Zur Verallgemeinerung des Bertrandschen Postulates, daß zwischen x und $2x$ stets Primzahlen liegen.

Von
Robert Breusch in Freiburg i. Br.

Einleitung.

Aus dem Primzahlsatz

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1$$

folgt, daß für positives ε und genügend großes a zwischen x und $(1+\varepsilon).x$ stets Primzahlen liegen, falls $x \geq a$ ist. Damit hat man aber noch keine Methode, zu einer gegebenen festen Zahl ε ein hinreichend großes a wirklich zahlenmäßig festzustellen.

Das wichtigste Ergebnis in dieser Richtung ist bisher das folgende[1] : Wenn $\varepsilon > \frac{1}{5}$ ist, so liegen für hinreichend großes a und $x \geq a$ zwischen x und $(1+\varepsilon).x$ stets Primzahlen, und die hinreichend großen Zahlen a können hier verhältnismäßig einfach bestimmt werden. Für $\varepsilon = \frac{1}{4}$ z B. hat Herr Prof. I. Schur die Berechnung durchgeführt[2] und die Gültigkeit des Satzes für alle Zahlen $x \geq 24$ nachgewiesen.

In Teil I der vorliegenden Arbeit soll nun der Nachweis geführt werden, daß für $x \geq 48$ zwischen x und $\frac{9}{8}x$ stets Primzahlen liegen, und in Teil II soll gezeigt werden, daß für $x \geq 7$ zwischen x und $2x$ stets Primzahlen einer jeden der vier Progressionen $3n+1, 3n+2, 4n+1, 4n+3$ liegen.

Wesentlich werden bei den Beweisen genaue zahlenmäßige Angaben über Anzahl und Lage der Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion und einiger Dirichletscher L-Reihen benützt, und zwar im einzelnen : von Backlund eine Abschätzung der Anzahl $N(T)$ der nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ mit Ordinate zwischen 0 und T[3] ; von demselben Ver fasser ein Beweis, daß die Nullstellen von $\zeta(s)$ mit Ordinate zwischen 0 und 200 die Abszisse $\frac{1}{2}$ haben, sowie genaue Angaben über die Lage dieser Nullstellen[4] ; von J. GroAngaben über die ersten Nullstellen von $\zeta(s)$ und einigen L-Reihen[5]. Wo

Retranscription en Latex Denise Vella-Chemla, juillet 2022, traduction Google translation corrigée.

[1] Vgl. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 1909, 1, §22.

[2] I. Schur, Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen I, Sitzungsberichte der preuß. Akad. d. Wissensch., phys.-math. Klasse 1929, S. 128.

[3] Backlund, Über die Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion, Acta mathematica 41 (1918), S. 355.

[4] Backlund, Über die Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion, Dissertation Helsingfors 1916.

[5] J. Großmann, Über die Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion und der Dirichletschen L-Funktionen, Dissertation Göttingen 1913.

für zahlenmäDurchführung der Berechnungen wirklich Kenntnis spezieller Primzahlen erforderlich war, wurden die Tabellen von D. N. Lehmer[6] benützt.

Besonderen Dank schulde ich Herrn Prof. I. Schur, der die Anregung zu der Arbeit gab, und Herrn Prof. Loewy, der ihr großes Interesse ent gegenbrachte.

Erster Teil.
§1.

Es sei in üblicher Bezeichnungsweise

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \quad \text{und} \quad \psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p \quad (m \text{ positiv ganzzahlig}) \;;$$

p soll dabei, wie immer im folgenden, Primzahlwerte annehmen. Dann ist

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \ldots.. \\ \psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) &= \vartheta(x) - \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) - \ldots. \end{aligned}$$

Daraus folgt

(1) $$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) \leq \vartheta(x) \leq \psi(x).$$

Setzt man ferner $s = \sigma + it$ und

(2) $$a_n = \psi(n) - \psi(n-1),$$

dann wird für $\sigma > 1$

(3) $$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{v=1}^{\infty} \frac{a_v}{v^s}.$$ [7]

Dabei ist $\zeta(s)$ die Riemannsche ζ-Funktion, die für $\sigma > 1$ definiert ist durch die Reihe $\zeta(s) = \sum\limits_{v=1}^{\infty} \dfrac{1}{v^s}$.

Weiter gilt der Satz : Wenn unter $\int\limits_{(2)}$ das in der Ebene der komplexen Zahlen längs der ganzen Geraden $\sigma = 2$ erstreckte Integral verstanden wird, dann ist[8]

(4) $$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} \frac{y^s}{s^4} ds = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < y < 1, \\ \frac{1}{6}\log^3 y & \text{für } y \geq 1. \end{cases}$$

---

[6] D. N. Lehmer, List of prime numbers from 1 to 10 006 721, Washington 1914.

[8] Vgl. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig 1927, 2, S. 21, Satz 377 ; dort ist mit s^2 statt s^4 gerechnet, doch läßt sich der Beweis im vorliegenden Fall ganz analog durchführen.

Also ist

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)}\frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)}\frac{x^s}{s^4}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{a_v}{v^s}ds=\sum_{v=1}^{\infty}a_v\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)}\frac{\left(\frac{x}{v}\right)^s}{s^4}ds$$

oder nach (4)

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)}\frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds=\frac{1}{6}\sum_{v\le x}a_v\log^3\frac{x}{v} \tag{5}$$

§2.

Es sei für das folgende abgekürzt

$$\alpha(x)=\sum_{v\le x}a_v\log^3\frac{x}{v}$$

Dann lautet Formel (5) in der neuen Bezeichnungsweise

$$\frac{1}{6}\alpha(x)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)}\frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds. \tag{5'}$$

Der Integrand soll zunächst in der Ebene der komplexen Zahlen integriert werden über den Rand des Rechtecks mit den Ecken

$$2-iT,\qquad 2+iT,\qquad -(2m+1)+iT,\qquad -(2m+1)-iT.$$

Dabei soll m positiv ganzzahlig sein und T positiv so gewählt werden, daßkeine Nullstelle von $\zeta(s)$ die Ordinate T hat. Man erhält dann

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-iT}^{2+iT}\frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-(2m+1)-iT}^{-(2m+1)+iT}\frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-(2m+1)+iT}^{2+iT}\frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-(2m+1)-iT}^{2-iT}\frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds+\sum\text{Resid.},$$

wobei die Summe erstreckt werden soll über alle Pole des Integranden im Rechteck.

Die Absolutwerte der beiden Integrale $\int\limits_{-(2m+1)+iT}^{2+iT}$ und $\int\limits_{-(2m+1)-iT}^{2-iT}$ sind kleiner als [9] $\frac{cx^3\log T}{(x-1)T^4}$, beide Integrale gehen also für $x>1$ mit wach sendem T gegen 0. c bedeute hierbei, ebenso wie nachher c_1, eine Konstante.

[9] Vgl. Landau, Vorl. ü. Zahlentheorie 2, S. 119-120.

Weiter ist[10] für $\sigma = -(2m+1)$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < c_1 \log |s| < c_1 \log (|t| + 2m + 1),$$

also

$$\left|\int\limits_{-(2m+1)-i\infty}^{-(2m+1)+i\infty} \frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds\right| < c_1 x^{-(2m+1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log (|t| + 2m + 1)}{(2m+1)^4 + t^4} dt.$$

Für $x > 1$ geht das Integral mit wachsendem m gegen 0.

Daraus folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \sum \text{Resid.},$$

wobei die Summe jetzt erstreckt werden soll über alle Pole des Integranden in der Halbebene $\sigma < 2$.

