_+^*. \tag{31}$$

Parmi les facteurs de dimension d'approximation finie (les algèbres de von Neumann centrales), seuls deux ne sont pas simples. Le premier est l'algèbre

$$M_\infty(\mathbb{C}), \tag{32}$$

de tous les opérateurs dans l'espace de Hilbert. Le second facteur est l'unique facteur de dimension d'approximation finie de type II_∞. C'est

$$R_{0,1} = R \otimes M_\infty(\mathbb{C}), \tag{33}$$

où R est l'unique facteur de dimension d'approximation finie avec une trace finie, τ_0, i.e. un état tel que,

$$\tau_0(xy) = \tau_0(yx) \qquad \forall x, y \in R \tag{34}$$

Le produit tensoriel de τ_0 par la trace standard semi-finie sur $M_\infty(\mathbb{C})$ amène une trace semi-finie τ sur $R_{0,1}$. Il existe, à conjugaison près, un unique groupe à un paramètre d'automorphismes $\theta_\lambda \in \mathrm{Aut}(R_{0,1})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que,

$$(35) \qquad \tau(\theta_\lambda(a)) = \lambda\tau(a) \qquad \forall a \in \text{ Domaine de } \tau, \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

Soit d'abord $\Gamma \subset \mathbb{R}_+^*$ un sous-groupe ordinaire fermé de $\mathbb{R}_+^*$. Alors le facteur correspondant R_Γ de modulo Γ est donné par l'égalité :

$$(36) \qquad R_\Gamma = \{x \in R_{0,1} \ ; \ \theta_\lambda(x) = x \qquad \forall \lambda \in \Gamma\},$$

en analogie parfaite avec (9).

Un sous-groupe virtuel $\Gamma \underset{\sim}{\subset} \mathbb{R}_+^*$ est par définition une action ergodique α de $\mathbb{R}_+^*$ sur une algèbre de von Neumann abélienne A, et la formule (36) s'étend facilement à,

$$(37) \qquad R_\Gamma = \{x \in R_{0,1} \otimes A \, ; (\theta_\lambda \otimes \alpha_\lambda)x = x \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}.$$

(Celle-ci se réduit à (36) pour l'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur l'algèbre $A = L^\infty(X)$ où X est l'espace homogène $X = \mathbb{R}_+^*/\Gamma$.)

La paire $(R_{0,1}, \theta_\lambda)$ naît très naturellement en géométrie du flot géodésique d'une surface de Riemann compacte (de genre > 1). Soit $V = S^* \sum$ le fibré cosphère unité d'une telle surface $\sum$, et F le feuilletage stable du flot géodésique. Ce dernier définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de la variété feuilletée (V, F) et ainsi un groupe à un paramètre d'automorphismes de l'algèbre de von Neumann $L^\infty(V, F)$.

Cette algèbre est facile à décrire, ses éléments sont des opérateurs aléatoires $T = (T_f)$, i.e. des familles mesurables bornées d'opérateurs T_f paramétrées par les feuilles f du feuilletage. Pour chaque feuille f l'opéraeteur T_f agit dans l'espace de Hilbert $L^2(f)$ des densités de carré intégrable sur la variété f. Deux opérateurs aléatoires sont identifiés s'ils sont égaux pour presque toutes les feuilles f (i.e. l'ensemble de feuilles dont l'union dans V est négligeable). Les opérations algébriques de somme et produit sont données par,

$$(38) \qquad (T_1 + T_2)_f = (T_1)_f + (T_2)_f, \ \ (T_1T_2)_f = (T_1)_f(T_2)_f,$$

i.e. sont effectuées terme à terme.

On prouve que,

$$(39) \qquad L^\infty(V, F) \simeq R_{0,1},$$

et que le flot géodésique θ_λ satisfait (35). En effet, le feuilletage (V, F) admet à mise à l'échelle près une mesure transverse unique Λ et la trace τ est donnée (cf. [4]) par l'expression formelle,

$$\tau(T) = \int \operatorname{Trace}(T_f)\, d\Lambda(f), \tag{40}$$

puisque le flot géodésique satisfait $\theta_\lambda(\Lambda) = \lambda\Lambda$ on obtient (35) à partir de considérations géométriques simples. La formule (37) montre que la plupart des facteurs de dimension d'approximation finie naissent déjà des feuilletages, par exemple le facteur unique de dimension d'approximation finie R_∞ tel que,

$$\operatorname{Mod}(R_\infty) = \mathbb{R}_+^*, \tag{41}$$

naît du feuilletage de codimension 1 de $V = S^* \sum$ engendré par F et le flot géodésique.

En fait, cette relation entre la classification des algèbres centrales simples sur $\mathbb{C}$ et la géométrie des feuilletages est beaucoup plus profonde. Par exemple, en utilisant la cohomologie cyclique avec le simple fait suivant,

(42) "Un groupe connecté peut seulement agir trivialement sur une théorie de la colomologie invariante par homotopie",

on prouve (cf. [4]) que pour tout feuilletage F de codimension un d'une variété compacte V de classe de Godbillon-Vey ne s'évanouissant pas, on a,

$$\operatorname{Mod}(M) \text{ est de covolume fini dans } \mathbb{R}_+^*, \tag{43}$$

où $M = L^\infty(V, F)$, et le sous-groupe virtuel de covolume fini est un flot de mesure finie invariante.

2. Théorie du corps de classe global et brisure spontanée de symétrie

Dans la discussion ci-dessus à propos des algèbres centrales simples de dimension d'approximation finie, nous avons travaillé localement sur $\mathbb{C}$. Nous allons maintenant décrire un exemple particulièrement intéressant (cf. [3]) d'algèbres de Hecke intimement liées à l'arithmétique, et définies sur $\mathbb{Q}$.

Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un sous-groupe presque normal d'un groupe discret Γ, i.e. on suppose,

$$\Gamma_0 \cap s\,\Gamma_0\, s^{-1} \text{ a un index fini dans } \Gamma_0 \qquad \forall s \in \Gamma. \tag{1}$$

De façon équivalente, les orbites de l'action à gauche de Γ_0 sur Γ/Γ_0 sont toutes finies. On définit l'algèbre de Hecke,

$$(2) \qquad \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0),$$

comme l'algèbre de convolution des fonctions Γ_0 valuées par les entiers à support fini. Pour tout corps k on définit,

$$(3) \qquad \mathcal{H}_k(\Gamma, \Gamma_0) = \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0) \otimes_{\mathbb{Z}} k,$$

comme étant obtenu en étendant l'anneau des coefficients de $\mathbb{Z}$ à k. On définit $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^{+}$ comme le groupe des matrices rationnelles 2×2,

$$(4) \qquad \Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \; ; \; a \in \mathbb{Q}^{+}, b \in \mathbb{Q} \right\},$$

et $\Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^{+}$ le sous-groupe des matrices entières,

$$(5) \qquad \Gamma_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

On vérifie que Γ_0 est presque normal dans Γ.

Pour obtenir une algèbre centrale simple sur $\mathbb{C}$ au sens de la section précédente, on prend juste le commutant de la représentation régulière à droite de Γ sur $\Gamma_0 \backslash \Gamma$, i.e. la fermeture faible de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\Gamma, \Gamma_0)$ dans l'espace de Hilbert,

$$(6) \qquad \ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma),$$

des fonctions Γ_0 invariantes à gauche sur Γ avec pour carré de la norme,

$$(7) \qquad \|\xi\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} |\xi(\gamma)|^2.$$

Cette algèbre centrale simple sur $\mathbb{C}$ est de dimension d'approximation finie et son module est $\mathbb{R}_+^*$ de telle façon qu'il est le même à l'infini que R_∞ de (41).

En particulier son groupe d'automorphismes modulaire est hautement non trivial et on peut le calculer explicitement pour l'état φ associé au vecteur $\xi_0 \in \ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$ correspondand au coset à gauche Γ_0.

Le groupe d'automorphismes modulaire σ_t^φ laisse la sous-algèbre dense $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\Gamma, \Gamma_0) \subset R_\infty$ globalement invariante et est donné par la formule,

$$\sigma_t^\varphi(f)(\gamma) = L(\gamma)^{-it} R(\gamma)^{it} f(\gamma) \qquad \forall \gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_0 \tag{8}$$

pour tout $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\Gamma, \Gamma_0)$. Ici on définit,

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \text{ Cardinalité de l'image de } \Gamma_0\gamma\Gamma_0 \text{ dans } \Gamma/\Gamma_0 \\ R(\gamma) &= \text{ Cardinalité de l'image de } \Gamma_0\gamma\Gamma_0 \text{ dans } \Gamma_0\backslash\Gamma. \end{aligned} \tag{9}$$

Cela suffit à établir le contact avec la mécanique statistique quantique que nous allons maintenant décrire brièvement. Comme de nombreux paradigmes mathématiques que nous ont légués les physiciens, il est caractérisé “non par cette nouveauté d'une vie courte qui trop souvent peut influencer le mathématicien laissé à ses propres dispositifs, mais par cette nouveauté infiniment féconde qui essaime de la nature des choses” (J. Hadamard).

Un système mécanique quantique est donné par,

1) La C^* algèbre des observables A,
2) L'évolution temporelle $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ qui est un groupe d'automorphismes à un paramètre de A.

Un état d'équilibre ou KMS (pour Kubo-Martin et Schwinger), à température inverse β est un état φ sur A qui remplit la condition suivante,

(10) Pour tous $x, y \in A$ il existe une fonction holomorphe bornée (continue sur la bande fermée), $F_{x,y}(z), 0 \leq \text{Im } z \leq \beta$ telle que

$$\begin{aligned} F_{x,y}(t) &= \varphi(x\ \sigma_t(y)) & \forall t \in \mathbb{R} \\ F_{x,y}(t + i\beta) &= \varphi(\sigma_t(y)\ x) & \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour β fixé, les états KMS$_\beta$ forment un simplexe de Choquet et donc se décomposent de manière unique comme une superposition statistique des phases pures données par les points extrêmes. Pour les systèmes intéressants avec interaction non triviale, on s'attend en général à ce que pour une température élevée T, (i.e. pour un petit β puisque $\beta = \frac{1}{T}$ à un facteur de conversion près) le désordre sera prédominant de telle sorte qu'il existera seulement un état KMS$_\beta$. Pour des températures suffisamment basses, un ordre devrait advenir et permettre la coexistence de phases thermodynamiques distinctes de telle façon que le simplexe K_β des états KMS$_\beta$ devrait être non trivial. Un groupe de symétrie donné G du système agira nécessairement trivialement sur K_β pour des T grands puisque K_β est un point, mais agit en général non trivialement sur K_β pour des petites valeurs de T de telle façon qu'il n'y a plus de symétrie d'une phase pure donnée. Ce phénomène de *brisure spontanée de symétrie* ainsi que les propriétés très particulières de la température critique T_c à la frontière des deux régions sont des pierres angulaires de la mécanique statistique.

