Pour généraliser le postulat de Bertrand selon lequel il y a toujours un nombre premier entre x et $2x$.

par
Robert Breusch, Freiburg

Introduction.

Du théorème des nombres premiers

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$$

il s'ensuit que pour ε positif et a suffisamment grand entre x et $(1+\varepsilon).x$ il y a toujours des nombres premiers si $x \geq a$. Cependant, cela ne fournit pas encore de méthode pour déterminer numériquement un a suffisamment grand pour un nombre fixe ε donné.

Le résultat le plus important dans cette direction jusqu'à présent est le suivant[1] : si $\varepsilon > \frac{1}{5}$ alors pour a suffisamment grand et $x \geq a$, il y a toujours des nombres premiers entre x et $(1+\varepsilon).x$ et les nombres suffisamment grands a peuvent être déterminés relativement facilement ici. Pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$ par exemple, le Prof. I. Schur a effecté le calcul et prouvé la validité du théorème [2] pour tous les nombres $x \geq 24$.

Dans la partie I du présent travail, la preuve sera apportée que pour $x \geq 48$, il y a toujours des nombres premiers entre x et $\frac{9}{8}x$, et dans la partie II, on montrera que pour $x \geq 7$ il y en a toujours de chacune des quatre progressions $3n+1, 3n+2, 4n+1, 4n+3$ entre x et $2x$.

Des informations numériques précises sur le nombre et la position des zéros de la fonction ζ de Riemann et certaines séries L de Dirichlet sont utilisées dans les preuves, à savoir : von Backlund fournit une estimation du nombre $N(T)$ des zéros non triviaux de $\zeta(s)$ d'ordonnée comprise entre 0 et T[3] ; le même auteur fournit une preuve que les zéros de $\zeta(s)$ qui ont une ordonnée comprise entre 0 et 200 ont une abscisse égale à $\frac{1}{2}$ [4] ainsi que des informations précises sur la position de ces zéros ;

Retranscription en Latex Denise Vella-Chemla, juillet 2022, traduction Google translation corrigée.

[1] Vgl. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 1909, 1, §22.

[2] I. Schur, Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen I, Sitzungsberichte der preuß. Akad. d. Wissensch., phys.-math. Klasse 1929, S. 128.

[3] Backlund, Über die Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion, Acta mathematica 41 (1918), S. 355.

[4] Backlund, Über die Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion, Dissertation Helsingfors 1916.

von J. Großmann donne des informations sur les premiers zéros de $\zeta(s)$ et de fonctions L[5]. La connaissance de nombres premiers spéciaux était vraiment nécessaire pour effectuer les calculs numériquement, les tables de D. N. Lehmer[6] ont été utilisées.

Je dois des remerciements particuliers au Prof. I. Schur, qui a suggéré le travail, et au Prof. Loewy, qui ont montré leur grand intérêt.

Première partie.
§1.

Dans la notation habituelle

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p \quad (m \text{ entier positif}) \ ;$$

p, comme toujours dans ce qui suit, doit prendre des valeurs premières. Alors

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \ldots . \\ \psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) &= \vartheta(x) - \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) - \ldots . \end{aligned}$$

Il s'ensuit

(1) $$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) \leq \vartheta(x) \leq \psi(x).$$

Si on pose $s = \sigma + it$ et

(2) $$a_n = \psi(n) - \psi(n-1),$$

alors pour $\sigma > 1$

(3) $$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{v=1}^{\infty} \frac{a_v}{v^s}.$$ [7]

Ici $\zeta(s)$ est la fonction ζ de Riemann, qui est définie pour $\sigma > 1$ par la série $\zeta(s) = \sum\limits_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^s}$.

Cette phrase s'applique également : si $\int\limits_{(2)}$ désigne dans le plan des nombres complexes les nombres le long de la ligne entière $\sigma = 2$, alors[8]

---

[5] J. Großmann, Über die Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion und der Dirichletschen L-Funktionen, Dissertation Göttingen 1913.

[6] D. N. Lehmer, List of prime numbers from 1 to 10 006 721, Washington 1914.

[8] Vgl. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig 1927, 2, S. 21, Satz 377 ; si on utilise s^2 au lieu de s^4, mais la preuve peut être effectuée de manière analogue dans le cas présent.

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{y^s}{s^4} ds = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \frac{1}{6}\log^3 y & \text{pour } y \geq 1. \end{cases}$$

Ainsi on a

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{a_v}{v^s} ds = \sum_{v=1}^{\infty} a_v \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{\left(\frac{x}{v}\right)^s}{s^4} ds$$

ou, découlant de (4),

$$(5) \qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \frac{1}{6}\sum_{v \leq x} a_v \log^3 \frac{x}{v}$$

§2.

Utilisons dans la suite l'abréviation

$$\alpha(x) = \sum_{v \leq x} a_v \log^3 \frac{x}{v}$$

Alors la formule (5) dans la nouvelle notation se lit

$$(5') \qquad \frac{1}{6}\alpha(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds.$$

L'intégrande doit d'abord être intégré dans le plan des nombres complexes sur le bord du rectangle de sommets

$$2 - iT, \qquad 2 + iT, \qquad -(2m+1) + iT, \qquad -(2m+1) - iT.$$

Ici, m doit être un entier positif et T doit être choisi positif de sorte qu'aucun zéro de $\zeta(s)$ n'ait l'ordonnée T. On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT}^{2+iT} \frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{-(2m+1)-iT}^{-(2m+1)+iT} \frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{-(2m+1)+iT}^{2+iT} \frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \\ -\frac{1}{2\pi i}\int_{-(2m+1)-iT}^{2-iT} \frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds + \sum \text{Resid.}, \end{aligned}$$

où la somme doit être étendue sur tous les pôles de l'intégrande dans le rectangle.

Les valeurs absolues des deux intégrales $\int\limits_{-(2m+1)+iT}^{2+iT}$ et $\int\limits_{-(2m+1)-iT}^{2-iT}$ sont plus petites que [9] $\dfrac{cx^3 \log T}{(x-1)T^4}$, les deux intégrales tendent vers 0 pour $x > 1$ lorsque T augmente. c, ainsi que c_1 ci-dessous, sont des constantes.

De plus[10], pour $\sigma = -(2m+1)$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < c_1 \log |s| < c_1 \log\left(|t| + 2m + 1\right),$$

alors

$$\left|\int\limits_{-(2m+1)-i\infty}^{-(2m+1)+i\infty} \frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds\right| < c_1 x^{-(2m+1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\left(|t| + 2m + 1\right)}{(2m+1)^4 + t^4}dt.$$

Pour $x > 1$, l'intégrale tend vers 0 lorsque m augmente.

De là découle

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds = \sum \text{Resid.},$$

où la somme doit maintenant être étendue sur tous les pôles de l'intégrande dans le demi-plan $\sigma < 2$.

La condition préalable pour la dernière formule est que $\sum$ Resid. converge. La convergence de cette somme doit d'abord être démontrée. L'intégrande $\dfrac{x^s}{s^4}\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ a des pôles aux points suivants :
a) $s = 1$, Residuum $-x$.[11]
b) $s = \varrho$, où ϱ est l'un des zéros non triviaux de $\zeta(s)$ c'est-à-dire qu'un zéro à un tel endroit est k s'il est tel que $0 < \sigma < 1$. Le résidu de $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ en un tel point est k s'il s'agit d'un k fois zéro. Donc la somme des résidus associés $\sum\limits_{\varrho} \dfrac{x^\varrho}{\varrho^4}$; ici, les racines k-fois doivent être prises k fois. La somme est absolument convergente.
c) $s = -2n, n = 1, 2, 3, ...$; le résidu de $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ en un tel point est 1, donc la somme

[9] Vgl. Landau, Vorl. ü. Zahlentheorie 2, S. 119-120.
[10] Ebenda, S. 111, Satz 448.
[11] Landau, Handbuch 1, §48, S. 179.

des résidus vaut $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{(2n)^4}$. Cette somme converge aussi si $x \geq 1$.

d) $s = 0$. $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ est ici régulier :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \mathrm{a}_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots, \qquad x^s = 1 + s \log x + \frac{s^2 \log^2 x}{2!} + \ldots ;$$

alors

$$\frac{x^s}{s^4} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \ldots + \frac{1}{s}(b_0 + b_1 \log x + b_2 \log^2 x + b_3 \log^3 x) + \ldots .$$

Donc le résidu à 0 est

$$b_0 + b_1 \log x + b_2 \log^2 x + b_3 \log^3 x.$$

La valeur de la constante b_i s'avèrera sans importance.