Voraussetzung für die letzte Formel ist, daß $\sum$ Resid. überhaupt kon vergiert. Die Konvergenz dieser Summe soll zunächst gezeigt werden. Der Integrand $\frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ hat Pole an folgenden Stellen :

a) $s = 1$, Residuum $-x$.[11]

b) $s = \varrho$, wo ϱ eine der nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ ist, d. h. eine Nullstelle mit $0 < \sigma < 1$. Das Residuum von $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ an einer solchen Stelle ist k, wenn es sich um eine k-fache Nullstelle handelt. Also ist die Summe der zugehörigen Residuen gleich $\sum\limits_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho^4}$; dabei sind k-fache Wurzeln k-mal zu nehmen. Die Summe ist absolut konvergent.

c) $s = -2n, n = 1, 2, 3, ...$; Residuum von $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ an einer solchen Stelle ist 1, also ist die Summe der Residuen gleich $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{(2n)^4}$. Auch diese Summe konvergiert, falls $x \geq 1$ ist.

d) $s = 0$. $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ ist hier regulär

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \mathrm{a}_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots, \qquad x^s = 1 + s \log x + \frac{s^2 \log^2 x}{2!} + \dots ;$$

[10] Ebenda, S. 111, Satz 448.

[11] Landau, Handbuch 1, §48, S. 179.

also

$$\frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \ldots + \frac{1}{s}(b_0 + b_1 \log x + b_2 \log^2 x + b_3 \log^3 x) + \ldots .$$

Das Residuum an der Stelle 0 ist also

$$b_0 + b_1 \log x + b_2 \log^2 x + b_3 \log^3 x.$$

Der Wert der Konstanten b_i wird sich als unwesentlich herausstellen.

Aus (5') folgt nun

$$\frac{1}{6}\alpha(x) = x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{(2n)^4} - b_0 - b_1 \log x - b_2 \log^2 x - b_3 \log^3 x. \tag{6}$$

§3.

y sei eine später zu bestimmende positive Größe. Es soll folgender Ausdruck gebildet werden :

$$\Delta = \alpha((1+y)^4 x) - 4\alpha((1+y)^3 x) + 6\alpha((1+y)^2 x) - 4\alpha((1+y)\, x) + \alpha(x)$$

oder :

$$\Delta = \sum_{v \le (1+y)^4 x} a_v \log^3 \frac{(1+y)^4 x}{v} - 4 \sum_{v \le (1+y)^3 x} a_v \log^3 \frac{(1+y)^3 x}{v} + 6 \sum_{v \le (1+y)^2 x} a_v \log^3 \frac{(1+y)^2 x}{v}$$
$$-4 \sum_{v \le (1+y) x} a_v \log^3 \frac{(1+y)\, x}{v} + \sum_{v \le x} a_v \log^3 \frac{x}{v}.$$

Ordnet man nach Größe von v, so wird

$$\Delta = \sum_{v \le x} a_v \left[\log^3 \frac{(1+y)^4 x}{v} - 4 \log^3 \frac{(1+y)^3 x}{v} + 6 \log^3 \frac{(1+y)^2 x}{v} - 4 \log^3 \frac{(1+y)\, x}{v} + \log^3 \frac{x}{v} \right]$$
$$+ \sum_{x < v \le (1+y)\, x} a_v \left[\log^3 \frac{(1+y)^4 x}{v} - 4 \log^3 \frac{(1+y)^3 x}{v} + 6 \log^3 \frac{(1+y)^2 x}{v} - 4 \log^3 \frac{(1+y)\, x}{v} \right]$$
$$+ \sum_{(1+y)\, x < v \le (1+y)^2 x} a_v \left[\log^3 \frac{(1+y)^4 x}{v} - 4 \log^3 \frac{(1+y)^3 x}{v} + 6 \log^3 \frac{(1+y)^2 x}{v} \right]$$
$$+ \sum_{(1+y)^2 x < v \le (1+y)^3 x} a_v \left[\log^3 \frac{(1+y)^4 x}{v} - 4 \log^3 \frac{(1+y)^3 x}{v} \right] + \sum_{v \le (1+y)^4 x} a_v \log^3 \frac{(1+y)^4 x}{v}.$$

Zunächst sollen die einzelnen Koeffizienten der a_v berechnet oder ab a, logs (1+y)'z geschätzt werden. Der erste Koeffizient hat den Wert 0; mit Rücksicht auf spätere Anwendungen soll hier gleich gezeigt werden: wenn μ positiv ganzzahlig ≤ 4 ist, dann ist

$$
\begin{aligned}
\Lambda_\mu = \log^\mu \frac{(1+y)^4\, x}{v} - 4 \log^\mu \frac{(1+y)^3\, x}{v} + 6 \log^\mu \frac{(1+y)^2\, x}{v} - 4 \log^\mu \frac{(1+y)\, x}{v} + \log^\mu \frac{x}{v} \\
= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu \leq 3, \\ 24 \log^4(1+y) & \text{für} \quad \mu = 4. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Beweis. Es ist

$$
\begin{aligned}
\Lambda_\mu \;&= \left[\log(1+y)^4 + \log \frac{x}{v}\right]^\mu - 4\left[\log(1+y)^3 + \log \frac{x}{v}\right]^\mu + 6\left[\log(1+y)^2 + \log \frac{x}{v}\right]^\mu \\
&\quad -4\left[\log(1+y) + \log \frac{x}{v}\right]^\mu + \left[\log \frac{x}{v}\right]^\mu \\
&= \log^\mu \frac{x}{v}[1-4+6-4+1] \\
&\quad + \binom{\mu}{1} \log^{\mu-1}\frac{x}{v}\, [\log(1-y)^4 - 4\log(1+y)^3 + 6\log(1+y)^2 - 4\log(1+y)] \\
&\quad + \binom{\mu}{2} \log^{\mu-2}\frac{x}{v}\, [\log^2(1-y)^4 - 4\log^2(1+y)^3 + 6\log^2(1+y)^2 - 4\log^2(1+y)] \\
&\quad + \binom{\mu}{3} \log^{\mu-3}\frac{x}{v}\, [\log^3(1-y)^4 - 4\log^3(1+y)^3 + 6\log^3(1+y)^2 - 4\log^3(1+y)] \\
&\quad + \binom{\mu}{4} \log^{\mu-4}\frac{x}{v}\, [\log^4(1-y)^4 - 4\log^4(1+y)^3 + 6\log^4(1+y)^2 - 4\log^4(1+y)] \\
&= \log^\mu \frac{x}{v}[1-4+6-4+1] \\
&\quad + \binom{\mu}{1} \log^{\mu-1} \frac{x}{v} \log(1+y)\; [4 - 4.3 + 6.2 - 4] \\
&\quad + \binom{\mu}{2} \log^{\mu-2} \frac{x}{v} \log^2(1+y)\; [16 - 4.9 + 6.4 - 4] \\
&\quad + \binom{\mu}{3} \log^{\mu-3} \frac{x}{v} \log^3(1+y)\; [64 - 4.27 + 6.8 - 4]
\end{aligned}
$$

$$+\binom{\mu}{4}\log^{\mu-4}\frac{x}{v}\log^4(1+y)\,[256-4.81+6.16-4]$$

$$=\binom{\mu}{4}\log^{\mu-4}\frac{x}{v}\log^4(1+y).24=\begin{cases}0 & \text{für}\quad \mu\le 3,\\ 24\log^4(1+y) & \text{für}\quad \mu=4.\end{cases}$$

Der zweite Koeffizient von a_v, (d. h. der in $\sum\limits_{x<v\le(1+y)x}$) hat demnach den Wert $-\log^3\dfrac{x}{v}$; da v hier zwischen x und $(1+y)x$ liegt, so ist der Koeffizient $\le\log^3(1+y)$.

Der dritte Koeffizient ist

$$\log^3\frac{(1=y)^4\,x}{v}-4\log^3\frac{(1+y)^3\,x}{v}+6\log^3\frac{(1+y)^2\,x}{v}$$

$$=\left[\log(1+y)^2+\log\frac{(1+y)^2\,x}{v}\right]^3-4\left[\log(1+y)+\log\frac{(1+y)^2\,x}{v}\right]^3+6\left[\log\frac{(1+y)^2\,x}{v}\right]^3$$

$$=\log^3\frac{(1+y)^2\,x}{v}[1-4+6]+3\log^2\frac{(1+y)^2\,x}{v}[\log(1+y)^2-4\log(1+y)]$$

$$+3\log\frac{(1+y)^2\,x}{v}[\log^2(1+y)^2-4\log^2(1+y)]+[\log^3(1+y)^2-4\log^3(1+y)]$$

$$=3\log^3\frac{(1+y)^2\,x}{v}-6\log(1+y)\log^2\frac{(1+y)^2\,x}{v}+4\log^3(1+y).$$

Da v hier zwischen $(1+y)\,x$ und $(1+y)^2\,x$ liegt, so ist der Ausdruck $\le 4\log^3(1+y)$. Der vierte Koeffizient ist wieder $\le 4\log^3(1+y)$, der fünfte schließlich $\le\log^3(1+y)$.

