THÉORIE DES GROUPES. — *Sur la classification des facteurs de type II.*

Note (*) de M. **Alain Connes**, présentée par M. Laurent Schwartz.

Nous introduisons un invariant $\chi(M)$ qui est un groupe commutatif borélien associé à tout facteur M. Nous en déduisons l'existence d'un facteur N de type II_1 non isomorphe à $N \otimes N$, puis celle d'un facteur M de type II_1 qui n'est pas antiisomorphe à lui-même et ne s'obtient donc pas comme représentation régulière d'un groupe discret.

1. DÉFINITION DE L'INVARIANT $\chi(M)$. — Soit M un facteur à prédual séparable M_*. On munit le groupe Aut M des automorphismes de M de la topologie de la convergence simple normique dans M_*. On note ε l'application canonique de Aut M sur Out M = Aut M/Int M où Int M est le groupe des automorphismes intérieurs. Une suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de M est dite centralisante quand, pour tout $\psi \in M_*$, on a $\| [x_n, \psi] \| \to 0$ quand $n \to \infty$. On pose $\mathrm{Ct}\, M = \{ \alpha \in \mathrm{Aut}\, M,\ \alpha(x_n) - x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ★ fortement pour toute suite centralisante $\}$. On a $\mathrm{Int}\, M \subset \mathrm{Ct}\, M$. L'assertion *a* du théorème 1 utilise un résultat de McDuff [3].

THÉORÈME 1. — *Soient* R *un facteur hyperfini de type* II_1 *et* M, Int M, ε, Ct M *comme ci-dessus*,

a. M est isomorphe a $M \otimes R$ *si et seulement si le groupe* $\varepsilon(\mathrm{Int}\, M)$ *est non commutatif.*

b. Dans les conditions de a, $\varepsilon(\mathrm{Ct}\, M)$ *est le commutant de* $\varepsilon(\overline{\mathrm{Int}\, M})$ *dans* Out M.

Le théorème suivant montre que si le centre de $\varepsilon(\mathrm{Int}\, M)$ est trivial on peut décrire tous les éléments de $\overline{\mathrm{Int}\, M}$.

THÉORÈME 2. — *Soient* R *et* M *comme dans* 1. *Supposons que* $\mathrm{Int}\, M \neq \overline{\mathrm{Int}\, M}$ *et que* Centre $\varepsilon(\overline{\mathrm{Int}\, M}) = \{1\}$.

Alors pour tout $\sigma \in \mathrm{Int}\, M$ *il existe une factorisation* $M = N \otimes R$ *de* M *telle que* $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(1_N \otimes s_p^\gamma)$ *ou* $p = p_0(\sigma)$, $\gamma = \gamma(\sigma)$ *et* s_p^γ *sont comme dans* [3].

Rappelons que $p_0(\sigma)$ est la période de $\varepsilon(\sigma)$ dans Out M et que $\gamma(\sigma)$ est la racine p_0-ième de 1 dans **C** telle que :

$$\sigma^{p_0} = \mathrm{Ad}\, u \quad \Rightarrow \quad \sigma(u) = \gamma u \qquad (u \text{ unitaire dans M}).$$

On peut aussi montrer que $\varepsilon(\overline{\mathrm{Int}\, M})$ est un groupe simple dans les conditions du théorème 2.

Munissons Aut M de sa structure borélienne standard, alors Int M et Ct M sont des boréliens. Le théorème 1 montre que le centre de $\varepsilon(\overline{\mathrm{Int}\, M})$ est égal à $\varepsilon(\mathrm{Ct}\, M \cap \overline{\mathrm{Int}\, M})$ ce qui permet de parler de sa structure borélienne quotient.

DÉFINITION 3. — *On pose* $\chi(M) =$ Centre $\varepsilon(\overline{\mathrm{Int}\, M})$ *muni de la structure borélienne quotient.*

Dès que toute suite hypercentralisante $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sur M [1] est triviale ($x_n - \lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ★ fortement pour une suite de scalaires $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$) on montre que $\chi(M)$ est dénombrablement séparé. A la suite exacte $1 \to \mathbf{T} \to \mathrm{U} \to \mathrm{Int}\, M \to \mathrm{Ct}\, M \cap \overline{\mathrm{Int}\, M} \to \chi(M) \to 1$ où U est le groupe unitaire de M, on associe alors un élément $\Omega_M \in H^3(\chi(M), \mathbf{T})$, où l'action de $\chi(M)$ sur $\mathbf{T}$ est triviale et où les cochaines sont boréliennes [(5), p. 42]. Quand M est infini et $\chi(M)$ localement compact, pour une topologie donnant la même structure borélienne, la condition $\Omega_M = 1$ équivaut à l'existence d'un homomorphisme $x \to \sigma_x$ de $\chi(M)$ dans Aut M tel que $\varepsilon \circ \sigma =$ identité. (Pour un résultat cohomologique général, *voir* un article à paraître de C. Sutherland.)

2. Calcul de l'invariant $\chi(M)$. — Soient R le facteur hyperfini de type II_1, et pour $n \in \mathbf{N}$, F_n le groupe libre a n générateurs et $U(F_n)$ le facteur de la représentation régulière de F_n. On a $\chi(M) = \{1\}$ pour $M = R$, $M = U(F_n)$, $M = R \otimes U(F_n)$ et $M = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty} (U(F_n))_\nu$ où le produit tensoriel est pris relativement à l'unique trace τ_n de $U(F_n)$.