De (5'), maintenant il découle

$$\text{(6)} \qquad \frac{1}{6}\, \alpha(x) = x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{(2n)^4} - b_0 - b_1 \log x - b_2 \log^2 x - b_3 \log^3 x.$$

§3.

y est une quantité positive à déterminer ultérieurement. L'expression suivante doit être formée :

$$\Delta = \alpha((1+y)^4 x) - 4\alpha((1+y)^3 x) + 6\alpha((1+y)^2 x) - 4\alpha((1+y)\, x) + \alpha(x)$$

ou :

$$\Delta = \sum_{v \leq (1+y)^4 x} a_v \log^3 \frac{(1+y)^4 x}{v} - 4 \sum_{v \leq (1+y)^3 x} a_v \log^3 \frac{(1+y)^3 x}{v} + 6 \sum_{v \leq (1+y)^2 x} a_v \log^3 \frac{(1+y)^2 x}{v}$$
$$-4 \sum_{v \leq (1+y) x} a_v \log^3 \frac{(1+y)\, x}{v} + \sum_{v \leq x} a_v \log^3 \frac{x}{v}.$$

Si on arrange selon la grandeur de v, alors

$$\Delta = \sum_{v \le x} a_v \left[\log^3 \frac{(1+y)^4 x}{v} - 4 \log^3 \frac{(1+y)^3 x}{v} + 6 \log^3 \frac{(1+y)^2 x}{v} - 4 \log^3 \frac{(1+y)\, x}{v} + \log^3 \frac{x}{v} \right]$$

$$+ \sum_{x < v \le (1+y)\, x} a_v \left[\log^3 \frac{(1+y)^4 x}{v} - 4 \log^3 \frac{(1+y)^3 x}{v} + 6 \log^3 \frac{(1+y)^2 x}{v} - 4 \log^3 \frac{(1+y)\, x}{v} \right]$$

$$+ \sum_{(1+y)\, x < v \le (1+y)^2 x} a_v \left[\log^3 \frac{(1+y)^4 x}{v} - 4 \log^3 \frac{(1+y)^3 x}{v} + 6 \log^3 \frac{(1+y)^2 x}{v} \right]$$

$$+ \sum_{(1+y)^2 x < v \le (1+y)^3 x} a_v \left[\log^3 \frac{(1+y)^4 x}{v} - 4 \log^3 \frac{(1+y)^3 x}{v} \right] + \sum_{v \le (1+y)^4 x} a_v \log^3 \frac{(1+y)^4 x}{v}.$$

D'abord, les coefficients individuels de a_v doivent être calculés ou estimés. Le premier coefficient a la valeur 0 ; en ce qui concerne les suivants, il convient de montrer ceci ici : si μ est un entier positif ≤ 4 alors on a

$$\Lambda_\mu = \log^\mu \frac{(1+y)^4 x}{v} - 4 \log^\mu \frac{(1+y)^3 x}{v} + 6 \log^\mu \frac{(1+y)^2 x}{v} - 4 \log^\mu \frac{(1+y)\, x}{v} + \log^\mu \frac{x}{v}$$

(7)

$$= \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad \mu \le 3, \\ 24 \log^4 (1+y) & \text{pour} \quad \mu = 4. \end{cases}$$

Preuve. On a

$$\Lambda_\mu = \left[\log(1+y)^4 + \log \frac{x}{v}\right]^\mu - 4 \left[\log(1+y)^3 + \log \frac{x}{v}\right]^\mu + 6 \left[\log(1+y)^2 + \log \frac{x}{v}\right]^\mu$$

$$-4 \left[\log(1+y) + \log \frac{x}{v}\right]^\mu + \left[\log \frac{x}{v}\right]^\mu$$

$$= \log^\mu \frac{x}{v} [1 - 4 + 6 - 4 + 1]$$

$$+ \binom{\mu}{1} \log^{\mu-1} \frac{x}{v} \left[\log(1-y)^4 - 4 \log(1+y)^3 + 6 \log(1+y)^2 - 4 \log(1+y)\right]$$

$$+ \binom{\mu}{2} \log^{\mu-2} \frac{x}{v} \left[\log^2(1-y)^4 - 4 \log^2(1+y)^3 + 6 \log^2(1+y)^2 - 4 \log^2(1+y)\right]$$

$$+ \binom{\mu}{3} \log^{\mu-3} \frac{x}{v} \left[\log^3(1-y)^4 - 4 \log^3(1+y)^3 + 6 \log^3(1+y)^2 - 4 \log^3(1+y)\right]$$

$$+\binom{\mu}{4}\log^{\mu-4}\frac{x}{v}\ [\log^4(1-y)^4-4\log^4(1+y)^3+6\log^4(1+y)^2-4\log^4(1+y)]$$

$$=\log^{\mu}\frac{x}{v}[1-4+6-4+1]$$

$$+\binom{\mu}{1}\log^{\mu-1}\frac{x}{v}\log(1+y)\ [4-4.3+6.2-4]$$

$$+\binom{\mu}{2}\log^{\mu-2}\frac{x}{v}\log^2(1+y)\ [16-4.9+6.4-4]$$

$$+\binom{\mu}{3}\log^{\mu-3}\frac{x}{v}\log^3(1+y)\ [64-4.27+6.8-4]$$

$$+\binom{\mu}{4}\log^{\mu-4}\frac{x}{v}\log^4(1+y)\ [256-4.81+6.16-4]$$

$$=\binom{\mu}{4}\log^{\mu-4}\frac{x}{v}\log^4\ (1+y).24=\begin{cases}0 & \text{pour}\quad \mu\leq 3,\\ 24\log^4(1+y) & \text{pour}\quad \mu=4.\end{cases}$$

Le second coefficient de a_v, (i.e. celui de $\sum\limits_{x<v\leq(1+y)x}$) a la valeur $-\log^3\dfrac{x}{v}$; puisque v est compris entre x et $(1+y)x$ ici, le coefficient est $\leq\log^3(1+y)$.

Le troisième coefficient est

$$\log^3\frac{(1=y)^4\,x}{v}-4\log^3\frac{(1+y)^3\,x}{v}+6\log^3\frac{(1+y)^2\,x}{v}$$

$$=\left[\log(1+y)^2+\log\frac{(1+y)^2\,x}{v}\right]^3-4\left[\log(1+y)+\log\frac{(1+y)^2\,x}{v}\right]^3+6\left[\log\frac{(1+y)^2\,x}{v}\right]^3$$

$$=\log^3\frac{(1+y)^2\,x}{v}[1-4+6]+3\log^2\frac{(1+y)^2\,x}{v}[\log(1+y)^2-4\log(1+y)]$$

$$+3\log\frac{(1+y)^2\,x}{v}[\log^2(1+y)^2-4\log^2(1+y)]+[\log^3(1+y)^2-4\log^3(1+y)]$$

$$=3\log^3\frac{(1+y)^2\,x}{v}-6\log(1+y)\log^2\frac{(1+y)^2\,x}{v}+4\log^3(1+y).$$

Puisque v est compris entre $(1+y)\,x$ et $(1+y)^2\,x$, l'expression correspondante est $\leq 4\log^3(1+y)$. Le quatrième coefficient est à nouveau $\leq 4\log^3(1+y)$, le cinquième enfin vaut $\leq \log^3(1+y)$.