Also ist insgesamt

(8) $$\Delta\le 4\log^3(1+y)\sum_{x<v\le(1+y)^4x}a_v\le 4\,y^3\sum_{x<v\le(1+y)^4x}a_v.$$

Andrerseits ist nach (6)

$$\begin{aligned}\tfrac{A}{6} \; &= x[(1+y)^4-4(1+y)^3+6(1+y)^2-4(1+y)+1]\\
&-\sum_{\varrho}\frac{x^{\varrho}[(1+y)^{4\varrho}-4(1+y)^{3\varrho}+6(1+y)^{2\varrho}-4(1+y)^{\varrho}+1]}{2^4}\\
&-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}[(1+y)^{-4.2n}-4(1+y)^{-3.2n}+6(1+y)^{-2.2n}-4(1+y)^{-2n}+1]}{(2n)^4}\\
&-b_0[1-4+6-4+1]\\
&-b_1[\log(1+y)^4x-4\log(1+y)^3x+6\log(1+y)^2x-4\log(1+y)x+\ \log x]\\
&-b_2[\log^2(1+y)^4x-4\log^2(1+y)^3x+6\log^2(1+y)^2x-4\log^2(1+y)x+\ \log^2 x]\\
&-b_3[\log^3(1+y)^4x-4\log^3(1+y)^3x+6\log^3(1+y)^2x-4\log^3(1+y)x+\ \log^3 x].\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der b_i sind nach (7) sämtlich 0, also ist

$$\frac{\Delta}{6}=y^4x-\sum_{\varrho}\frac{x^{\varrho}[(1+y)^{\varrho}-1]^4}{\varrho^4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}[(1+y)^{-2n}-1]^4}{(2n)^4}.$$

Daraus und aus (8) folgt

(9) $$\frac{4}{6}y^3.\sum_{x<v\le(1+y)^4x}a_v\ge y^4x-\sum_{\varrho}\frac{x^{\varrho}[(1+y)^{\varrho}-1]^4}{\varrho^4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}[(1+y)^{-2n}-1]^4}{(2n)^4}$$

§4.

Nun müssen die rechts stehenden Summen abgeschätzt werden. Zu nächst die zweite unter der Voraussetzung $x>1$: Es ist

(10) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}[(1+y)^{-2n}-1]^4}{(2n)^4}<\frac{1}{16x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}<\frac{1}{12x^2}.$$

Weiter sei im folgenden $\varrho=\varrho_1+i\varrho_2$. Dann ist

$$\sum_{\varrho}\frac{x^{\varrho}[(1+y)^{\varrho}-1]^4}{\varrho^4}=\sum_{|\varrho_2|\ge200}\frac{x^{\varrho}[(1+y)^{\varrho}-1]^4}{\varrho^4}+\sum_{|\varrho_2|200}\frac{x^{\varrho}[(1+y)^{\varrho}-1]^4}{\varrho^4}$$

Für $|\varrho_2|<200$ ist $\varrho_1=\frac{1}{2}$[12] Die Abszissen der übrigen Nullstellen sind alle ≤ 1, mindestens die Hälfte ist. $\le\frac{1}{2}$, da die Nullstellen zu $\sigma=\frac{1}{2}$ symmetrisch liegen. Da sie auch zu $t=0$ symmetrisch liegen, so ist

(11) $$\left|\sum_{|\varrho_2|\ge200}\frac{x^{\varrho}[(1+y)^{\varrho}-1)]^4}{\varrho^4}\right|<(2+y)^4\left[x\sum_{\varrho_2\ge200}\frac{1}{|\varrho|^4}+\sqrt{x}\sum_{\varrho_2\ge200}\frac{1}{|\varrho|^4}\right].$$

[12] Vgl. die in der Einleitung zitierten Arbeiten von Backlund.

Es sei $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen mit Ordinate zwischen 0 und T, k-fache k-fach gezählt ; dann ist

$$\sum_{\varrho_2 \geq 200} \frac{1}{|\varrho|^4} \leq \sum_{n=200}^{\infty} \frac{N(n+1)-N(n)}{n^4} \tag{12}$$

Nun ist [13]

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{T}{2\pi} - 1\right) + \frac{7}{8} + Q(T), \tag{13}$$

oder abgekürzt :

$$N(T) = R(T) + Q(T).$$

Dabei gilt für $Q(T)$ [14]

$$|Q(T)| \leq 0,137 \log T + 0,443 \log\log T + 4,350. \tag{14}$$

Also

$$\sum_{n=200}^{\infty} \frac{N(n+1)-N(n)}{n^4} = \sum_{n=200}^{\infty} \frac{R(n+1)-R(n)}{n^4} + \sum_{n=200}^{\infty} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4}.$$

Die zweite Summe wird weiter zerlegt :

$$\sum_{n=200}^{\infty} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} = \sum_{n=200}^{999} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} + \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{n=x\cdot 1000}^{x\cdot 1000+999} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4}$$

$\displaystyle\sum_{n=200}^{999} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4}$ läßt sich etwa auf folgende Weise abschätzen : $Q(n+1)-Q(n)$ kann positiv oder negativ sein; jedenfalls kann man sagen:

$$Q(1000) - Q(999) \leq M_1,$$

wobei M_1 die größere der zwei Zahlen 0 und $Q(1000) - Q(999)$ bedeuten soll. Also ist

$$\frac{Q(999)-Q(998)}{998^4} + \frac{Q(1000)-Q(999)}{999^4} \leq \frac{Q(999)-Q(998)+M_1}{998^4} \leq \frac{M_2}{998^4},$$

wobei nun M_2 die größere der zwei Zahlen 0 und $Q(999) - Q(998) + M_1$ sein soll. Entsprechend weiter

$$\sum_{n=997}^{999} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} \leq \frac{M_3}{997^4},$$

[13] note qu'on ne trouve pas en bas de page.
[14] note qu'on ne trouve pas en bas de page.

wobei M_3 die größere der zwei Zahlen 0 und $Q(998)-Q(997)+M_2$ ist, usw. Schließlich wird

$$\sum \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} \leq \frac{M_{800}}{200^4},$$

M_{800} ist dabei die größte der Zahlen

$$Q(1000)-Q(200)\,;Q(999)-Q(200)\,;\ldots\,;Q(201)-Q(200)\,;0.$$

Nach (14) ist also sicher

$$\sum_{n=200}^{999} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} \leq \frac{1}{200^4}\cdot[0,137(\log 200+\log 1000)$$

$$+\,0,443(\log\log 200+\log\log 1000)+8,700] < \frac{12}{200^4}.$$

Entsprechend gilt

$$\sum_{n=x\cdot 1000}^{x\cdot 1000+999} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} \leq \frac{1}{x^4\cdot 10^{12}}\cdot[0,274\log(x+1)1000+0,886\log\log(x+1)1000+8,700]$$

$$< \frac{1}{x^4\cdot 10^{12}}\cdot[\log(x+1)+14] < \frac{1}{x^4\cdot 10^{12}}[\log x+15].$$

Also ist

$$\sum_{n=200}^{\infty} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} \leq \frac{12}{200^4}+\frac{1}{10^{12}}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\log x+15}{x^4} < \frac{12}{200^4}+\frac{21}{10^{12}},$$

d. h.