Dans notre cas, on définit juste A comme étant l'algèbre C^* qui est la fermeture de la *norme* de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\Gamma,\Gamma_0)$ dans l'algèbre d'opérateurs dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$. On définit $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(A)$ comme étant l'unique extension des automorphismes σ_t^φ de (8).

Pour $\beta = 1$, le fait que φ est un état KMS_β est une tautologie puisqu'on a obtenu σ_t^φ précisément de cette manière ([24]). On démontre ([3]) que pour tout $\beta \leq 1$ (i.e. pour $T = 1$) il existe un et un seul état KMS_β.

Le groupe compact G,

$$G = C_{\mathbb{Q}}/D_{\mathbb{Q}}, \tag{11}$$

quotient du groupe de classe d'idèles $C_{\mathbb{Q}}$ par la composante connexe de l'identité $D_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{R}_+^*$, agit d'une manière très simple et naturelle comme les symétries du système (A,σ_t). (Pour voir cela, on note que l'action à droite de Γ sur $\Gamma_0\backslash\Gamma$ s'étend à l'action de $P_{\mathcal{A}}$ sur le produit restreint des arbres de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q}_p)$ où $\mathcal{A}$ est l'anneau des adèles finies (cf. [3]).

Pour $\beta > 1$ ce groupe de symétrie G de notre système est spontanément brisé, les ensembles convexes compacts K_β sont non triviaux et ont la même structure que K_∞, que nous décrivons maintenant. D'abord, quelques éléments de terminologie, un état KMS_β pour $\beta = \infty$ est appelé un *état de base* et la condition KMS_∞ est équivalente à la *positivité de l'énergie* dans la représentation de l'espace de Hilbert correspondant.

Rappelons que $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\Gamma,\Gamma_0)$ contient $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\Gamma,\Gamma_0)$ donc,

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\Gamma,\Gamma_0) \subset A. \tag{12}$$

Par [3] théorème 5 et proposition 24 on a le,

Théorème. *Soit $\mathcal{E}(K_\infty)$ l'ensemble des états KMS_∞ extrémaux.*

a) *Le groupe G agit librement et transitivement sur $\mathcal{E}(K_\infty)$ par composition, $\varphi \to \varphi \circ g^{-1}, \forall g \in G$.*

b) *Pour tout $\varphi \in \mathcal{E}(K_\infty)$ on a,*
$$\varphi(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}_{\mathrm{ab}},$$
et pour tout élément $\alpha \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}} : \mathbb{Q})$ il existe une extension unique de $\alpha \circ \varphi$, par continuité, comme état de A. On a $\alpha \circ \varphi \in \mathcal{E}(K_\infty)$.

c) *L'application $\alpha \to (\alpha \circ \varphi)\varphi^{-1} \in G = C_k/D_k$ définie pour $\alpha \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}} : \mathbb{Q})$ est l'isomorphisme de la théorie du corps de classes global (I.19).*

Cette dernière application est indépendante du choix de φ. Ce qui est assez remarquable dans ce résultat, c'est que l'existnce de la sous-algèbre $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ permet de mettre en action le groupe de Galois de $\mathbb{C}$ sur les *valeurs des états*. Puisque le groupe de Galois de $\mathbb{C} : \mathbb{Q}$ est (excepté pour $z \to \overline{z}$) formé des automorphismes *discontinus*, il est assez surprenant que son action puisse être compatible avec la *positivité* de la caractéristique des états. Il n'est pas clair du tout de savoir comment étendre la construction ci-dessus à des corps de nombres arbitraires k tout en préservant les trois résultats du théorème. Il y a cependant un calcul facile qui relie la construction ci-dessus à un objet qui fait sens pour tout corps global k. En effet, si on définit comme ci-dessus R_∞ comme étant la fermeture faible de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\Gamma, \Gamma_0)$ dans $\ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$, on peut calculer la paire associée $(R_{0,1}, \theta_\lambda)$ de la section I.

La fermeture de l'algèbre C^* de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ est équivalente selon Morita (cf. M. Laca) à l'algèbre C^* produit croisé,

$$C_0(\mathcal{A}) \rtimes \mathbb{Q}_+^*, \tag{13}$$

où $\mathcal{A}$ est l'espace localement compact des adèles finies. Il s'ensuit immédiatement de cela que,

$$R_{0,1} = L^\infty(\mathbb{Q}_A) \rtimes \mathbb{Q}^*, \tag{14}$$

i.e. l'algèbre de von Neumann produit croisé des fonctions L^∞ sur les adèles de $\mathbb{Q}$ par l'action de $\mathbb{Q}^*$ par multiplication.

Le groupe à un paramètre d'automorphismes, $\theta_\lambda \in \mathrm{Aut}(R_{0,1})$, est obtenu comme la restriction à,

$$D_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}_+^*, \tag{15}$$

de l'action évidente du groupe des classes d'idèles $C_{\mathbb{Q}}$,

$$(g, x) \to gx \qquad \forall g \in C_{\mathbb{Q}}, x \in A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^*, \tag{16}$$

sur l'espace $X = A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^*$ des classes d'adèles.

Notre prochain objectif sera de montrer que le dernier espace est intimement relié aux *zéros* des L-fonctions à Grössencharakter.

(Nous avons montré en [3] que la fonction de partition du système ci-dessus est la fonction zeta de Riemann.)

3. Positivité de Weil et formule de trace

Les corps globaux k fournissent un contexte naturel pour l'hypothèse de Riemann sur les zéros de la fonction zeta et sa généralisation aux L-fonctions de Hecke. Quand la caractéristique de k est non nulle, cette conjecture a été prouvée par A. Weil. Sa preuve s'appuie sur le dictionnaire suivant (traduit en langage moderne) qui donne une signification géométrique, en terme de géométrie algébrique sur les corps finis, aux propriétés en théorie des fonctions des fonctions zeta. Rappelons que k est un corps de fonction sur une courbe $\sum$ définie sur $\mathbb{F}_q$.