Donc le total est

(8)
$$\Delta \leq 4\log^3(1+y) \sum_{x<v\leq(1+y)^4x} a_v \leq 4\, y^3 \sum_{x<v\leq(1+y)^4x} a_v.$$

D'autre part d'après (6)

$$\begin{aligned}
\tfrac{A}{6} &= x[(1+y)^4 - 4(1+y)^3 + 6(1+y)^2 - 4(1+y) + 1] \\
&- \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}[(1+y)^{4\varrho} - 4(1+y)^{3\varrho} + 6(1+y)^{2\varrho} - 4(1+y)^{\varrho} + 1]}{2^4} \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}[(1+y)^{-4.2n} - 4(1+y)^{-3.2n} + 6(1+y)^{-2.2n} - 4(1+y)^{-2n} + 1]}{(2n)^4} \\
&-b_0[1-4+6-4+1] \\
&-b_1[\log(1+y)^4x - 4\log(1+y)^3x + 6\log(1+y)^2x - 4\log(1+y)x + \log x] \\
&-b_2[\log^2(1+y)^4x - 4\log^2(1+y)^3x + 6\log^2(1+y)^2x - 4\log^2(1+y)x + \log^2 x] \\
&-b_3[\log^3(1+y)^4x - 4\log^3(1+y)^3x + 6\log^3(1+y)^2x - 4\log^3(1+y)x + \log^3 x].
\end{aligned}$$

D'après (7), les coefficients b_i sont tous nuls, donc

$$\frac{\Delta}{6} = y^4x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}[(1+y)^{\varrho} - 1]^4}{\varrho^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}[(1+y)^{-2n} - 1]^4}{(2n)^4}.$$

De ceci et de (8) découle

(9)
$$\frac{4}{6}y^3. \sum_{x<v\leq(1+y)^4x} a_v \geq y^4x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}[(1+y)^{\varrho} - 1]^4}{\varrho^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}[(1+y)^{-2n} - 1]^4}{(2n)^4}$$

§4.

Maintenant, les sommes de droite doivent être estimées. D'abord la seconde : sous l'hypothèse $x > 1$, : on a

(10)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}[(1+y)^{-2n} - 1]^4}{(2n)^4} < \frac{1}{16x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \frac{1}{12x^2}.$$

En prenant ensuite $\varrho = \varrho_1 + i\varrho_2$ dans ce qui suit. Alors

$$\sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}[(1+y)^{\varrho} - 1]^4}{\varrho^4} = \sum_{|\varrho_2|\geq 200} \frac{x^{\varrho}[(1+y)^{\varrho} - 1]^4}{\varrho^4} + \sum_{|\varrho_2|200} \frac{x^{\varrho}[(1+y)^{\varrho} - 1]^4}{\varrho^4}$$

Pour $|\varrho_2| < 200$ on a $\varrho_1 = \frac{1}{2}$[12] Les abscisses des zéros restants sont toutes ≤ 1, puisqu'au moins la moitié sont $\leq \frac{1}{2}$, les zéros sont symétriques par rapport à $\sigma = \frac{1}{2}$. Puisqu'ils sont aussi symétriques par rapport à $t = 0$ alors

$$(11) \qquad \left| \sum_{|\varrho_2| \geq 200} \frac{x^\varrho[(1+y)^\varrho - 1)]^4}{\varrho^4} \right| < (2+y)^4 \left[x \sum_{\varrho_2 \geq 200} \frac{1}{|\varrho|^4} + \sqrt{x} \sum_{\varrho_2 \geq 200} \frac{1}{|\varrho|^4} \right].$$

Soit $N(T)$ le nombre de zéros d'ordonnée comprise entre 0 et T, les k-facteurs étant comptés k fois alors

$$(12) \qquad \sum_{\varrho_2 \geq 200} \frac{1}{|\varrho|^4} \leq \sum_{n=200}^{\infty} \frac{N(n+1) - N(n)}{n^4}$$

Maintenant on a [13]

$$(13) \qquad N(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{T}{2\pi} - 1\right) + \frac{7}{8} + Q(T),$$

ce qui peut être abrégé en :

$$N(T) = R(T) + Q(T).$$

Cela s'applique à $Q(T)$ [14]

(14) $\quad |Q(T)| \leq 0,137 \log T + 0,443 \log\log T + 4,350.$

Alors

$$\sum_{n=200}^{\infty} \frac{N(n+1) - N(n)}{n^4} = \sum_{n=200}^{\infty} \frac{R(n+1) - R(n)}{n^4} + \sum_{n=200}^{\infty} \frac{Q(n+1) - Q(n)}{n^4}.$$

La deuxième somme est ensuite décomposée :

$$\sum_{n=200}^{\infty} \frac{Q(n+1) - Q(n)}{n^4} = \sum_{n=200}^{999} \frac{Q(n+1) - Q(n)}{n^4} + \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{n=x\cdot 1000}^{x\cdot 1000+999} \frac{Q(n+1) - Q(n)}{n^4}$$

$\displaystyle\sum_{n=200}^{999} \frac{Q(n+1) - Q(n)}{n^4}$ peut être estimé de la manière suivante : $Q(n+1) - Q(n)$ peut être positif ou négatif ; en tout cas, on peut dire :

$$Q(1000) - Q(999) \leq M_1,$$

où M_1 devrait signifier le plus grand des deux nombres 0 et $Q(1000) - Q(999)$. Ainsi on a

$$\frac{Q(999) - Q(998)}{998^4} + \frac{Q(1000) - Q(999)}{999^4} \leq \frac{Q(999) - Q(998) + M_1}{998^4} \leq \frac{M_2}{998^4},$$

[12] Vgl. die in der Einleitung zitierten Arbeiten von Backlund.

[13] note qu'on ne trouve pas en bas de page.

[14] note qu'on ne trouve pas en bas de page.

où M_2 devrait maintenant être le plus grand des deux nombres 0 et $Q(999)-Q(998)+M_1$. En conséquence, on a

$$\sum_{n=997}^{999} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} \leq \frac{M_3}{997^4},$$

où M_3 est le plus grand des deux nombres 0 et $Q(998)-Q(997)+M_2$ etc. Enfin, on obtient

$$\sum \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} \leq \frac{M_{800}}{200^4},$$

M_{800} est le plus grand des nombres

$$Q(1000)-Q(200)\,;Q(999)-Q(200)\,;\ldots;Q(201)-Q(200)\,;0.$$

Donc d'après (14), il est certain que

$$\sum_{n=200}^{999} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} \leq \frac{1}{200^4}\cdot[0,137(\log 200+\log 1000)$$

$$+\,0,443(\log\log 200+\log\log 1000)+8,700] < \frac{12}{200^4}.$$

S'applique en conséquence

$$\sum_{n=x\cdot 1000}^{x\cdot 1000+999} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} \leq \frac{1}{x^4\cdot 10^{12}}\cdot[0,274\log(x+1)1000+0,886\log\log(x+1)1000+8,700]$$

$$< \frac{1}{x^4\cdot 10^{12}}\cdot[\log(x+1)+14] < \frac{1}{x^4\cdot 10^{12}}[\log x+15].$$

On a ainsi

$$\sum_{n=200}^{\infty} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} \leq \frac{12}{200^4}+\frac{1}{10^{12}}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\log x+15}{x^4} < \frac{12}{200^4}+\frac{21}{10^{12}},$$

c'est-à-dire

(15) $$\sum_{n=200}^{\infty} \frac{Q(n+1)-Q(n)}{n^4} < 0,76\cdot 10^{-8}.$$

La suite découle de (13)

$$\begin{aligned} R(n+1)-R(n) &= \frac{n+1}{2\pi}\left[\log\frac{n+1}{2\pi}-1\right]-\frac{n}{2\pi}\left[\log\frac{n}{2\pi}-1\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\log\frac{n}{2\pi}-1\right]+\frac{n+1}{2\pi}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2\pi}\log\frac{n}{2\pi}+\frac{1}{2\pi n}. \end{aligned}$$

On a

$$\sum_{n=200}^{\infty} \frac{R(n+1)-R(n)}{n^4} < \frac{1}{2\pi} \sum_{n=200}^{\infty} \frac{\log \dfrac{n}{2\pi} + \dfrac{1}{n}}{n^4} < 2,56 \cdot 10^{-8}.$$

De là, de (12) et de (15) il résulte

(16) $$\sum_{\varrho_2 \geq 200} \frac{1}{|\varrho|^4} < (2,56 + 0,76) \cdot 10^{-8} = 3,32 \cdot 10^{-8}.$$

Donc après (9)

(17) $$\begin{aligned} \frac{2}{3} y^3 \sum_{x < v \leq (1+y)^4 x} a_v &> x \cdot [y^4 - (2+y)^4 \cdot 3,32 \cdot 10^{-8}] \\ &- \sqrt{x} \cdot \left[(2+y)^4 \cdot 3,32 \cdot 10^{-8} + 2 \cdot \sum_{0 < \varrho_2 < 200} \frac{|(1+y)^{\varrho} - 1|^4}{|\varrho|^4} \right] - \frac{1}{12 x^2}. \end{aligned}$$

Pour pouvoir estimer également cette dernière somme, il faut des informations plus précises sur la position des zéros d'ordonnées comprises entre 0 et 200.