(15) $$\sum_{n=200}^{\infty} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} < 0,76\cdot 10^{-8}.$$

Weiter ist nach (13)

$$\begin{aligned} R(n+1)-R(n) &= \frac{n+1}{2\pi}\left[\log\frac{n+1}{2\pi}-1\right]-\frac{n}{2\pi}\left[\log\frac{n}{2\pi}-1\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\log\frac{n}{2\pi}-1\right]+\frac{n+1}{2\pi}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2\pi}\log\frac{n}{2\pi}+\frac{1}{2\pi n}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{n=200}^{\infty} \frac{R(n+1)-R(n)}{n^4} < \frac{1}{2\pi}\sum_{n=200}^{\infty}\frac{\log\frac{n}{2\pi}+\frac{1}{n}}{n^4} < 2,56\cdot 10^{-8}.$$

Daraus, aus (12) und aus (15) folgt

$$\sum_{\varrho_2 \geq 200} \frac{1}{|\varrho|^4} < (2,56 + 0,76) \cdot 10^{-8} = 3,32 \cdot 10^{-8}. \tag{16}$$

Also ist nach (9)

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} y^3 \sum_{x < v \leq (1+y)^4 x} a_v &> x \cdot [y^4 - (2+y)^4 \cdot 3,32 \cdot 10^{-8}] \\ &- \sqrt{x} \cdot \left[(2+y)^4 \cdot 3,32 \cdot 10^{-8} + 2 \cdot \sum_{0 < \varrho_2 < 200} \frac{|(1+y)^\varrho - 1|^4}{|\varrho|^4} \right] - \frac{1}{12x^2}.\end{aligned} \tag{17}$$

Um auch diese letzte Summe noch abzuschätzen, braucht man genauere Angaben über die Lage der Nullstellen mit Ordinate zwischen 0 und 200.

Es ist[15]

$$\begin{aligned}14 \leq \varrho_2^{(1)} \leq 20 \leq \varrho_2^{(2)} \leq 24 \leq \varrho_2^{(3)} \leq 30 \leq \varrho_2^{(4)} \text{ und } \varrho_2^{(5)} \leq 34 \leq \varrho_2^{(6)} \\ \text{bis } \varrho_2^{(10)} \leq 50 \leq \varrho_2^{(11)} \text{ bis } \varrho_2^{(29)} \leq 100 \leq \varrho_2^{(30)} \text{ bis } \varrho_2^{(79)} \leq 200.\end{aligned} \tag{18}$$

Es sei im folgenden $y = \frac{1}{34}$; dann ist $(1+y)^4 < \frac{9}{8}, (2+y)^4 < 17$. Weiter ist dann für die Nullstellen mit $|\varrho_2| < 200$

$$(1+y)^\varrho - 1 = \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\varrho_2 \log \frac{35}{34}\right) - 1 + i \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\varrho_2 \log \frac{35}{34}\right)$$

Sobald der Realteil negativ ist, nimmt sein Absolutbetrag zu mit wachsendem ϱ_2, der des Imaginärteils nimmt ebenfalls zu mit wachsendem ϱ_2, und zwar so lange, als $\varrho_2 \cdot \log\frac{35}{34} < \frac{\pi}{2}$ bleibt, also sicher für $\varrho_2 \leq 50$. Daher ist nach (18)

$$\begin{aligned}\sum_{0 < \varrho_2 < 200} \frac{|(1+y)^\varrho - 1|^4}{|\varrho|^4} &< \left| \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(34 \log \frac{35}{34}\right) - 1 + i \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(34 \log \frac{35}{34}\right) \right|^4 \\ &\quad \times \left[\frac{1}{14^4} + \frac{1}{20^4} + \frac{1}{24^4} + \frac{1}{30^4}\right] \\ &+ \left| \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(50 \log \frac{35}{34}\right) - 1 + i \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(50 \log \frac{35}{34}\right) \right|^4 \cdot \frac{5}{34^4} \\ &+ \left[1 + \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^4 \cdot \left[\frac{19}{50^4} + \frac{50}{100^4}\right] \\ &< 1 \cdot \left[\frac{1}{14^4} + \frac{1}{20^4} + \frac{1}{24^4} + \frac{2}{30^4}\right] + 4 \frac{5}{34^4} + 16,5 \cdot \left[\frac{19}{50^4} + \frac{50}{100^4}\right]\end{aligned}$$

[15] Vgl. die schon zitierten Arbeiten von Backlund und Großmann.

oder

$$\sum_{0<\varrho_2<200} \frac{|(1+y)^\varrho - 1|^4}{|\varrho|^4} < 11,12 \cdot 10^{-5}. \tag{19}$$

Aus (17) und (19) folgt für $y = \frac{1}{34}$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{34^2} \sum_{x<v\leq\frac{9}{8}x} a_v > x\left(\frac{1}{34^4} - 17\cdot 3,32\cdot 10^{-8}\right) - \sqrt{x}(17\cdot 3,32\cdot 10^{-8} + 2\cdot 11,12\cdot 10^{-5}) - \frac{1}{12\,x^2}$$

Es sei $x > 4000000$; dann ist

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{34^5} \sum_{x<v\leq\frac{9}{8}x} a_v > (18,38 - 11,16)\cdot 10^{-8}\,x > 7\cdot 10^{-8}\,x,$$

also

$$\sum_{x<v\leq\frac{9}{8}x} a_v > 7\cdot\frac{3}{2}\cdot 34^3\cdot 10^{-8}\,x > 40\cdot 10^{-4}\,x. \tag{20}$$

Setzt man hier für a_v seinen Wert nach (2) ein, dann erhält man

$$\psi\left(\frac{9}{8}\,x\right) - \psi(x) > 40\cdot 10^{-4}\,x$$

oder wegen (1)

$$\vartheta\left(\frac{9}{8}\,x\right) - \vartheta(x) > \psi\left(\frac{9}{8}\,x\right) - \psi(x) - 2\psi\left(\sqrt{\frac{9}{8}\,x}\right) > 40\cdot 10^{-4}\,x - 2\psi\left(\sqrt{\frac{9}{8}\,x}\right)$$

Nun ist[16]

$$\psi(z) < 1,106\,z + 3\log^2 z + 8\log z + 5.$$

Also ist für $x \geq 4000000$

$$\psi\left(\sqrt{\frac{9}{8}\,x}\right) < 1,25\cdot\sqrt{\frac{9}{8}\,x} < 1,34\cdot\sqrt{x} < 6,7\cdot 10^{-4}\,x,$$

d. h.

$$\vartheta\left(\frac{9}{8}\right) - \vartheta(x) > (40 - 13,4)\cdot 10^{-4}\,x > 26\cdot 10^{-4}\,x > 0. \tag{21}$$

Zwischen x und $\frac{9}{8}x$ liegen also für $x \geq 4.10^6$ stets Primzahlen. Mit Hilfe der Lehmerschen Tabellen wird die Gültigkeit des Satzes festgestellt für $x \geq 48$. Man

[16] Landau, Handbuch 1, §22, S. 90.

überzeugt sich nämlich leicht, daßin den bis 10^7 reichenden Tabellen die Differenz zweier aufeinanderfolgender Primzahlen stets kleiner als 1000 ist, so daß der Satz für $8000 < x < 4.10^6$ offenbar gilt. Entsprechend sieht man weiter, daßder Satz richtig ist für $800 < x \leq 8000$, weil für Werte unterhalb 8000 die Differenz zweier aufeinanderfolgender Primzahlen < 100 ist. Unterhalb 800 wieder ist diese Differenz < 20, der Satz gilt also für $160 < x \leq 800$. Und schlieist von den im folgenden angeführten Primzahlen jede kleiner als das $\frac{9}{8}$-fache der vorhergehenden, die erste ist kleiner als $\frac{9}{8} \cdot 48$ und die letzte größer als 160 :

$$53, 59, 61, 67, 73, 79, 83, 89, 97, 109, 113, 127, 139, 151, 167.$$

Damit ist gezeigt: für $x \geq 48$ liegen zwischen x und $\frac{9}{8}x$ stets Primzahlen.

Zweiter Teil. §1.

χ sei irgendein Charakter mod k, k eine beliebige natürliche Zahl. $L(s, \chi)$ sei die zugehörige Dirichletsche L-Funktion, die für $\sigma > 1$ definiert ist durch

$$L(s, \chi) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\chi(v)}{v^s}.$$

Dann ist[17]

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = -\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\chi(v) a_v}{v^s}$$

für $\sigma > 1$ absolut konvergent. a_v ist dabei durch die Relation (2) im ersten Teil erklärt. Also gilt

$$(1) \qquad \begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{x^s}{s^4} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{x^s}{s^4} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{\chi(v) a_v}{v^s}\, ds \\ &= \sum_{v=2}^{\infty} \chi(v) a_v \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{\left(\frac{x}{v}\right)^s}{s^4} ds = \frac{1}{6} \sum_{v \leq x} \chi(v) a_v \log^3 \frac{x}{v}, \end{aligned}$$

ganz analog zu den Entwicklungen in § 1 des ersten Teiles.