Géométrie algébrique	Théorie des fonctions
Valeurs propres de l'action du Frobenius sur $H^1_{\text{et}}(\overline{\sum}, \mathbb{Q}_\ell)$	Zéros de ζ
Dualité de Poincaré en cohomologie ℓ-adique	Équation fonctionnelle
Formule de Lefschetz pour le Frobenius	Formules explicites
Positivité de Castelnuovo	Hypothèse de Riemann

Nous décrirons une troisième colonne de ce dictionnaire, qui aura du sens pour n'importe quel corps global. Elle est basée sur la géométrie de l'espace des classes d'adèles,

$$X = A/k^*, \quad A = \text{Adèles de } k. \tag{1}$$

Cet espace est de la même nature que l'espace des feuilles du feuilletage horocyclique (section I) et la même géométrie sera utilisée pour l'analyser.

Notre interprétation spectrale des zéros de zeta fait intervenir l'espace de Hilbert. Les raisons pour lesquelles l'espace de Hilbert (apparemment inventé par Hilbert dans ce but) devrait intervenir sont les variétés, mentionnons-en trois,

(A) Soit $N(E)$ le nombre de zéros de la fonction zeta de Riemann satisfaisant $0 < \text{Im } \rho < E$, alors ([22])

$$N(E) = \langle N(E) \rangle + N_{\text{osc}}(E), \tag{2}$$

où la fonction continue $\langle N(E)\rangle$ est donnée par

$$\langle N(E)\rangle = \frac{E}{2\pi}\left(\log\frac{E}{2\pi} - 1\right) + \frac{7}{8} + o(1), \tag{3}$$

où la partie oscillante est

$$N_{\rm osc}(E) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\log\zeta\left(\frac{1}{2} + iE\right). \tag{4}$$

Les nombres $x_j = \langle N(\rho_j)\rangle$ où ρ_n est la partie imaginaire du $n^{\text{ième}}$ zéro sont de densité moyenne un et se comportent comme les valeurs propres d'une matrice aléatoire hermitienne. Cela a été découvert par H. Montgomery [18] qui a conjecturé (et démontré pour des fonctions test adéquates) que quand $M \to \infty$, avec $\alpha, \beta > 0$,

$$\#\{(i,j) \in \{1,\ldots,M\}^2\ ;\ x_i - x_j \in [\alpha,\beta]\} \sim M\int_\alpha^\beta 1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2 du \tag{5}$$

qui est exactement ce qu'il advient dans l'ensemble unitaire gaussien (GUE). Des tests numériques par A. Odlyzko [20] et un travail théorique ultérieur par Katz-Sarnak [17] et J. Keating a fourni l'évidence sans appel que les zéros de zeta devraient être les valeurs propres d'une matrice hermitienne.

(B) L'équivalence entre RH et la positivité de la distribution de Weil sur le groupe des classes d'idéles C_k montre que l'espace de Hilbert est implicitement présent.

(C) La signification arithmétique profonde du travail de A. Selberg sur l'analyse spectrale du laplacien sur $L^2(G/\Gamma)$ où Γ est un sous-groupe arithmétique d'un groupe de Lie semi-simple G.

Les tentatives directes (cf. [2]) de construire l'espace de Polya-Hilbert qui donne une réalisation spectrale des zéros de ζ utilisant la mécanique quantique rencontrent le problème du signe $-$ suivant : soit H l'hamiltonien du système mécanique quantique obtenu en quantifiant le système classique,

$$(X, F_t) \tag{6}$$

où X est l'espace des phases et $t \in \mathbb{R} \to F_t$ le flot hamiltonien. Soit $N(E)$ le nombre de valeurs propres λ de H telles que $0 \leq \lambda \leq E$. Alors, comme pour ζ,

$$N(E) = \langle N(E)\rangle + N_{\rm osc}(E), \tag{7}$$

où $\langle N(E)\rangle$ est essentiellement un volume dans l'espace des phases, alors que la partie oscillante admet une expansion asymptotique heuristique de la forme (cf. [2]),

$$N_{\text{osc}}(E) \sim \frac{1}{\pi} \sum_\gamma \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{2sh\left(\frac{m\lambda_\gamma}{2}\right)} \sin\left(T_\gamma^{\#} mE\right) \tag{8}$$

où les γ sont les orbites périodiques du flot F, les $T_\gamma^{\#}$ sont leurs périodes et les λ_γ sont les exposants d'instabilité de ces orbites.

On peut comparer ([2]) (8) avec l'expansion asymptotique également heuristique de (4) en utilisant le produit eulérien de ζ qui donne, en utilisant $-\log(1-x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$,

$$N_{\text{osc}}(E) \simeq -\frac{1}{\pi} \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m/2}} \sin\left((\log p)\; m\; E\right). \tag{9}$$

En comparant (8) et (9) on obtient une information précieuse sur le "flot de Riemann" hypothétique de M. Berry. Les orbites périodiques γ devraient être étiquetées par les nombres premiers p, les périodes devraient être les log p et les exposants d'instabilité λ_p. Aussi, pour éviter la duplication des orbites, le flot ne devrait pas être "symétrique par inversion du temps", i.e. non isomorphe au temps inversé :

$$(X, F_{-t}). \tag{10}$$

Il y a cependant un décalage fondamental entre (8) et (9) qui est le signe global $-$ au début de (9) et aucun ajustement des phases de Maslov n'en rend compte.