Soient N un facteur, G un sous-groupe fini de Aut N, nous introduisons deux groupes abéliens $K^\perp$ et L permettant de calculer $\chi(M)$ où M est le produit croisé de N par G.

Soient $K = G \cap \mathrm{Ct}\, N$ et $K^\perp$ le groupe des homomorphismes de G dans $\mathbf{T}$ qui s'annulent sur K.

Soit L l'intersection dans Out N de G Ct N avec le sous-groupe de Aut N adhérence de $\{\mathrm{Ad}\, u,\ u$ unitaire de $N^G\}$.

Pour tout $l \in L$ soit α_l, dans l'adhérence ci-dessus, tel que $\varepsilon(\alpha_l) = l$. Pour $l_1, l_2 \in L$ on a $\alpha_{l_1} \alpha_{l_2} \alpha_{l_1 l_2}^{-1} = \mathrm{Ad}\, v$ pour un unitaire $v \in N$. Comme Ad v commute avec G, v définit un élément $c(l_1, l_2)$ de $K^\perp$ par l'égalité :

$$g v = c(g) v \quad \text{pour tout } g \in G.$$

La classe c du cocycle $c \in Z^2(L, K^\perp)$ ne dépend pas du choix des représentants α_l.

Théorème 4. — *Soient* N *un facteur sans suite hypercentralisante non triviale, et* $G \subset \mathrm{Aut}\, N$ *un groupe fini tel que* $G \cap \overline{\mathrm{Int}}\, N = \{1\}$. *Pour* $\chi \in K^\perp$ *soit* σ_χ *l'automorphisme de* $M = W^*(G, N)$ *qui fixe* N *et multiplie l'unitaire* U_g *associé à* $g \in G$ *par* $\chi(g)$. *Il existe alors une application canonique* Π *de* $\chi(M)$ *sur* L *telle que* $1 \to K^\perp \to \chi(M) \xrightarrow{\Pi} L \to 1$ *soit une suite exacte, de cocycle* c *défini ci-dessus.*

Le corollaire suivant répond à une question de (6), Probl. 4.4.12.

Corollaire 5. — *Il existe un facteur* M *de type* II_1 *tel que ses puissances tensorielles* $M \otimes M \otimes \ldots \otimes M$ *soient deux à deux non isomorphes.*

On prend $N = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty} (U(F_2))$ et l'automorphisme β, $\beta^2 = 1$ de N qui correspond à l'échange des générateurs de F_2. Alors avec $G = \{1, \beta\}$ et $M = W^*(G, N)$ on a $\chi(M \otimes \ldots \otimes M) = (\mathbf{Z}_2)^n$.

Corollaire 6. — *Le centre de* Out M *n'est pas trivial pour certains facteurs de type* II_1.

On prend M comme ci-dessus [*voir* (2), Probl. 8].

Corollaire 7. — *Il existe un facteur de type* II_1 *non antiisomorphe à lui-même.*

M est obtenu comme produit croisé de $U(F_4) \otimes R$ par un automorphisme d'ordre 3, β avec $\varepsilon(\beta) = \varepsilon(S \otimes s)$, où $S \in \mathrm{Aut}\, U(F_4)$, $s \in \mathrm{Aut}\, R$, $p_0(S) = p_0(s) = 3$, $\gamma(S) = j$, $\gamma(s) = j^2$ ou $j = \exp(i\, 2\pi/3)$.

En particulier M n'est isomorphe au facteur de la représentation régulière d'aucun groupe discret [([5]), Probl. 4.4.30]. L'invariant χ (M) se calcule aussi pour les produits croisés par des groupes infinis, cela permet de montrer que tout groupe abélien compact est le χ d'un facteur de type II_1.

De ce calcul résulte en particulier :

COROLLAIRE 8. — *Pour tout* $\lambda \in]0, 1[$, *soient* R_λ *et* P_λ *les facteurs de Powers et Pukanszky de type* III_λ *et* N_λ *le facteur de type* II_∞ *de la décomposition discrète* [([2]), th. 4.4.1) *de* $P_\lambda \otimes R_\lambda$. *Alors* $\chi(N_\lambda) = \mathbf{T}$ *et les* N_λ *sont deux à deux non isomorphes.*

Ainsi les N_λ forment une famille continue de facteurs de type II_∞ construits à partir d'actions ergodiques d'un même groupe discret, et ils sont deux à deux non isomorphes.

(*) Séance du 26 mai 1975.

(1) i. e. $[x_n, y_n] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \star$ fortement pour toute suite centralisante $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

(2) A. CONNES, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, 6, fasc. 2, 1973.
(3) A. CONNES, *Outer Conjugacy Classes of Automorphisms of Factors* Queen's, preprint, No. 1975-12.
(4) MCDUFF, *Proc. London Math. Soc.*, 21, 1970.
(5) C. MOORE, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 113, 1964.
(6) S. SAKAI, C* *and* W* *algebras. Ergebnisse der Mathematik und iher grenzgebiete*, 80.

Department of Mathematics,
Queen's University,
Kingston (Ontario),
Canada.