On a[15]

(18) $14 \leq \varrho_2^{(1)} \leq 20 \leq \varrho_2^{(2)} \leq 24 \leq \varrho_2^{(3)} \leq 30 \leq \varrho_2^{(4)}$ und $\varrho_2^{(5)} \leq 34 \leq \varrho_2^{(6)}$ bis $\varrho_2^{(10)} \leq 50 \leq \varrho_2^{(11)}$ bis $\varrho_2^{(29)} \leq 100 \leq \varrho_2^{(30)}$ bis $\varrho_2^{(79)} \leq 200$.

Dans ce qui suit, on pose $y = \frac{1}{34}$; alors $(1+y)^4 < \frac{9}{8}, (2+y)^4 < 17$. Pour les zéros tels que $|\varrho_2| < 200$, on a l'égalité suivante

$$(1+y)^{\varrho} - 1 = \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\varrho_2 \log \frac{35}{34}\right) - 1 + i \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\varrho_2 \log \frac{35}{34}\right)$$

Dès que la partie réelle est négative, sa valeur absolue augmente pour ϱ_2 croissant, celle de la partie imaginaire augmente également pour ϱ_2 croissant, tant qu'on a

[15]Vgl. die schon zitierten Arbeiten von Backlund und Großmann.

$\varrho_2 \cdot \log\frac{35}{34} < \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire forcément pour $\varrho_2 \leq 50$. D'où par (18)

$$\sum_{0<\varrho_2<200} \frac{|(1+y)^\varrho - 1|^4}{|\varrho|^4} < \left| \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(34 \log \frac{35}{34}\right) - 1 + i \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(34 \log \frac{35}{34}\right) \right|^4$$

$$\times \left[\frac{1}{14^4} + \frac{1}{20^4} + \frac{1}{24^4} + \frac{1}{30^4}\right]$$

$$+ \left| \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(50 \log \frac{35}{34}\right) - 1 + i \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(50 \log \frac{35}{34}\right) \right|^4 \cdot \frac{5}{34^4}$$

$$+ \left[1 + \left(\frac{35}{34}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^4 \cdot \left[\frac{19}{50^4} + \frac{50}{100^4}\right]$$

$$< 1 \cdot \left[\frac{1}{14^4} + \frac{1}{20^4} + \frac{1}{24^4} + \frac{2}{30^4}\right] + 4\frac{5}{34^4} + 16,5 \cdot \left[\frac{19}{50^4} + \frac{50}{100^4}\right]$$

ou

$$\sum_{0<\varrho_2<200} \frac{|(1+y)^\varrho - 1|^4}{|\varrho|^4} < 11,12 \cdot 10^{-5}. \tag{19}$$

De (17) et (19), il résulte pour $y = \frac{1}{34}$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{34^2} \sum_{x<v\leq\frac{9}{8}x} a_v > x\left(\frac{1}{34^4} - 17 \cdot 3,32 \cdot 10^{-8}\right) - \sqrt{x}(17 \cdot 3,32 \cdot 10^{-8} + 2 \cdot 11,12 \cdot 10^{-5}) - \frac{1}{12\,x^2}$$

Soit $x > 4000000$; alors

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{34^5} \sum_{x<v\leq\frac{9}{8}x} a_v > (18,38 - 11,16) \cdot 10^{-8}\, x > 7 \cdot 10^{-8}\, x,$$

alors

$$\sum_{x<v\leq\frac{9}{8}x} a_v > 7 \cdot \frac{3}{2} \cdot 34^3 \cdot 10^{-8}\, x > 40 \cdot 10^{-4}\, x. \tag{20}$$

Si on insère la valeur de a_v selon (2), alors on obtient

$$\psi\left(\frac{9}{8}\,x\right) - \psi(x) > 40 \cdot 10^{-4}\, x$$

ou à cause de (1)

$$\vartheta\left(\frac{9}{8}\,x\right) - \vartheta(x) > \psi\left(\frac{9}{8}\,x\right) - \psi(x) - 2\psi\left(\sqrt{\frac{9}{8}\,x}\right) > 40 \cdot 10^{-4}\, x - 2\psi\left(\sqrt{\frac{9}{8}\,x}\right)$$

Maintenant on a[16]

$$\psi(z) < 1,106\, z + 3 \log^2 z + 8 \log z + 5.$$

Donc pour $x \geq 4000000$

$$\psi\left(\sqrt{\frac{9}{8}\, x}\right) < 1,25 \cdot \sqrt{\frac{9}{8}\, x} < 1,34 \cdot \sqrt{x} < 6,7 \cdot 10^{-4}\, x,$$

c'est-à-dire

(21) $$\vartheta\left(\frac{9}{8}\right) - \vartheta(x) > (40 - 13,4) \cdot 10^{-4}\, x > 26 \cdot 10^{-4}\, x > 0.$$

Il y a toujours des nombres premiers entre x et $\frac{9}{8}x$ pour $x \geq 4.10^6$. À l'aide des tables de Lehmer, on détermine la validité du théorème pour $x \geq 48$. Il est facile de voir que dans les tables jusqu'à 10^7, la différence entre deux nombres premiers consécutifs est toujours inférieure à 1000, de sorte que le théorème est évidemment vrai pour $8000 < x < 4.10^6$. Corrélativement, on voit plus loin que le théorème est correct pour $800 < x \leq 8000$, car pour les valeurs inférieures à 8000, la différence entre deux nombres premiers consécutifs est < 100. En-dessous de 800, cette différence est < 20, donc le théorème est valable pour $160 < x \leq 800$. Et des nombres premiers suivants, chacun est plus petit que $\frac{9}{8}$ fois le précédent, le premier est plus petit que $\frac{9}{8} \cdot 48$ et le dernier est supérieur à 160 :

$$53, 59, 61, 67, 73, 79, 83, 89, 97, 109, 113, 127, 139, 151, 167.$$

Cela montre pour $x \geq 48$ qu'on trouve toujours un nombre premier entre x et $\frac{9}{8}x$.

Deuxième partie.
§1.

χ étant n'importe quel caractère mod k, k étant un entier quelconque. $L(s, \chi)$ la fonction L de Dirichlet correspondante, qui pour $\sigma > 1$ est définie par

$$L(s, \chi) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\chi(v)}{v^s}.$$

Alors on a[17]

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = -\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\chi(v) a_v}{v^s}$$

[16] Landau, Handbuch 1, §22, S. 90.
[17] Vgl. Landau, Handbuch 1, S. 420.

pour $\sigma > 1$ absolument convergente. a_v s'explique par la relation (2) dans la première partie. Donc

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\sum_{v=2}^{\infty}\frac{\chi(v)a_v}{v^s}\, ds \\
&= \sum_{v=2}^{\infty}\chi(v)a_v\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\frac{\left(\frac{x}{v}\right)^s}{s^4}ds = \frac{1}{6}\sum_{v\le x}\chi(v)a_v\log^3\frac{x}{v},
\end{aligned}
$$

tout à fait analogue aux développements du § 1 de la première partie.