Exactement le même signe $-$ apparaît dans la formule explicite de Riemann-Weil,

$$\sum_{L(\chi,\rho)=0} \widehat{h}(\chi,\rho) - \widehat{h}(0) - \widehat{h}(1) = -\sum_v \int_{k_v^*}' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u, \tag{11}$$

où h est une fonction test sur le groupe des classes d'idèles C_k, $\widehat{h}$ est sa transformée de Fourier,

$$\widehat{h}(x,z) = \int_{C_k} h(u)\chi(u)|u|^z d^*u, \tag{12}$$

et les valeurs finies $\int'$ sont normalisées comme il convient. Si on utilise le dictionnaire ci-dessus quand $\text{char}(k) \neq 0$, l'origine géométrique de ce signe $-$ devient claire, la formule (11) est la formule de Lefschetz,

$$\#\text{ de points fixes de } \varphi = \text{Trace } \varphi/H^0 - \text{Trace } \varphi/H^1 + \text{Trace } \varphi/H^2 \tag{13}$$

dans laquelle l'espace $H^1_{\text{et}}(\overline{\Sigma}, \mathbb{Q}_\ell)$ qui fournit la réalisation spectrale des zéros apparaît avec un signe $-$. Cela indique que la réalisation spectrale des zéros de zeta devraient être de nature cohomologique ou être plus spécifique, de telle façon que l'espace de

Polya-Hilbert apparaisse comme le dernier terme d'une séquence exacte d'espaces de Hilbert,

$$0 \to \mathcal{H}_0 \xrightarrow{T} \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H} \to 0. \tag{14}$$

L'exemple que nous avons à l'esprit pour (14) est le complexe assemblé d'Euler pour une surface de Riemann, où $\mathcal{H}_0$ est le *sous-espace de codimension* 2 des formes différentielles de degré pair orthogonal aux formes harmoniques, où $\mathcal{H}_1$ est l'espace des 1-formes et où $T = d + d^*$ est la somme de la cofrontière de de Rham avec son adjoint d^*.

Puisqu'on veut obtenir la réalisation spectrale non seulement pour les fonctions zeta mais également pour toutes les L-fonctions à Grössencharakter, on ne s'attend pas à avoir seulement une action de $\mathbb{Z}$ pour $\mathrm{char}(k) > 0$ correspondant au Frobenius, ou du groupe $\mathbb{R}_+^*$ si $\mathrm{char}(k) = 0$, mais à avoir l'équivariance de (14) selon une action naturelle du groupe des classes d'idèles $C_k = GL_1(A)/k^*$.

Soit $X = A/k^*$ l'espace des classes d'adèles. Notre idée de base est de prendre pour $\mathcal{H}_0$ une complétion convenable du sous-espace de codimension 2 des fonctions sur X telle que,

$$f(0) = 0, \int f \, dx = 0, \tag{15}$$

alors que $\mathcal{H}_1 = L^2(C_k)$ et T est la restriction de l'application provenant de l'inclusion $C_k \to X$, multipliée par $|a|^{1/2}$,

$$(Tf)(a) = |a|^{1/2} f(a). \tag{16}$$

L'action de C_k est alors évidente, pour $\mathcal{H}_0$

$$(U(g)f)(x) = f(g^{-1}x) \qquad \forall g \in C_k \tag{17}$$

en utilisant l'action II.15 de C_k sur X, et similairement la représentation régulière V pour $\mathcal{H}_1$.

Cette idée fonctionne bien mais il y a deux points subtils ; d'abord, puisque X est un espace quotient délicat les espaces de fonctions pour X sont obtenus naturellement en commençant avec les espaces de fonctions sur A et en se mettant en modes "transformations de jauge"

$$f \to f_q, \ f_q(x) = f(xq), \qquad \forall q \in k^*. \tag{18}$$

Ici, l'espace de fonctions naturel est l'espace de Bruhat-Schwarz $\mathcal{S}(A)$ et par (15) le sous-espace de codimension 2,

$$\mathcal{S}(A)_0 = \left\{ f \in \mathcal{S}(A) \; ; \; f(0) = 0, \int f \, dx = 0 \right\}. \tag{19}$$

L'application restriction T est alors donnée par,

$$T(f)(a) = |a|^{1/2} \sum_{q \in k^*} f(aq) \qquad \forall a \in C_k \tag{20}$$

La fonction correspondante $T(f)$ appartient à $\mathcal{S}(C_k)$ et toutes les fonctions $f - f_q$ sont dans le noyau de T.

Le second point subtil est que puisque C_k est abélien et non compact, sa représentation régulière ne contient aucune sous-représentation de dimension finie de telle façon que l'espace de Polya-Hilbert ne peut être une sous-représentation (ou un quotient unitaire) de V. Il y a un moyen facile de s'en sortir (que nous améliorerons sous peu) qui est de remplacer $L^2(C_k)$ par $L^2_\delta(C_k)$ en utilisant le poids polynomial $(\log^2|a|)^{\delta/2}$, i.e. la norme,

$$\|\xi\|^2_\delta = \int_{C_k} |\xi(a)|^2 (1 + \log^2 |a|)^{\delta/2} d^*a. \tag{21}$$

Soit $\mathrm{char}(k) = 0$ tel que Mod $k = \mathbb{R}^*_+$ et $C_k = K \times \mathbb{R}^*_+$ où K est le groupe compact $C_{k,1} = \{a \in C_k \; ; \; |a| = 1\}$.

