Expression de la conjecture de Goldbach en logique du premier ordre (Denise Vella-Chemla, 15.5.2022)

Dans une note précédente[1], on a démontré qu'un nombre premier supérieur à $\sqrt{n}$ et inférieur ou égal à $n/2$, et qui n'est jamais congru à n modulo tout nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$ est un décomposant de Goldbach de n.

Il s'agit de démontrer qu'un tel nombre existe toujours.

Si on suivait cette façon de voir la conjecture, on pourrait peut-être la démontrer en réussissant à faire démontrer à un ordinateur (en utilisant Lean, Coq ou Isabelle) l'énoncé de la logique du premier ordre ci-dessous :

$$\begin{aligned}
&\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 6 \wedge 2 \mid n,\\
&\exists\, p \in \mathbb{N}, p \leqslant \tfrac{n}{2},\\
&\quad \forall\, q \in \mathbb{N}, q \leqslant \sqrt{n} \;\text{ tq }\; \forall\, r \leqslant \sqrt{q},\;\; r \nmid q,\\
&\qquad\quad p \not\equiv 0 \pmod{q} \wedge\; p \not\equiv n \pmod{q}.
\end{aligned}$$

Si on veut se passer de la notation par les congruences de Gauss ($x \equiv y \pmod{m}$), il faut aussi dire à l'ordinateur que :

$$\begin{aligned}
&\forall\, a \in \mathbb{N}, \forall\, r' \in \mathbb{N}, \forall\, q \in \mathbb{N}^*,\\
&\qquad a \not\equiv r' \pmod{q} \iff \exists\, r \in [0, q-1] \;\text{ tq }\; a = bq + r \wedge r \neq r'.
\end{aligned}$$

[1] http://denise.vella.chemla.free.fr/jade1.pdf.