Soit $h = \varphi(k) =$ le nombre des nombres relativement premiers à k compris entre 0 et k. Alors pour k premier à l

$$
\sum_{\chi}\frac{\chi(n)}{\chi(l)} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad n \not\equiv l \pmod k, \\ h & \text{pour} \quad n \equiv l \pmod k. \end{cases}
$$

Ici, la somme doit être étendue à tous les caractères mod k. Pour cela, on prend $r \cdot l \equiv 1 \pmod k$. Alors $\chi(r)\cdot\chi(l) = 1$ et[18]

$$
\begin{aligned}
\sum_{\chi}\frac{\chi(n)}{\chi(l)} = \sum_{\chi}\chi(r)\cdot\chi(n) = \sum_{\chi}\chi(r\cdot n) \quad &= \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad r\cdot n \not\equiv 1 \pmod k, \\ h & \text{pour} \quad r\cdot n \equiv 1 \pmod k, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad n \not\equiv l \pmod k, \\ h & \text{pour} \quad n \equiv l \pmod k. \end{cases}
\end{aligned}
$$

De ceci et de (1) découle

$$
-\sum_{\chi}\frac{1}{\chi(l)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\frac{x^s}{s^4}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}ds = \frac{1}{6}\sum_{v\le x}a_v\log^3\frac{x}{v}\sum_{\chi}\frac{\chi(v)}{\chi(l)}
$$

ou

$$
(2) \qquad -\sum_{\chi}\frac{1}{\chi(l)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\frac{x^s}{s^4}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}ds = \frac{h}{6}\sum_{\substack{v\le x \\ v=l \pmod k}} a_v\log^3\frac{x}{v}.
$$

§ 2.

Là aussi, il s'avèrera nécessaire d'estimer le nombre $N(T)$ des zéros de $L(s,\chi)$ d'ordonnée comprise entre 0 et T. Pour nos besoins, une estimation un peu plus grossière suffira, qui est dérivée de manière assez analogue à celle des cours de Landau sur la théorie

[18]Ebenda, S. 408, Satz 4.

des nombres i.e. 2, S. 87.

Plus précisément , soit χ un caractère réel propre pour lequel $\chi(-1) = -1$. Alors on a[19]

$$L(s,\chi) = ae^{bs}\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{s+1}{2}\right)}\prod_{\varrho^*}\left(1-\frac{s}{\varrho^*}\right)e^{\dfrac{s}{\varrho^*}}$$

a et b sont des constantes, et ϱ^* passe par les zéros non triviaux de $L(s,\chi)$. De là découle

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = b - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\dfrac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{s+1}{2}\right)} + \sum_{\varrho^*}\left(\frac{1}{s-\varrho^*}+\frac{1}{\varrho^*}\right). \tag{3}$$

Pour $s = 0$, on en déduit

$$b = \frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}.$$

On a ensuite

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\dfrac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)L(s,\chi).$$

Alors[20], puisque χ en tant que réel est identique à son conjugué complexe,

$$\frac{\xi'(s,\chi)}{\xi(s,\chi)} = -\frac{\xi'(1-s,\chi)}{\xi(1-s,\chi)}.$$

Alors

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\dfrac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{s+1}{2}\right)} - \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{k} = -\frac{L'(1-s,\chi)}{L(1-s,\chi)} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\dfrac{2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2-s}{2}\right)} + \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{k},$$

$$b = \frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)} = -\frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + \log\frac{\pi}{k}.$$

De ceci et de (3) découle

$$\sum_{\varrho^*}\left(\frac{1}{s-\varrho^*}+\frac{1}{\varrho^*}\right) = \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\dfrac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{s+1}{2}\right)} + \frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \log\frac{x}{k}. \tag{4}$$

[19]Landau, Handbuch 1, S. 507.
[20]Landau, Handbuch 1, S. 511.

Soit $s=\frac{3}{2}+it$, $\varrho^*=\varrho_1^*+i\varrho_2^*$; t, ϱ_1^*, et ϱ_2^* réels. Puisque $0<\varrho_1^*<1$, on a

$$R\left(\frac{1}{\varrho^*}\right)=\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1^{*2}+\varrho_2^{*2}}>0\ ; \qquad R\left(\frac{1}{s-\varrho^*}\right)=\frac{\frac{3}{2}-\varrho_1^*}{\left(\frac{3}{2}-\varrho_1^*\right)^2+(t-\varrho_2^*)^2}>0.$$

$R()$ signifie ici la partie réelle de la quantité complexe en question. Des deux relations ci-dessus on conclut

$$(5)\qquad \sum_{|t-\varrho_1^*|\leq\frac{1}{2}} R\left(\frac{1}{s-\varrho^*}\right)<R\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}+\frac{1}{2}R\frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}+\frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\log\frac{\pi}{k}.$$

Dans le cas des caractères réels, les zéros sont symétriques par rapport à la droite $\sigma=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que pour $\varrho^*=\varrho_1^*+i\varrho_2^*$ il y a aussi $\varrho^{**}=1-\varrho_1^*+i\varrho_2^*$. On a

$$R\left(\frac{1}{s-\varrho^*}\right)+R\left(\frac{1}{s-\varrho^{**}}\right)=\frac{\frac{3}{2}-\varrho_1^*}{\left(\frac{3}{2}-\varrho_1^*\right)^2+(t-\varrho_2^*)^2}+\frac{\frac{1}{2}+\varrho_1^*}{\left(\frac{1}{2}+\varrho_1^*\right)^2+(t-\varrho_2^*)^2}.$$

Cette fonction de ϱ_1^* a sa plus petite valeur pour t fixé et ϱ_2^* dans l'intervalle $(0,1)$ au point $\varrho_1^*=\frac{1}{2}$ à partir duquel on peut regarder ce qui suit ainsi : soit $\varrho_1^*=\frac{1}{2}+\alpha$; il faut alors montrer que la fonction de α suivante

$$\Phi(\alpha)=\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2+(t-\varrho_2^*)^2}+\frac{1+\alpha}{(1+\alpha)^2+(t-\varrho_2^*)^2}$$

prend sa plus petite valeur dans l'intervalle $-\frac{1}{2}\leq\alpha\leq\frac{1}{2}$; supposons que $\alpha=0$. Ce faisant $|t-\varrho_2^*|\leq\frac{1}{2}$; ceci est abrégé en $a^2=(t-\varrho_2^*)^2$. On obtient

$$\Phi(\alpha)-\Phi(0)=\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2+a^2}+\frac{1+\alpha}{(1+\alpha)^2+a^2}-\frac{2}{1+a^2}=\frac{2\alpha^2\cdot[1-3a^2-\alpha^2]}{[(1-\alpha)^2+a^2]\cdot[(1+\alpha)^2+a^2]\cdot[1+a^2]}.$$

Le dénominateur est toujours positif, le numérateur est $\geq 2\alpha^2[\frac{1}{4}-\alpha^2]\geq 0$ pour $|\alpha|\leq\frac{1}{2}$. Alors prenons $\Phi(\alpha)$ dans l'intervalle $(-\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$ qui prend sa plus petite première valeur pour $\alpha=0$. Il s'ensuit

$$R\left(\frac{1}{s-\varrho^*}\right)+R\left(\frac{1}{s-\varrho**}\right)\geq 2\cdot\frac{1}{1+a^2}\geq\frac{2}{1+\frac{1}{4}}=\frac{8}{5}.$$

Maintenant il est évident que

$$\frac{1}{2}\cdot\left[N\left(t+\frac{1}{2}\right)-N\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\mathrm{Min}\left\{R\left(\frac{1}{s-\varrho^*}\right)+R\left(\frac{1}{s-\varrho^{**}}\right)\right\}\leq\sum_{|t-\varrho_2^*|\leq\frac{1}{2}}R\left(\frac{1}{s-\varrho^*}\right),$$

c'est-à-dire d'après (5), si l'on insère la valeur trouvée pour le minimum $\frac{8}{5}$,

$$N\left(t+\frac{1}{2}\right)-N\left(t-\frac{1}{2}\right)<\frac{5}{4}\cdot\left[R\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}+\frac{1}{2}\,R\frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}+\frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\log\frac{\pi}{k}\right]. \tag{6}$$