Théorème. *Soit $\delta > 1$, $\mathcal{H}$ le conoyau de T dans $L_\delta(C_k)$ et W la représentation quotient de C_k. Soit χ un caractère de K, $\widetilde{\chi} = \chi \times 1$ le caractère correspondant de C_k. Soit $\mathcal{H}_\chi = \{\xi \in \mathcal{H} \; ; \; W(g)\xi = \chi(g)\xi \quad \forall g \in K\}$ and $D_\chi = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}(W(e^\epsilon) - 1)$. Alors D_χ est un opérateur fermé non borné de spectre discret, $\mathrm{Sp} D_\chi \subset i\mathbb{R}$ est l'ensemble des parties imaginaires des zéros de la L-fonction à Grössencharakter $\widetilde{\chi}$ qui ont comme partie réelle $1/2$. De plus, la multiplicité spectrale de ρ est le plus grand entier $n < \frac{1+\delta}{2}$ dans $\{1, ..., \text{multiplicité comme zéro de } L\}$.*

Un résultat similaire est vérifié pour $\mathrm{char}(k) > 0$. Cela permet de calculer le caractère de la représentation W comme,

$$\mathrm{Trace}(W(h)) = \sum_{\substack{L\left(\chi, \frac{1}{2} + \rho\right) = 0 \\ \rho \in i\mathbb{R}/N^\perp}} \widehat{h}(\chi, \rho) \tag{22}$$

où $N = \mathrm{Mod}(k), W(h) = \int W(g) h(g) d^*g, \; h \in \mathcal{S}(C_k), \widehat{h}$ est défini dans (12) et où la multiplicité est comptée comme dans le théorème.

Ce résultat est seulement préliminaire à cause du paramètre non souhaité δ qui restreint artificiellement les multiplicités. La restriction Re $\rho = \frac{1}{2}$ fait intervenir le même $\frac{1}{2}$ que dans (16), et cela a une signification naturelle. En effet, la norme naturelle pour l'espace de Hilbert pour $L^2(X)$, notamment $\|\xi\|^2 = \int_X |\xi(x)|^2 dx$ est donné naturellement à l'étage au-dessus sur $\mathcal{S}(A)_0$ par :

$$\|f\|^2 = \int_D |\Sigma f(xq)|^2 |x| d^*x, \quad \forall f \in \mathcal{S}(A)_0, \tag{23}$$

où D est un domaine fondamental pour k^* agissant sur les idèles. Pour un corps local, on a en effet l'égalité

$$dx = |x| \, d^*x, \tag{24}$$

(à normalisation près) entre la mesure de Haar additive et la multiplicative. Dans le cas global, on a,

$$dx = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon |x|^{1+\epsilon} \, d^*x, \tag{25}$$

et (23) ignore la constante divergente de normalisation qui ne joue aucun rôle dans le calcul des traces ou des opérateurs adjoints. L'exposant $\frac{1}{2}$ dans (16) transforme T en une isométrie,

$$T \ : \ L^2(X)_0 \to L^2(C_k). \tag{26}$$

L'analogue de l'opération de Hodge $*$ est donné sur $\mathcal{H}_0$ par la transformation de Fourier,

$$(Ff)(x) = \int_A f(y) \, \alpha(xy) \, dy \qquad \forall f \in \mathcal{S}(A)_0 \tag{27}$$

qui, parce qu'on prend le quotient par (18), est indépendant du choix du caractère additif α de A tel que $\alpha \neq 1$ et $\alpha(q) = 1 \quad \forall q \in k$. Notons également que $F^2 = 1$ sur le quotient. Sur $\mathcal{H}_1$ le Hodge $*$ est donné par,

$$(*\xi)(a) = \xi(a^{-1}) \qquad \forall a \in C_k. \tag{28}$$

La formule de Poisson signifie exactement que T commute avec l'opération $*$. C'est juste une reformulation du travail de Tate et Iwasawa sur la preuve de l'équation fonctionnelle, mais nous allons voir maintenant que si nous suivons la preuve d'Atiyah-Bott ([1]) de la formule de Lefschetz nous obtenons effectivement un sens géométrique clair pour la distribution de Weil. On peut bien sûr comme dans [10] définir des produits intérieurs sur les espaces de fonctions sur C_k en utilisation la distribution de

Weil, mais à partir du moment où celui-ci est mis à la main et n'apparaît pas naturellement, on a très peu de chance de comprendre pourquoi il devrait être positif. Maintenant, soit φ un difféomorphisme d'une variété lisse $\sum$ et supposons que le graphe de φ est transverse à la diagonale, on peut alors facilement définir et calculer (cf. [1]) la trace en théorie des distributions de la permutation U des fonctions de $\sum$ associée à φ.

$$(U\xi)(x) = \xi(\varphi(x)) \qquad \forall x \in \textstyle\sum . \tag{29}$$

On a "Trace" $(U) = \int k(x,x)dx$, où $k(x,y)dy$ est le noyau de Schwarz associé à U, i.e. la distribution sur $\sum \times \sum$ telle que,

$$(U\xi)(x) = \int k(x,y)\,\xi(y)\,dy. \tag{30}$$

Maintenant près de la diagonale et en coordonnées locales, on a,

$$k(x,y) = \delta(y - \varphi(x)), \tag{31}$$

où δ est la distribution de Dirac. On obtient alors,

$$\text{“Trace”}(U) = \sum_{\varphi(x)=x} \frac{1}{|1-\varphi' x|}, \tag{32}$$

où φ' est le jacobien de φ et $|\ |$ désigne la valeur absolue du déterminant.