Es sei $h = \varphi(k)$ =Anzahl der zu k teilerfremden Zahlen zwischen 0 und k. Dann ist für zu k teilerfremdes l

$$\sum_{\chi} \frac{\chi(n)}{\chi(l)} = \begin{cases} 0 & für \quad n \not\equiv l \pmod{k}, \\ h & für \quad n \equiv l \pmod{k}. \end{cases}$$

[17]Vgl. Landau, Handbuch 1, S. 420.

Hierbei soll die Summe erstreckt werden über alle Charaktere mod k. Sei nämlich so beschaffen, daß $r \cdot l \equiv 1 \pmod{k}$ ist. Dann wird $\chi(r) \cdot \chi(l) = 1$ und[18]

$$\sum_{\chi} \frac{\chi(n)}{\chi(l)} = \sum_{\chi} \chi(r) \cdot \chi(n) = \sum_{\chi} \chi(r \cdot n) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r \cdot n \not\equiv 1 \pmod{k}, \\ h & \text{für} \quad r \cdot n \equiv 1 \pmod{k}, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \not\equiv l \pmod{k}, \\ h & \text{für} \quad n \equiv l \pmod{k}. \end{cases}$$

Daraus und aus (1) folgt

$$-\sum_{\chi} \frac{1}{\chi(l)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{x^s}{s^4} \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} ds = \frac{1}{6} \sum_{v \le x} a_v \log^3 \frac{x}{v} \sum_{\chi} \frac{\chi(v)}{\chi(l)}$$

oder

$$-\sum_{\chi} \frac{1}{\chi(l)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{x^s}{s^4} \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} ds = \frac{h}{6} \sum_{\substack{v \le x \\ v = l \pmod{k}}} a_v \log^3 \frac{x}{v}. \tag{2}$$

§ 2.

Es wird sich auch hier als notwendig erweisen, die Anzahl $N(T)$ der Nullstellen von $L(s,\chi)$ mit Ordinate zwischen 0 und T abzuschätzen. Für unsere Zwecke genügt eine etwas rohere Abschätzung, die ganz analog zu der in Landaus Vorlesungen über Zahlentheorie 2, S. 87 hergeleitet wird.

Es sei χ speziell ein reeller, eigentlicher Charakter, für den $\chi(-1) = -1$ ist. Dann ist[19]

$$L(s,\chi) = a e^{bs} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \prod_{\varrho^*} \left(1 - \frac{s}{\varrho^*}\right) e^{\frac{s}{\varrho^*}}$$

a und b sind dabei Konstante, und ϱ^* durchlaufe die nicht-trivialen Null stellen von $L(s,\chi)$. Daraus folgt

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = b - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} + \sum_{\varrho^*} \left(\frac{1}{s-\varrho^*} + \frac{1}{\varrho^*}\right). \tag{3}$$

Für $s = 0$ erhält man hieraus

$$b = \frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

[18] Ebenda, S. 408, Satz 4.
[19] Landau, Handbuch 1, S. 507.

Weiter sei

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s,\chi).$$

Dann ist[20], da χ als reeller Charakter mit seinem konjugiert komplexen identisch ist,

$$\frac{\xi'(s,\chi)}{\xi(s,\chi)} = -\frac{\xi'(1-s,\chi)}{\xi(1-s,\chi)}.$$

Also

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} - \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{k} = -\frac{L'(1-s,\chi)}{L(1-s,\chi)} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)} + \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{k},$$

$$b = \frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + \log\frac{\pi}{k}.$$

Daraus und aus (3) folgt

$$\text{(4)} \qquad \sum_{\varrho^*}\left(\frac{1}{s-\varrho^*} + \frac{1}{\varrho^*}\right) = \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} + \frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \log\frac{x}{k}.$$

Es sei für das folgende $s = \frac{3}{2} + it$, $\varrho^* = \varrho_1^* + i\varrho_2^*$; t, ϱ_1^*, und ϱ_2^* reell. Dann ist wegen $0 < \varrho_1^* < 1$

$$R\left(\frac{1}{\varrho^*}\right) = \frac{\varrho_1^*}{\varrho_1^{*2} + \varrho_2^{*2}} > 0\ ; \qquad R\left(\frac{1}{s-\varrho^*}\right) = \frac{\frac{3}{2} - \varrho_1^*}{\left(\frac{3}{2} - \varrho_1^*\right)^2 + (t-\varrho_2^*)^2} > 0.$$

$R()$ bedeutet hier den reellen Teil der betreffenden komplexen Größe. Aus den beiden obenstehenden Relationen schließt man weiter

$$\text{(5)} \qquad \sum_{|t-\varrho_1^*|\le\frac{1}{2}} R\left(\frac{1}{s-\varrho^*}\right) < R\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} + \frac{2}{2}R\frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} + \frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \log\frac{\pi}{k}.$$

Im Falle reeller Charaktere liegen die Nullstellen symmetrisch zu $\sigma = \frac{1}{2}$, d. h. mit der Nullstelle $\varrho^* = \varrho_1^* + i\varrho_2^*$ gibt es auch eine $\varrho^{**} = 1 - \varrho_1^* + i\varrho_2^*$. Es ist

$$R\left(\frac{1}{s-\varrho^*}\right) + R\left(\frac{1}{s-\varrho^{**}}\right) = \frac{\frac{3}{2} - \varrho_1^*}{\left(\frac{3}{2} - \varrho_1^*\right)^2 + (t-\varrho_2^*)^2} + \frac{\frac{1}{2} + \varrho_1^*}{\left(\frac{1}{2} + \varrho_1^*\right)^2 + (t-\varrho_2^*)^2}.$$

[20]Landau, Handbuch 1, S. 511.

Diese Funktion von ϱ_1^* hat bei festem t und ϱ_2^* ihren kleinsten Wert im Intervall $(0,1)$ an der Stelle $\varrho_1^* = \frac{1}{2}$, wovon man sich etwa auf folgende Weise überzeugen kann : Es sei $\varrho_1^* = \frac{1}{2} + \alpha$. Dann ist zu zeigen, daß die Funktion von α

$$\Phi(\alpha) = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2 + (t-\varrho_2^*)^2} + \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)^2 + (t-\varrho_2^*)^2}$$

ihren kleinsten Wert im Intervall $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ annimmt für $\alpha = 0$. Dabei soll $|t-\varrho_2^*| \leq \frac{1}{2}$ sein ; es sei abgekürzt $a^2 = (t-\varrho_2^*)^2$. Man bilde

$$\Phi(\alpha)-\Phi(0) = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2+a^2} + \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)^2+a^2} - \frac{2}{1+a^2} = \frac{2\alpha^2 \cdot [1-3a^2-\alpha^2]}{[(1-\alpha)^2+a^2]\cdot[(1+\alpha)^2+a^2]\cdot[1+a^2]}.$$

Der Nenner ist stets positiv, der Zähler ist $\geq 2\alpha^2[\frac{1}{4} - \alpha^2] \geq 0$ für $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$. Also nimmt $\Phi(\alpha)$ im Intervall $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ tatsächlich seinen kleinsten Wert an für $\alpha = 0$. Folglich ist

$$R\left(\frac{1}{s-\varrho^*}\right) + R\left(\frac{1}{s-\varrho**}\right) \geq 2\cdot\frac{1}{1+a^2} \geq \frac{2}{1+\dfrac{1}{4}} = \frac{8}{5}.$$