Ainsi on a

a) $k=3$; alors

$$R\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\leq\left|\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right|\leq\sum_{v=1}^{\infty}\frac{a_v|\chi(v)|}{v^{\frac{3}{2}}}<\frac{\log 2}{2^{\frac{3}{2}}}+\frac{\log 2}{4^{\frac{3}{2}}}+\frac{\log 5}{5^{\frac{3}{2}}}+\int_6^{\infty}\frac{\log x}{x^{\frac{3}{7}}}\,dx<3,6\ ;$$

$$L(1,\chi)=1-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots>\frac{1}{2},\quad L'(1,\chi)=\frac{\log 2}{2}-\frac{\log 4}{4}+\ldots<\frac{\log 2}{2},$$

$$\frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)}<\log 2<0,7\ ;\quad -\log\frac{\pi}{k}=-\log\frac{\pi}{3}<0.$$

Donc dans l'ensemble

$$R\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}+\frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)}-\log\frac{\pi}{k}<4,3. \tag{7}$$

b) $k=4$; alors

$$R\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}<\frac{\log 3}{3^{\frac{3}{2}}}+\frac{\log 5}{5^{\frac{3}{2}}}+\int_0^{\infty}\frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}}}dx<3,55\ ;$$

$$L(1,\chi)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\ldots>0,78,\quad L'(1,\chi)=\frac{\log 3}{3}-\frac{\log 5}{5}+\ldots<\frac{\log 3}{3},$$

$$\frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)}<\frac{\log 3}{3\cdot 0,78}<0,5\ ;\quad -\log\frac{\pi}{k}=\log\frac{4}{\pi}<0,25.$$

Ce qui donne

$$R\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}+\frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)}-\log\frac{\pi}{k}<4,3. \tag{7}$$

Et donc

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}=-\frac{1}{s}-C+s\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(s+n)}\qquad(C=0,57\ldots).$$

Donc

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=-1,57+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}<0. \tag{8}$$

Et aussi[21]

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2z} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{z+u} - \frac{1}{1+u}\right) du + \frac{f_1(0)}{z^2} - 2\int_0^\infty \frac{f_1(u)}{(u+z)^3} du.$$

Ici on a $|f_1(u)| < 1$. Si on pose $z = z_1 + iz_2$, alors

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2z} + \frac{f_1(0)}{z^2} - 2\int_0^\infty \frac{f_1(u)}{(u+z)^3} du - \frac{1}{2}\log(z_1^2 + z_2^2) + i \text{ arc tg}\frac{z_1}{z_2} - i \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ici pour $z_1 > 0$

$$2 \cdot \left| \int_0^\infty \frac{f_1(u)}{(u+z)^3} du \right| < 2 \cdot \int_0^\infty \frac{du}{(z_2^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{z_2^2} \cdot \int_0^\infty \frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{\pi}{z_2^2}$$

et

$$R\left(\frac{1}{2z}\right) < \frac{z_1}{2z_2^2}.$$

Donc pour $z_2 > 0$

$$R\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} < \frac{1}{2}\log(z_1^2 + z_2^2) + \frac{1}{z_2^2} \cdot \left(\pi + 1 + \frac{z_1}{2}\right) < \log z_2 + \frac{1}{z_2^2} \cdot \left(\frac{z_1^2}{2} + \pi + 1 + \frac{z_1}{2}\right),$$

et en particulier (pour $t > 0$)

$$R\frac{\Gamma'\left(\dfrac{\frac{3}{2} + it + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\frac{3}{2} + it + 1}{2}\right)} = R\frac{\Gamma'\left(\frac{5}{4} + i\,\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4} + i\,\frac{t}{2}\right)} < \log\frac{t}{2} + \frac{24}{t^2}. \tag{9}$$

De (6), (7), (8) et (9), il s'ensuit pour t positif

$$N\left(t + \frac{1}{2}\right) - N\left(t - \frac{1}{2}\right) < \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\log\frac{t}{2} + \frac{12}{t^2} + 4{,}3\right) < \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\log t + 4 + \frac{12}{t^2}\right)$$

ou

$$N\left(t + \frac{1}{2}\right) - N\left(t - \frac{1}{2}\right) < \frac{5}{8}\log t + 5 + \frac{15}{t^2}. \tag{10}$$

Cette estimation du nombre de zéros s'applique donc à la série avec les caractères non principaux selon le module 3 *et* selon le module 4.

[21] Vgl. Landau, Vorl. üb. Zahlentheorie 2, S. 81.

De plus, les deux séries ont les zéros triviaux $-1, -3, -5, \ldots$.

Soit maintenant χ_1 le caractère principal mod k (k à nouveau $= 3$ ou $= 4$).

Alors on a[22]

$$L(s, \chi_1) = \left(\frac{1}{p^s}\right) \cdot \zeta(s) \ ;$$

où $p = 3$ pour $k = 3$ et $p = 2$ pour $k = 4$. $L(s, \chi_1)$ s'annule donc aux zéros de $\zeta(s)$ et aussi sur les nombres

$$s = \frac{2m\pi\ i}{\log p} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

χ étant à nouveau caractère non principal, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s^4} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds = \sum \text{Resid.},$$

où la somme doit être étendue sur tous les pôles de l'intégrande dans le demi-plan $\sigma < 2$. Preuve exactement comme dans la partie I, § 2, seulement avec la différence que maintenant on intègre sur le bord du rectangle de coins

$$2 - iT, \quad 2 + iT, \quad -2m + iT, \quad -2m - iT$$

L'intégrande a des pôles aux emplacements suivants :

a) aux zéros ϱ^* de $L(s, \chi)$ dans la région $0 < \sigma < 1$. La somme des résidus est ici $\sum\limits_{\varrho^*} \dfrac{x^{\varrho^*}}{\varrho^{*4}}$;

b) aux points $s = -(2n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$. La somme des résidus est : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{-(2n+1)}}{(2n+1)^4}$;

c) au point $s = 0$; Residuum : $c_0 + c_1 \log x + c_2 \log^2 x + c_3 \log^3 x$.

Alors on a

$$(11) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s^4} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{\varrho^*} \frac{x^{\varrho^*}}{\varrho^{*4}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-(2n+1)}}{(2n+1)^4} + c_0 + c_1 \log x + c_2 \log^2 x + c_3 \log^3 x,$$

[22]Landau, Handbuch 1, S. 423.

Découle alors

$$\frac{L'(s,\chi_1)}{L(s,\chi_1)} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\log p}{p^s - 1}. \tag{12}$$

Si ϱ parcourt à nouveau les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ alors on obtient les résultats (5) et (6) de la partie I,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}ds = -x + \sum_{\varrho}\frac{x^\varrho}{\varrho^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{(2n)^4}$$

$$+ b_0 + b_1 \log x + b_2 \log^2 x + b_3 \log^3 x + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s^4}\frac{\log p}{p^s - 1}ds.$$

Cette deuxième intégrale est évidemment aussi égale à la somme des résidus de son intégrande dans le demi-plan $\sigma < 2$. Car si vous intégrez à nouveau sur le bord du rectangle de sommets

$$2 - iT, \quad 2 + iT, \quad -S + iT, \quad -S - iT,$$

avec $S > 0$ et T environ $= \dfrac{(2m+1)x}{\log p}$ (m entier positif), alors on obtient pour $x > 1$

$$\Big|\int\limits_{-S+iT}^{2+iT} \frac{x^s}{s^4}\frac{\log p}{p^s - 1}ds\Big| < \frac{x^2 \log p \cdot (S+2)}{T^4}$$

qui correspond à $\Big|\int\limits_{-S-iT}^{2-iT}\Big|$. Les deux intégrales partielles tendent donc vers 0 lorsque m augmente. Et pour le troisième composant, on a

$$\Big|\int\limits_{-S-i\infty}^{-S+i\infty} \frac{x^s}{s^4}\frac{\log p}{p^s - 1}ds\Big| < \frac{\log p}{1 - p^{-s}}x^{-s}\Big|\int\limits_{-S-i\infty}^{-S+i\infty}\frac{ds}{s^4}\Big| ;$$

Cette intégrale tend également vers 0 lorsque S augmente.