Avec davantage de travail ([11]) on obtient une formule similaire pour la trace distributionnelle de l'action d'un flot,

$$(U_t\xi)(x) = \xi(F_t(x)) \qquad \forall x \in \textstyle\sum,\ t \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

Elle est donnée, sous une hypothèse adéquate de transversalité, par

$$\text{“Trace”}(U(h)) = \sum_\gamma \int_{I_\gamma} \frac{h(u)}{|1-(F_u)_*|} d^*u, \tag{34}$$

où $U(h) = \int h(t)U(t)dt$, h est une fonction test sur $\mathbb{R}$, les γ étiquettent les orbites périodiques du flot, incluant les points fixes, I_γ est le sous-groupe d'isotropie correspondant, et $(F_u)_*$ est l'application tangente à F_u sur l'espace transverse aux orbites, et finalement d^*u est l'unique mesure de Haar sur I_γ qui est de covolume 1 dans $(\mathbb{R}, dt)$.

Maintenant il est vraiment remarquable que quand on analyse les orbites périodiques de l'action de C_k sur X on trouve que non seulement elles se qualifient comme un flot de Riemann au sens ci-dessus, mais également que (34) devienne,

$$\text{“Trace”}(U(h)) = \sum_v \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1}}{|1-u|} d^*u. \tag{35}$$

Ainsi, les sous-groupes d'isotropie I_γ sont paramétrés par les places v de k et coïncident avec l'inclusion cocompacte naturelle $k_v^* \subset C_k$ qui relie le local au global dans la théorie du corps de classes. Le dénominateur $|1-u|$ est pour le module du corps local k_v et le u^{-1} dans $h(u^{-1})$ vient de la divergence entre les notations de (16) et (28). Il s'avère que si on normalise la mesure de Haar d^*u des groupes modulés comme dans Weil [27], par,

$$\int_{1\leq |u|\leq \Lambda} d^*u \sim \log \Lambda \qquad \text{pour } \Lambda \to \infty, \tag{36}$$

on obtient la même condition de covolume 1 que dans (34).

La condition de transversalité impose la condition $h(1) = 0$. La trace distributionnelle pour l'action de C_k sur C_k par translations s'évanouit sous la condition $h(1) = 0$.

En se rappelant que $\mathcal{H}_0$ est le sous-espace de codimension 2 de $L^2(X)$ déterminé par la condition (15) et en calculant les caractères des représentations 1-dimensionnelles correspondantes, on obtient,

$$h \to \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1). \tag{37}$$

Donc en rendant égales la somme alternée des traces sur $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ et la trace de la cohomologie, on devrait obtenir la signification géométrique de la formule explicite de Riemann-Weil (11) et en fait la signification géométrique de RH en utilisant (21), si cela pouvait être justifié pour une certaine valeur de δ.

La trace des matrices de permutation est positive et cela explique la positivité de Hadamard,

$$\text{“Trace”}(U(h)) \geq 0 \qquad \forall h, h(1) = 0, h(u) \geq 0 \qquad \forall u \in C \tag{38}$$

(qui ne doit pas être confondue avec la positivité de Weil).

Pour éliminer le paramètre artificiel δ et donner un sens rigoureux, comme espace de Hilbert, à la trace distributionnelle “trace”, on procède comme dans la formule de trace de Selberg [23] et on introduit un cutoff. Dans la terminologie physique, la divergence de la trace est à la fois infrarouge et ultraviolette comme on le voit dans le cas le plus simple de l'action de K^* sur $L^2(K)$ pour un corps local K. Dans ce cas local, on définit,

$$R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda, \quad \Lambda \in \mathbb{R}_+, \tag{39}$$

où P_Λ est la projection orthogonale sur le sous-espace,

$$\{\xi \in L^2(K)\,;\xi(x) = 0 \qquad \forall x, |x| > \Lambda\}, \tag{40}$$

alors que $\widehat{P}_\Lambda = F P_\Lambda F^{-1}, F$ est la transformée de Fourier.

On démontre ([9]) dans ce cas local l'analogue suivant de la formule de trace de Selberg,

$$\text{Trace}\,(R_\Lambda\, U(h)) = 2\; h(1)\; \log'(\Lambda) + \int' \frac{h(u^{-1}}{|1-u|}\; d^*u + o(1) \tag{41}$$

où $h \in \mathcal{S}(K^*)$ a un support compact, $2\log'(\Lambda) = \int_{\lambda \in K^*, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^*\lambda$, et la valeur principale $\int'$ est déterminée de manière unique en appariant avec l'unique distribution sur K qui est en accord avec $\frac{du}{|1-u|}$ pour $u \neq 1$ et dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1.

Ainsi il s'avère que cette valeur principale est en accord avec celle de Weil pour le choix de F associé au caractère standard de K.

Soit k un corps global et soit d'abord S un ensemble fini de places de k contenant toutes les places infinies. À S correspond la version suivante localisée de l'action de C_k sur X. On remplace C_k par

$$C_S = \prod_{v \in S} k_v^* / O_S^*, \tag{42}$$

où $O_S^* \subset k^*$ est le groupe des S-unités. On remplace X par

$$X_S = \prod_{v \in S} k_v / O_S^*. \tag{43}$$

L'espace de Hilbert $L^2(X_S)$, sa transformée de Fourier F et la projection orthogonale $P_\Lambda, \widehat{P}_\Lambda = F P_\Lambda F^{-1}$ continuent à avoir du sens, avec

$$\text{Im}\; P_\Lambda = \{\xi \in L^2(X_S)\;;\; \xi(x) = 0 \quad \forall x, |x| > \Lambda\}. \tag{44}$$