Nun ist offenbar

$$\frac{1}{2}\cdot\left[N\left(t+\frac{1}{2}\right) - N\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot \text{Min}\left\{R\left(\frac{1}{s-\varrho^*}\right) + R\left(\frac{1}{s-\varrho^{**}}\right)\right\} \leq \sum_{|t-\varrho_2^*|\leq\frac{1}{2}} R\left(\frac{1}{s-\varrho^*}\right),$$

also nach (5), wenn man für das Minimum den gefundenen Wert $\frac{8}{5}$ einsetzt,

$$N\left(t+\frac{1}{2}\right) - N\left(t-\frac{1}{2}\right) < \frac{5}{4}\cdot\left[R\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} + \frac{1}{2}\,R\frac{\Gamma'\left(\dfrac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{s+1}{2}\right)} + \frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \log\frac{\pi}{k}\right]. \tag{6}$$

Es sei nun

a) $k = 3$; dann ist

$$R\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} \leq \left|\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right| \leq \sum_{v=1}^{\infty}\frac{a_v|\chi(v)|}{v^{\frac{3}{2}}} < \frac{\log 2}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{\log 2}{4^{\frac{3}{2}}} + \frac{\log 5}{5^{\frac{3}{2}}} + \int_6^\infty \frac{\log x}{x^{\frac{3}{7}}}\,dx < 3,6 \;;$$

$$L(1,\chi) = 1 - \tfrac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots > \frac{1}{2}, \quad L'(1,\chi) = \frac{\log 2}{2} - \frac{\log 4}{4} + \ldots < \frac{\log 2}{2},$$

$$\frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)} < \log 2 < 0,7\;; \quad -\log\frac{\pi}{k} = -\log\frac{\pi}{3} < 0.$$

Also insgesamt

(7) $$R\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}+\frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)}-\log\frac{\pi}{k}<4,3.$$

b) $k=4$; dann ist

$$R\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}<\frac{\log 3}{3^{\frac{3}{2}}}+\frac{\log 5}{5^{\frac{3}{2}}}+\int\limits_0^\infty\frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}}}dx<3,55\ ;$$

$$L(1,\chi)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\ldots>0,78,\quad L'(1,\chi)=\frac{\log 3}{3}-\frac{\log 5}{5}+\ldots<\frac{\log 3}{3},$$

$$\frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)}<\frac{\log 3}{3\cdot 0,78}<0,5\ ;\quad -\log\frac{\pi}{k}=\log\frac{4}{\pi}<0,25.$$

Also wieder

(7) $$R\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}+\frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)}-\log\frac{\pi}{k}<4,3.$$

Weiter ist
$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}=-\frac{1}{s}-C+s\cdot\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n(s+n)}\qquad(C=0,57\ldots).$$

Folglich

(8) $$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=-1,57+\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n(n+1)}<0.$$

Und schlieist[21]

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2z}+\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{z+u}-\frac{1}{1+u}\right)du+\frac{f_1(0)}{z^2}-2\int\limits_0^\infty\frac{f_1(u)}{(u+z)^3}du.$$

Dabei ist $|f_1(u)<1$. Setzt man $z=s_1+iz_2$, dann wird

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2z}+\frac{f_1(0)}{z^2}-2\int\limits_0^\infty\frac{f_1(u)}{(u+z)^3}du-\frac{1}{2}\log(z_1^2+z_2^2)+i\ \text{arc tg}\frac{z_1}{z_2}-i\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Hierin ist für $z_1>0$

$$2\cdot\left|\int\limits_0^\infty\frac{f_1(u)}{(u+z)^3}du\right|<2\cdot\int\limits_0^\infty\frac{du}{(z_2^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{z_2^2}\cdot\int\limits_0^\infty\frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}<\frac{\pi}{z_2^2}$$

[21]Vgl. Landau, Vorl. üb. Zahlentheorie 2, S. 81.

und

$$R\left(\frac{1}{2z}\right) < \frac{z_1}{2z_2^2}.$$

Also ist für $z_2 > 0$

$$R\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} < \frac{1}{2}\log(z_1^2+z_2^2) + \frac{1}{z_2^2}\cdot\left(\pi+1+\frac{z_1}{2}\right) < \log z_2 + \frac{1}{z_2^2}\cdot\left(\frac{z_1^2}{2}+\pi+1+\frac{z_1}{2}\right),$$

und speziell (für $t > 0$)

$$R\frac{\Gamma'\left(\dfrac{\frac{3}{2}+it+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\frac{3}{2}+it+1}{2}\right)} = R\frac{\Gamma'\left(\frac{5}{4}+i\,\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}+i\,\frac{t}{2}\right)} < \log\frac{t}{2}+\frac{24}{t^2}. \tag{9}$$

Aus (6), (7), (8) und (9) folgt für positives t

$$N\left(t+\frac{1}{2}\right) - N\left(t-\frac{1}{2}\right) < \frac{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\log\frac{t}{2}+\frac{12}{t^2}+4,3\right) < \frac{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\log t+4+\frac{12}{t^2}\right)$$

oder

$$N\left(t+\frac{1}{2}\right) - N\left(t-\frac{1}{2}\right) < \frac{5}{8}\log t + 5 + \frac{15}{t^2}. \tag{10}$$

Diese Abschätzung über die Anzahl der Nullstellen gilt also dabei für die Reihen mit den Nicht-Hauptcharakteren nach dem Modul 3 *und* nach dem Modul 4.

Außerdem haben beide Reihen noch die trivialen Nullstellen $-1, -3, -5, \ldots$.

χ_1 sei nun der Hauptcharakter mod k (k wieder $= 3$ oder $= 4$).

Dann ist[22]

$$L(s,\chi_1) = \left(\frac{1}{p^s}\right)\cdot\zeta(s)\ ;$$

dabei ist $p = 3$ für $k = 3$ und $p = 2$ für $k = 4$. $L(s,\chi_1)$ verschwindet daher an den Nullstellen von $\zeta(s)$ und außerdem an den Stellen

$$s = \frac{2m\pi\, i}{\log p} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

[22] Landau, Handbuch 1, S. 423.

χ sei wieder der Nicht-Hauptcharakter. Es ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}ds = \sum \text{Resid.},$$

wobei die Summe erstreckt werden soll über alle Pole des Integranden in der Halbebene $\sigma < 2$. Beweis genau wie in Teil I, § 2, nur mit dem Unter schied, daßjetzt über den Rand des Rechtecks mit den Ecken

$$2-iT, \quad 2+iT, \quad -2m+iT, \quad -2m-iT$$

integriert werden muß.

Der Integrand hat Pole an folgenden Stellen :

a) an den Nullstellen ϱ^* von $L(s,\chi)$ im Gebiet $0 < \sigma < 1$. Summe der Residuen ist hier $\sum\limits_{\varrho^*} \dfrac{x^{\varrho^*}}{\varrho^{*4}}$;

b) an den Stellen $s = -(2n+1) \quad (n = 0,1,2,...)$. Summe der Residuen :$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{-(2n+1)}}{(2n+1)^4}$;

c) an der Stelle $s=0$; Residuum: $c_0 + c_1 \log x + c_2 \log^2 x + c_3 \log^3 x$.

Also ist

(11) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{\varrho^*}\frac{x^{\varrho^*}}{\varrho^{*4}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{-(2n+1)}}{(2n+1)^4} + c_0 + c_1 \log x + c_2 \log^2 x + c_3 \log^3 x,$$

Weiter ist

(12) $$\frac{L'(s,\chi_1)}{L(s,\chi_1)} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\log p}{p^s - 1}.$$

Wenn ϱ wieder die nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ durchläuft, dann ist nach Teil I, (5) und (6)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}ds = -x + \sum_{\varrho}\frac{x^\varrho}{\varrho^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{(2n)^4}$$

$$+ b_0 + b_1 \log x + b_2 \log^2 x + b_3 \log^3 x + \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\frac{\log p}{p^s - 1}ds.$$

Dieses zweite Integral ist offenbar ebenfalls gleich der Summe der Residuen seines Integranden in der Halbebene $\sigma < 2$. Denn wenn man wieder inte griert über den Rand des Rechtecks mit den Ecken

$$2 - iT, \quad 2 + iT, \quad -S + iT, \quad -S - iT,$$

$S > 0$ und T etwa $= \dfrac{(2m+1)x}{\log p}$ sein soll (m positiv ganzzahlig), dann ist für $x > 1$

$$\Big| \int\limits_{-S+iT}^{2+iT} \frac{x^s}{s^4} \frac{\log p}{p^s - 1} ds \Big| < \frac{x^2 \log p \cdot (S+2)}{T^4}$$

entsprechend $\Big| \int\limits_{-S-iT}^{2-iT} \Big|$. Beide Teilintegrale gehen also mit wachsendem m gegen 0. Und für den dritten Bestandteil gilt

$$\Big| \int\limits_{-S-i\infty}^{-S+i\infty} \frac{x^s}{s^4} \frac{\log p}{p^s - 1} ds \Big| < \frac{\log p}{1 - p^{-s}} x^{-s} \Big| \int\limits_{-S-i\infty}^{-S+i\infty} \frac{ds}{s^4} \Big| ;$$

auch dieses Integral geht mit wachsendem S gegen 0.