L'intégrande $\dfrac{x^s}{s^4}\dfrac{\log p}{p^s - 1}$ a des pôles en 0 et $\dfrac{2\mu\pi i}{\log p}, \mu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. La somme des résidus aux positions $\dfrac{2\mu\pi i}{\log p}$ est

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{x^{\frac{2\mu\pi i}{\log p}}}{\left(\dfrac{2\mu\pi i}{\log p}\right)^4}.$$

Le tiret indique que $\mu = 0$ doit être exclu de la sommation.

Enfin, le résidu au point $s = 0$ est obtenu en développant en série les intégrandes

$$\frac{x^s}{s^4} \cdot \frac{\log p}{p^s - 1} = \frac{\left(1 + s\log x + \ldots + \dfrac{s^4 \log^4 x}{4!} + \ldots\right) \cdot \log p}{s^4 \cdot (s \log p + \ldots)}.$$

Donc le résidu est le même $\dfrac{\log^4 x}{4!} = \dfrac{\log^4 x}{24}$. Par conséquent, c'est

$$\text{(13)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s^4} \frac{L'(s,\chi_1)}{L(s,\chi_1)} ds = -x + \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{(2n)^4} + \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{x^{\frac{2\mu\pi i}{\log p}}}{\left(\dfrac{2\mu\pi i}{\log p}\right)^4}$$
$$+ b_0 + b_1 \log x + b_2 \log^2 x + b_3 \log^3 x + \frac{1}{24} \log^4 x.$$

De (2), (11) et (13) suivent alors les expressions explicites pour $k = 3$ ou $k = 4$, soit $h = \varphi(k) = 2$, et pour $l = +1$ ou $l = -1$:

$$\text{(14)} \qquad \frac{1}{3} \sum_{\substack{v \le x \\ v \equiv l \pmod k}} a_v \log^3 \frac{x}{v} = x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{(2n)^4} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{x^{\frac{2\mu\pi i}{\log p}}}{\left(\frac{2\mu\pi i}{\log p}\right)^4} \mp \sum_{\varrho^*} \frac{x^{\varrho^*}}{\varrho^{*4}} \mp \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-(2n+1)}}{(2n+1)^4}$$
$$- d_0 - d_1 \log x - d_2 \log^2 x - d_3 \log^3 x - \frac{1}{24} \log^4 x.$$

Les d_i sont des constantes dont la valeur n'a pas d'importance.

A partir des sommes de droite, la seconde, la troisième et la cinquième doivent être estimées en premier. On a

$$\text{(15)} \qquad \Bigg| \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\frac{2\mu\pi i}{\log p}}}{\left(\dfrac{2\mu\pi i}{\log p}\right)^4} \Bigg| \le 2 \left(\frac{\log p}{2\pi}\right)^4 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^4} \le 2 \left(\frac{\log 3}{2\pi}\right)^4 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^4} < 0,003\ ;$$

$$\text{(16)} \qquad \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{(2n)^4} \pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-(2n+1)}}{(2n+1)^4} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-n}}{n^4} < \frac{1,1}{x} \quad \textit{für} \quad x > 1.$$

§ 4.

On utilisera l'abréviation

$$\beta(x) = \beta(x\,; k, l) = \sum_{\substack{v \le x \\ v \equiv l \pmod k}} a_v \log^3 \frac{x}{v}.$$

Δ doit être formé d'une manière analogue à ce qui a été fait dans la partie I, § 3, ainsi :

$$\Delta = \beta((1+y)^4 x) - 4\beta((1+y)^3 x) + 6\beta((1+y)^2 x) - 4\beta((1+y)x) + \beta(x).$$

y représente à nouveau une quantité positive réelle. Ensuite, selon la formule (8) de la partie I,

$$\Delta \le 4y^3 \sum_{\substack{x < v \le (1+y)^4 x \\ v \equiv l \pmod k}} a_v. \tag{17}$$

Si on insère sa valeur selon (14) dans Δ pour les fonctions β alors par (7) de la partie I, on supprime les termes logarithmiques sauf le dernier, celui-ci prend la valeur $\frac{1}{24} \cdot 24 \log^4(1+y) < y^4$, et en considérant (15) et (16):

$$\frac{4}{3} y^3 \sum_{\substack{x < v \le (1+y)^4 x \\ v \equiv l \pmod k}} a_v > y^4 x - \left| \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}[(1+y)^{\varrho} - 1]^4}{\varrho^4} \right| - \left| \sum_{\varrho^*} \frac{x^{\varrho^*}[(1+y)^{\varrho^*} - 1]^4}{\varrho^{*4}} \right|$$

$$- y^4 - 16 \cdot 0,003 - 16 \cdot \frac{1,1}{x}$$

ou

$$\frac{4}{3} y^3 \sum_{\substack{x < v \le (1+y)^4 x \\ v \equiv l \pmod k}} a_v > y^4 x - (2+y)^4 \sum_{\varrho} \left| \frac{x^{\varrho}}{\varrho^4} \right| - (2+y)^4 \sum_{\varrho^*} \left| \frac{x^{\varrho^*}}{\varrho^{*4}} \right| - y^4 - 0,05 - \frac{18}{x}. \tag{18}$$

Soit maintenant $y = \frac{1}{5,5}$; alors $(1+y)^4 < 2$ et $(2+y)^4 < 23$.

§ 5.

S'applique désormais aux deux classes non principales (mod 3 et mod 4), que les zéros ϱ^* des $L(s, \chi)$ avec $|J(\varrho^*)| < 44$ sont tels que $\sigma = \frac{1}{2}$[23] ;

[23] Großmann, a. a. O., §§7 und 8.

$J(\varrho^*)$ signifie la partie imaginaire de ϱ^*. Parce que les zéros sont symétriques par rapport à la droite $\sigma = \frac{1}{2}$, au plus la moitié d'entre eux ont pour abscisse $R(\varrho^*) = 1$, et là, les zéros se trouvent également symétriques par rapport à l'axe réel $R(\varrho^*) \leq \frac{1}{2}$; alors on a

$$(19)\quad (2+y)^4 \left[\sum_{\varrho} \frac{|x^{\varrho}}{|\varrho|^4} + \sum_{\varrho^*} \frac{|x^{\varrho^*}}{|\varrho^*|^4} \leq 23 \left[\sum_{J(\varrho)\geq 200} \frac{1}{|\varrho|^4} + \sum_{J(\varrho^*)\geq 44} \frac{1}{|\varrho^*|^4}\right]\right.$$

$$\left. + 23\sqrt{x}\left[\sum_{J(\varrho)\geq 200} \frac{1}{|\varrho|^4} + \sum_{J(\varrho^*)\geq 44} \frac{1}{|\varrho^*|^4} + 2 \sum_{0\leq J(\varrho)<200} \frac{1}{|\varrho|^4} + 2 \sum_{0\leq J(\varrho)<44} \frac{1}{|\varrho^*|^4}\right]\right.$$

Conformément à la partie I (16), on a

$$\sum_{J(\varrho)\geq 200} \frac{1}{|\varrho|^4} < 3,32 \cdot 10^{-8}.$$

Il découle de (10)

$$\sum_{J(\varrho^*)\geq 44} \frac{1}{|\varrho^*|^4} \leq \sum_{n=41}^{\infty} \frac{N(n+1) - N(n)}{n^4} < \sum_{n=44}^{\infty} \frac{\frac{5}{8}\log\left(n + \frac{1}{2}\right) + 5 + \frac{15}{n^2}}{n^4}$$

$$\sum_{n=44}^{\infty} \frac{\frac{5}{8}\log n + 5,1}{n^4} < \int_{43}^{\infty} \frac{\frac{5}{8}\log n + 5,1}{x^4} dx < 3,28 \cdot 10^{-5}.$$