Dès que S contient plus de 3 éléments, (e.g. $\{2, 3, \infty\}$ pour $k = \mathbb{Q}$) l'espace X_S est un espace quotient extrêmement délicat. Il est donc assez remarquable que la *formule* *de trace* soit vérifiée,

Théorème. *Pour tout* $h \in \mathcal{S}_C(C_S)$ *on a, avec* $R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$,

$$\operatorname{Trace}(R_\Lambda\, U(h)) = 2\,\log'(\Lambda) h(1) + \sum_{v \in S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1}}{|1-u|} d^*u + o(1)$$

où les notations sont comme ci-dessus et les valeurs finies $\int'$ dépendent du caractère additif de Πk_v définissant la transformée de Fourier F. Quand $\operatorname{char}(k) = 0$ les projecteurs $P_\Lambda, \widehat{P}_\Lambda$ commutent sur L^2_χ pour Λ suffisamment grand de telle façon qu'on peut remplacer R_Λ par la projection orthogonale Q_Λ sur $\operatorname{Im} P_\Lambda \cap \operatorname{Im} \widehat{P}_\Lambda$. La situation pour $\operatorname{char}(k) = 0$ est plus délicate puisque P_Λ and $\widehat{P}_\Lambda$ ne commutent pas (pour Λ grand) même dans le cas local archimédien. Mais heureusement [21] ces opérateurs commutent avec un opérateur différentiel particulier du second ordre, dont les valeurs propres, les fonctions sphéroïdales prolates, fournissent la bonne filtration Q_Λ. Cela permet de remplacer R_Λ par Q_Λ et d'établir la formule de trace globale

$$\operatorname{Trace}(Q_\Lambda\, U(h)) = 2\,\log'(\Lambda) h(1) + \sum_{v} \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1}}{|1-u|} d^*u + o(1). \tag{45}$$

Notre résultat final est que la validité de la formule de trace implique (en fait est équivalente à) la positivité de la distribution de Weil, i.e. RH pour toutes les L-fonctions avec Grössencharakter. De plus, la filtration par Q_Λ permet de définir la cohomologie adélique et de compléter le dictionnaire entre la théorie des fonctions et la géométrie de l'espace des classes d'adèles.

Théorie des fonctions	Géométrie
Zéros et pôles de Zeta	Valeurs propres de l'action de C_k sur la cohomologie adélique
Équation fonctionnelle	Opération $*$
Formule explicite	Formule de Lefschetz
RH	Formule de trace

Références

[1] M. F. Atiyah and R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: I, *Ann. of Math.*, **86** (1967), 374-407.

[2] M. Berry, Riemann's zeta function: a model of quantum chaos, *Lecture Notes in Physics*, **263**, Springer (1986).

[3] J.-B. Bost and A. Connes, Hecke Algebras, Type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory, *Selecta Mathematica, New Series* **1**, n. 3 (1995), 411-457.

[4] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press (1994).

[5] A. Connes, Classification of injective factors, *Ann. of Math.*, **104**, n. 2 (1976), 73-115.

[6] A. Connes, Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **6**, n. 4 (1973), 133-252.

[7] A. Connes, Formule de trace en Géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B* (1996).

[8] A. Connes and M. Takesaki, The flow of weights on factors of type III, *Tohoku Math. J.*, **29** (1977), 473-575.

[9] A. Connes, Trace formula in Noncommutative Geometry and the zeros of the Riemann zeta function. To appear in *Selecta Mathematica.*

[10] D. Goldfeld, A spectral interpretation of Weil's explicit formula, *Lecture Notes in Math.*, **1593**, Springer Verlag (1994), 135-152.

[11] V. Guillemin, Lectures on spectral theory of elliptic operators, *Duke Math. J.*, **44**, n. 3 (1977), 485-517.

[12] U. Haagerup, Connes' bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III, *Acta Math.*, **158** (1987), 95-148.

[13] S. Haran, Riesz potentials and explicit sums in arithmetic, *Invent. Math.*, **101** (1990), 697-703.

[14] B. Julia, Statistical theory of numbers, *Number Theory and Physics, Springer Proceedings in Physics*, **47** (1990).

[15] W. Krieger, On ergodic flows and the isomorphism of factors, *Math. Ann.*, **223** (1976), 19-70.

[16] N. Katz and P. Sarnak, Random matrices, Frobenius eigenvalues and Monodromy, (1996), Book, to appear.

[17] N. Katz and P. Sarnak, Zeros of zeta functions, their spacings and spectral nature, (1997), to appear.

[18] H. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, *Analytic Number Theory*, AMS (1973).

[19] M. L. Mehta, Random matrices, Academic Press, (1991).

[20] A. Odlyzko, On the distribution of spacings between zeros of zeta functions, *Math. Comp.* **48** (1987), 273-308.

[21] D. Slepian and H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty I, *Bell Syst. Tech. J.* **40** (1961).

[22] B. Riemann, Mathematical Werke, Dover, New York (1953).

[23] A. Selberg, *Collected papers*, Springer (1989).

[24] M. Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Lecture Notes in Math. bf 128, Springer (1989).

[25] M. Takesaki, Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, *Acta Math.* **131** (1973), 249-310.

[26] A. Weil, Basic Number Theory, Springer, New York (1974).

[27] A. Weil, Sur les formules explicites de la théorie des nombres, *Izv. Mat. Nauk.*, (Ser. Mat.) **36**, 3-18.

[28] A. Weil, Sur la théorie du corps de classes, *J. Math. Soc. Japan*, **3**, (1951).

[29] D. Zagier, Eisenstein series and the Riemannian zeta function, *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic*, Tata, Bombay (1979), 275-301.