Der Integrand $\dfrac{x^s}{s^4} \dfrac{\log p}{p^s - 1}$ hat Pole an den Stellen 0 und $\dfrac{2\mu\pi i}{\log p}$. Die Summe der Residuen an den Stellen $\dfrac{2\mu\pi i}{\log p}$ ist

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{x^{\frac{2\mu\pi i}{\log p}}}{\left(\frac{2\mu\pi i}{\log p}\right)^4}.$$

Der Strich besagt dabei, $\mu = 0$ soll in der Summierung ausgelassen werden.

Das Residuum an der Stelle $s = 0$ endlich erhält man durch Reihen entwicklung des Integranden

$$\frac{x^s}{s^4} \cdot \frac{\log p}{p^s - 1} = \frac{\left(1 + s \log x + \ldots + \dfrac{s^4 \log^4 x}{4!} + \ldots\right) \cdot \log p}{s^4 \cdot (s \log p + \ldots)}.$$

Das Residuum ist also gleich $\dfrac{\log^4 x}{4!} = \dfrac{\log^4 x}{24}$. Folglich ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s^4} \frac{L'(s,\chi_1)}{L(s,\chi_1)} ds = -x + \sum_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{(2n)^4} + \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{x^{\frac{2\mu\pi i}{\log p}}}{\left(\frac{2\mu\pi i}{\log p}\right)^4} \tag{13}$$

$$+ b_0 + b_1 \log x + b_2 \log^2 x + b_3 \log^3 x + \frac{1}{24}\log^4 x.$$

Aus (2), (11) und (13) folgen dann die expliziten Ausdrücke für $k = 3$ oder $k = 4$, also $h = \varphi(k) = 2$, und für $l = +1$ oder $l = -1$:

$$\frac{1}{3} \sum_{\substack{v \le x \\ v \equiv l \pmod{k}}} a_v \log^3 \frac{x}{v} = x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{(2n)^4} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{x^{\frac{2\mu\pi i}{\log p}}}{\left(\frac{2\mu\pi i}{\log p}\right)^4} \mp \sum_{\varrho^*} \frac{x^{\varrho^*}}{\varrho^{*4}} \mp \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-(2n+1)}}{(2n+1)^4} \tag{14}$$

$$-d_0 - d_1 \log x - d_2 \log^2 x - d_3 \log^3 x - \frac{1}{24}\log^4 x.$$

Dabei sind die d_i Konstante, deren Wert ohne Bedeutung ist.

Von den rechts stehenden Summen sollen zunächst die zweite, die dritte und die fünfte abgeschätzt werden. Es ist

$$\Big| \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\frac{2\mu\pi i}{\log p}}}{\left(\frac{2\mu\pi i}{\log p}\right)^4} \Big| \le 2 \left(\frac{\log p}{2\pi}\right)^4 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^4} \le 2 \left(\frac{\log 3}{2\pi}\right)^4 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^4} < 0,003 \; ; \tag{15}$$

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{(2n)^4} \pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-(2n+1)}}{(2n+1)^4} \Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-n}}{n^4} < \frac{1,1}{x} \quad \mathit{f}\text{ür} \quad x > 1. \tag{16}$$

§ 4.

Es sei abgekürzt

$$\beta(x) = \beta(x\,; k, l) = \sum_{\substack{v \le x \\ v \equiv l \pmod{k}}} a_v \log^3 \frac{x}{v}.$$

Δ soll ganz analog zu Teil I, § 3 gebildet werden :

$$\Delta = \beta((1+y)^4 x) - 4\beta((1+y)^3 x) + 6\beta((1+y)^2 x) - 4\beta((1+y)x) + \beta(x).$$

y bedeute dabei wieder eine reelle positive Größe. Dann ist, entsprechend zu Formel (8) in Teil I,

$$\Delta \le 4y^3 \sum_{\substack{x < v \le (1+y)^4 x \\ v \equiv l \pmod{k}}} a_v. \tag{17}$$

Setzt man in Δ für die Funktionen β ihren Wert nach (14) ein, dann fallen nach Teil I, (7) die logarithmischen Glieder mit Ausnahme des letzten weg, dieses nimmt den

Wert $\frac{1}{24} \cdot 24 \log^4(1+y) < y^4$ an, und man erhält unter Berücksichtigung von (15) und (16):

$$\frac{4}{3} y^3 \sum_{\substack{x<v\leq(1+y)^4 x \\ v\equiv l \pmod{k}}} a_v > y^4 x - \left| \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}[(1+y)^{\varrho} - 1]^4}{\varrho^4} \right| - \left| \sum_{\varrho^*} \frac{x^{\varrho^*}[(1+y)^{\varrho^*} - 1]^4}{\varrho^{*4}} \right|$$

$$- y^4 - 16 \cdot 0,003 - 16 \cdot \frac{1,1}{x}$$

oder

$$(18) \quad \frac{4}{3} y^3 \sum_{\substack{x<v\leq(1+y)^4 x \\ v\equiv l \pmod{k}}} a_v > y^4 x - (2+y)^4 \sum_{\varrho} \left| \frac{x^{\varrho}}{\varrho^4} \right| - (2+y)^4 \sum_{\varrho^*} \left| \frac{x^{\varrho^*}}{\varrho^{*4}} \right| - y^4 - 0,05 - \frac{18}{x}.$$

Es sei von jetzt an $y = \frac{1}{5,5}$; dann ist $(1+y)^4 < 2$ und $(2+y)^4 < 23$.

§ 5.

Nun gilt für die beiden Nicht-Hauptcharaktere (mod 3 und mod 4), daß die Nullstellen ϱ^* von $L(s,\chi)$ mit $|J(\varrho^*)| < 44$ auf $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen[23] ;

$J(\varrho^*)$ bedeute dabei den Imaginärteil von ϱ^*. Da die Nullstellen symmetrisch liegen zu $\sigma = \frac{1}{2}$, so hat von den übrigen höchstens die Hälfte eine Abszisse $R(\varrho^*) = 1$, für mindestens die Hälfte ist $R(\varrho^*) \leq \frac{1}{2}$. Und da die Null stellen auch noch symmetrisch zur reellen Achse liegen, so gilt

$$(19) \quad (2+y)^4 \left[\sum_{\varrho} \frac{|x^{\varrho}}{|\varrho|^4} + \sum_{\varrho^*} \frac{|x^{\varrho^*}}{|\varrho^*|^4} \leq 23 \left[\sum_{J(\varrho)\geq 200} \frac{1}{|\varrho|^4} + \sum_{J(\varrho^*)\geq 44} \frac{1}{|\varrho^*|^4} \right] \right.$$

$$\left. + 23\sqrt{x} \left[\sum_{J(\varrho)\geq 200} \frac{1}{|\varrho|^4} + \sum_{J(\varrho^*)\geq 44} \frac{1}{|\varrho^*|^4} + 2 \sum_{0\leq J(\varrho)<200} \frac{1}{|\varrho|^4} + 2 \sum_{0\leq J(\varrho)<44} \frac{1}{|\varrho^*|^4} \right] \right. .$$

Hierin ist nach Teil I (16)

$$\sum_{J(\varrho)\geq 200} \frac{1}{|\varrho|^4} < 3,32 \cdot 10^{-8}.$$

[23] Großmann, a. a. O., §§7 und 8.