Ainsi on a

$$(20)\quad 23\left[\sum_{J(\varrho)\geq 200} \frac{1}{|\varrho|^4} + \sum_{J(\varrho^*)\geq 44} \frac{1}{|\varrho^*|^4}\right] < 23 \cdot 3,3 \cdot 10^{-5} < 7,6 \cdot 10^{-4}$$

Selon la partie I, (18) est équivalent à

$$(21)\quad \sum_{0\leq J(\varrho)<200} \frac{1}{|\varrho|^4} < \frac{1}{14^4} + \frac{2}{20^4} + \frac{7}{30^4} + \frac{19}{50^4} + \frac{50}{100^4} < 5,1 \cdot 10^{-5}.$$

Les zéros de $L(s,\chi)$ avec $0 \leq J(\varrho) < 44$ vérifient dans les deux cas suivants[24] :

a) $k = 3$.

$$8 \leq J\left(\varrho^{*(1)}\right) \leq 10 \leq J\left(\varrho^{*(2)}\right) \leq 12 \leq J\left(\varrho^{*(3)}\right) \leq 18 \leq J\left(\varrho^{*(4)}\right) \leq 20$$

$$\leq J\left(\varrho^{*(5)}\right) \leq 24 \leq J\left(\varrho^{*(6)}\right) \text{ jusqu'à } J\left(\varrho^{*(8)}\right) \leq 30 \leq J\left(\varrho^{*(9)}\right) \text{ jusqu'à } J\left(\varrho^{*(14)}\right) \leq 44$$

[24] Großmann, a. a. O., §§7 und 8.

b) $k = 4$.

$$
\begin{aligned}
6 \ &\leq J\left(\varrho^{*(1)}\right) \leq 10 \leq J\left(\varrho^{*(2)}\right) \leq 12 \leq J\left(\varrho^{*(3)}\right) \leq 16 \leq J\left(\varrho^{*(4)}\right) \leq 18 \\
&\leq J\left(\varrho^{*(5)}\right) \leq 20 \leq J\left(\varrho^{*(6)}\right) \ \text{ et } \ J\left(\varrho^{*(7)}\right) \leq 24 \\
&\leq J\left(\varrho^{*(8)}\right) \ \text{ jusqu'à } \ J\left(\varrho^{*(10)}\right) \leq 30 \ \ J\left(\varrho^{*(11)}\right) \ \text{ jusqu'à } \ J\left(\varrho^{*(17)}\right) \leq 45
\end{aligned}
$$

Donc pour $k = 3$

$$
\sum_{0 \leq J(\varrho^*) < 44} \frac{1}{|\varrho^*|^4} \leq \frac{1}{8^4} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{12^4} + \frac{1}{18^4} + \frac{1}{20^4} + \frac{1}{24^4} + \frac{1}{30^4} < 4,3 \cdot 10^{-4}
$$

et pour $k = 4$

$$
\sum_{0 \leq J(\varrho^*) < 44} \frac{1}{|\varrho^*|^4} \leq \frac{1}{6^4} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{12^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{18^4} + \frac{1}{20^4} + \frac{1}{24^4} + \frac{1}{30^4} < 9,76 \cdot 10^{-4}.
$$

De ceci et de (21) il découle dans les deux cas

$$
\text{(22)} \quad 2 \cdot 23 \left[\sum_{0 \leq J(\varrho^*) < 200} \frac{1}{|\varrho|^4} + \sum_{0 \leq J(\varrho^*) < 44} \frac{1}{|\varrho^*|^4} \right]
$$

$$
46 \left[5,1 \cdot 10^{-5} + 97,6 \cdot 10^{-5}\right] < 0,048.
$$

Donc par (18), (19), (20) et (22)

$$
\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5,5^3} \sum_{\substack{x < v \leq 2x \\ v \equiv l \ (\mathrm{mod}\ k)}} a_v > x \left[\frac{1}{5,5^4} - 7,6 \cdot 10^{-4}\right] - \sqrt{x}\left[7,6 \cdot 10^{-4} + 0,048\right] - 0,05 - \frac{1}{5,5^4} - \frac{18}{x}
$$

$$
> 3,3 \cdot 10^{-4}\, x - 0,049\sqrt{x} - 0,06 - \frac{18}{x}.
$$

Soit maintenant $x \geq 10^6$; alors

$$
\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5,5^3} \sum_{\substack{x < v \leq 2x \\ v \equiv l \ (\mathrm{mod}\ k)}} a_v > (3,3 - 0,5) \cdot 10^{-4}\, x = 2,8 \cdot 10^{-4}\, x
$$

ou

$$
\text{(23)} \qquad \sum_{\substack{x < v \leq 2x \\ v \equiv l \ (\mathrm{mod}\ k)}} a_v > \frac{2,8 \cdot 5,5^3 \cdot 3}{4} \cdot 10^{-4}\, x > 3,4 \cdot 10^{-2}\, x.
$$

Par définition, on a

$$\sum_{\substack{x<v\leq 2x\\ v\equiv l \pmod k}} a_v - \sum_{\substack{x<p\leq 2x\\ p\equiv l \pmod k}} \log p = \sum_{\substack{x<p^\mu\leq 2x\\ p^\mu\equiv l \pmod k\\ \mu>1}} \log p \leq \sum_{\substack{p^\mu\leq 2x\\ \mu>1}} \log p$$

$$= \psi(2x) - \vartheta(2x) \leq 2\psi(\sqrt{2x}),$$

soit pour $x \geq 10^6$

$$\sum_{\substack{x<v\leq 2x\\ v\equiv l \pmod k}} a_v - \sum_{\substack{x<p\leq 2x\\ p\equiv l \pmod k}} \log p < 2[1,106\sqrt{2x} + 3\log^2\sqrt{2x} + 8\log\sqrt{2x} + 5] < 3,8\sqrt{x}.$$

Enfin, de (23) il résulte que

$$\sum_{\substack{x<p\leq 2x\\ p\equiv l \pmod k}} \log p > 3,4\cdot 10^{-2}\, x - 3,8\sqrt{x} > 3\cdot 10^{-2}\, x > 0, \tag{24}$$

pour $x \geq 10^6, k = 3$, et $l = 1$ ou $k = 3$ et $l = 2$ ou $k = 4$ et $l = 1$ ou $k = 4$ et $l = 3$, c'est-à-dire pour $x \geq 10^6$, il y a toujours des nombres premiers de chacune des quatre progressions entre x et $2x$.

Afin de prouver le théorème pour $7 \leq x < 10^6$, on a encore besoin de tables de nombres premiers. Pour $24 \leq x < 10^6$ il y a toujours des nombres premiers de chacune des deux progressions $12n+1$ et $12n-1$ entre x et $2x$; car dans les deux systèmes suivants de nombres premiers de la forme $12n+1$ et $12n-1$, chacun des suivants est inférieur au précédent multiplié par 2.24, et le dernier est supérieur à 10^6 :

a) $12n+1$.
37, 73, 109, 193, 373, 733, 1453, 2857, 5701, 11 353, 22 669, 45 289, 90 529, 180 949, 361 873, 723 661, 1 447 309.

b) $12n-1$.
47, 83, 131, 251, 491, 971, 1823, 3623, 7211, 14 411, 28 751, 57 467, 114 827, 229 631, 459 167, 918 263, 1 836 479.

Et enfin, pour $7 \leq x < 24$ il y a toujours des nombres premiers de chacune des quatre progressions entre x et $2x$ comme le montrent les quatre systèmes de nombres premiers suivants :

a) 3n+1: $13, 19, 37$
b) 3n+2: $11, 17, 29$
c) 4n+1: $13, 17, 29$
d) 4n+3: $11, 19, 31$.

(Reçu le 15. Septembre 1930.)