Weiter ist nach (10)

$$\sum_{J(\varrho^*)\geq 44}\frac{1}{|\varrho^*|^4}\leq\sum_{n=41}^{\infty}\frac{N(n+1)-N(n)}{n^4}<\sum_{n=44}^{\infty}\frac{\frac{5}{8}\log\left(n+\frac{1}{2}\right)+5+\frac{15}{n^2}}{n^4}$$

$$\sum_{n=44}^{\infty}\frac{\frac{5}{8}\log n+5,1}{n^4}<\int\limits_{43}^{\infty}\frac{\frac{5}{8}\log n+5,1}{x^4}dx<3,28\cdot 10^{-5}.$$

Also ist

$$(20)\quad 23\left[\sum_{J(\varrho)\geq 200}\frac{1}{|\varrho|^4}+\sum_{J(\varrho^*)\geq 44}\frac{1}{|\varrho^*|^4}\right]<23\cdot 3,3\cdot 10^{-5}<7,6\cdot 10^{-4}$$

Nach Teil I, (18) ist

$$(21)\quad \sum_{0\leq J(\varrho)<200}\frac{1}{|\varrho|^4}<\frac{1}{14^4}+\frac{2}{20^4}+\frac{7}{30^4}+\frac{19}{50^4}+\frac{50}{100^4}<5,1\cdot 10^{-5}.$$

Die Nullstellen von $L(s,\chi)$ mit $0\leq J(\varrho)<44$ liegen in den beiden Fällen folgendermaßen[24] :

a) $k=3$.

$$\begin{aligned}8\ &\leq J\left(\varrho^{*(1)}\right)\leq 10\leq J\left(\varrho^{*(2)}\right)\leq 12\leq J\left(\varrho^{*(3)}\right)\leq 18\leq J\left(\varrho^{*(4)}\right)\leq 20\\ &\leq J\left(\varrho^{*(5)}\right)\leq 24\leq J\left(\varrho^{*(6)}\right)\ \text{ bis }\ J\left(\varrho^{*(8)}\right)\leq 30\leq J\left(\varrho^{*(9)}\right)\ \text{ bis }\ J\left(\varrho^{*(14)}\right)\leq 44\end{aligned}$$

b) $k=4$.

$$\begin{aligned}6\ &\leq J\left(\varrho^{*(1)}\right)\leq 10\leq J\left(\varrho^{*(2)}\right)\leq 12\leq J\left(\varrho^{*(3)}\right)\leq 16\leq J\left(\varrho^{*(4)}\right)\leq 18\\ &\leq J\left(\varrho^{*(5)}\right)\leq 20\leq J\left(\varrho^{*(6)}\right)\ \text{ und }\ J\left(\varrho^{*(7)}\right)\leq 24\\ &\leq J\left(\varrho^{*(8)}\right)\ \text{ bis }\ J\left(\varrho^{*(10)}\right)\leq 30J\left(\varrho^{*(11)}\right)\ \text{ bis }\ J\left(\varrho^{*(17)}\right)\leq 45\end{aligned}$$

Also ist für $k=3$

$$\sum_{0\leq J(\varrho^*)<44}\frac{1}{|\varrho^*|^4}\leq\frac{1}{8^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{12^4}+\frac{1}{18^4}+\frac{1}{20^4}+\frac{1}{24^4}+\frac{1}{30^4}<4,3\cdot 10^{-4}$$

und für $k=4$

$$\sum_{0\leq J(\varrho^*)<44}\frac{1}{|\varrho^*|^4}\leq\frac{1}{6^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{12^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{18^4}+\frac{1}{20^4}+\frac{1}{24^4}+\frac{1}{30^4}<9,76\cdot 10^{-4}.$$

[24]Großmann, a. a. O., §§7 und 8.

Hieraus und aus (21) folgt für beide Fälle

$$(22)\quad 2\cdot 23\left[\sum_{0\le J(\varrho^*)<200}\frac{1}{|\varrho|^4}+\sum_{0\le J(\varrho^*)<44}\frac{1}{|\varrho^*|^4}\right]$$
$$46\,[5,1\cdot 10^{-5}+97,6\cdot 10^{-5}]<0,048.$$

Also ist nach (18), (19), (20) und (22)

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{5,5^3}\sum_{\substack{x<v\le 2x\\ v\equiv l \pmod k}} a_v > x\left[\frac{1}{5,5^4}-7,6\cdot 10^{-4}\right]-\sqrt{x}\left[7,6\cdot 10^{-4}+0,048\right]-0,05-\frac{1}{5,5^4}-\frac{18}{x}$$

$$>3,3\cdot 10^{-4}\,x-0,049\sqrt{x}-0,06-\frac{18}{x}.$$

Es sei nun $x\ge 10^6$; dann ist

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{5,5^3}\sum_{\substack{x<v\le 2x\\ v\equiv l \pmod k}} a_v>(3,3-0,5)\cdot 10^{-4}\,x=2,8\cdot 10^{-4}\,x$$

oder

$$(23)\qquad \sum_{\substack{x<v\le 2x\\ v\equiv l \pmod k}} a_v>\frac{2,8\cdot 5,5^3\cdot 3}{4}\cdot 10^{-4}\,x>3,4\cdot 10^{-2}\,x.$$

Weiter ist nach Definition

$$\sum_{\substack{x<v\le 2x\\ v\equiv l \pmod k}} a_v-\sum_{\substack{x<p\le 2x\\ p\equiv l \pmod k}}\log p=\sum_{\substack{x<p^\mu\le 2x\\ p^\mu\equiv l \pmod k\\ \mu>1}}\log p\le\sum_{\substack{p^\mu\le 2x\\ \mu>1}}\log p$$

$$=\psi(2x)-\vartheta(2x)\le 2\psi(\sqrt{2x}),$$

also für $x\ge 10^6$

$$\sum_{\substack{x<v\le 2x\\ v\equiv l \pmod k}} a_v-\sum_{\substack{x<p\le 2x\\ p\equiv l \pmod k}}\log p<2[1,106\sqrt{2x}+3\log^2\sqrt{2x}+8\log\sqrt{2x}+5]<3,8\sqrt{x}.$$

Daraus endlich und aus (23) folgt

$$(24)\qquad \sum_{\substack{x<p\le 2x\\ p\equiv l \pmod k}}\log p>3,4\cdot 10^{-2}\,x-3,8\sqrt{x}>3\cdot 10^{-2}\,x>0,$$

für $x\ge 10^6, k=3$, und $l=1$ oder $k=3$ und $l=2$ oder $k=4$ und $l=1$ oder $k=4$ und $l=3$. D. h. für $x\ge 10^6$ liegen zwischen x und $2x$ stets Primzahlen einer jeden der vier Progressionen.

Um den Satz für $7 \leq x < 10^6$ zu beweisen, braucht man wieder Primzahltabellen. Für $24 \leq x < 10^6$ liegen zwischen x und $2x$ sogar stets Primzahlen einer jeden der beiden Progressionen $12n + 1$ und $12n - 1$; denn in den im folgenden angeführten zwei Systemen von Primzahlen der Form $12n + 1$ bzw. $12n - 1$ ist die jeweils erste kleiner als 2.24, jede der folgenden kleiner als das Doppelte der vorhergehenden und die letzte gröals 10^6 :

a) $12n + 1$.
37, 73, 109, 193, 373, 733, 1453, 2857, 5701, 11 353, 22 669, 45 289, 90 529, 180 949, 361 873, 723 661, 1 447 309.

b) $12n - 1$.
47, 83, 131, 251, 491, 971, 1823, 3623, 7211, 14 411, 28 751, 57 467, 114 827, 229 631, 459 167, 918 263, 1 836 479.

Und für $7 \leq x < 24$ endlich liegen zwischen x und $2x$ stets Primzahlen einer jeden der vier Progressionen, wie die folgenden vier Systeme von Primzahlen zeigen :

$$\begin{array}{lll} a) & \text{3n+1:} & 13, 19, 37 \\ b) & \text{3n+2:} & 11, 17, 29 \\ c) & \text{4n+1:} & 13, 17, 29 \\ d) & \text{4n+3:} & 11, 19, 31. \end{array}$$

(Eingegangen am 15. September 1930.)