Sur divers théorèmes

de la théorie des ensembles de points

situés dans un espace continu à n dimensions

Première communication

Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur par G. Cantor

M'étant proposé de vous communiquer les démonstrations de plusieurs théorèmes, que j'ai trouvés dans la théorie des ensembles, je vous prie de me permettre de commencer par les trois suivants, A, B et C dont : j'ai fait mention dans le mémoire : "*Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig 1883".

Comme j'aurai à citer ce travail en divers endroits, je prendrai la liberté de le désigner par les lettres "*Gr.*".

Théorème A. "Un ensemble de points P (situé dans un espace continu G_n à n dimensions) ayant la *première puissance* ne peut jamais être un ensemble *parfait*."

Théorème B. "Le nombre α appartenant à la *première* ou à la *seconde* classe de nombres, soit P un ensemble de points tel que son ensemble dérivé $P^{(\alpha)}$ d'ordre α s'évanouit, alors le *premier ensemble dérivé* $P^{(1)}$ de P et *l'ensemble* P lui même sont de la *première* puissance, sauf les cas où les ensembles P ou $P^{(1)}$ sont finis."

Théorème C. "P étant un ensemble de points tel que son premier ensemble dérivé $P^{(1)}$ est de la première puissance, il existe des nombres α de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres tels qu'on a identiquement

$$P^{(\alpha)} \equiv 0,$$

et de tous ces nombres α il y en a un qui en est le plus petit."

Démonstration du théorème A.

D'après *Gr.* § 10, j'appelle *ensemble parfait de points* un ensemble S tel que son premier dérivé $S^{(1)}$ coïncide avec S lui-même, en sorte que tout point s appartenant à S est un point-limite de S et qu'aussi tout point-limite s' de S est un point appartenant à S.

Soient maintenant

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu, \ldots$$

les points qui constituent l'ensemble P ; nous pouvons les imaginer donnés en cette forme de série (p_ν), parce que P a d'après l'hypothèse, admise dans notre théorème, la *première puissance*.

Nous admettons que chaque point p_ν de P est un *point-limite* de P et nous voulons en conclure l'existence

Acta mathematica, 2. Imprimé 26 Août 1883.

de *points-limites* de P qui n'appartiennent pas comme *points* à P ; il en suivra que P ne peut pas être un ensemble parfait, car s'il en était ainsi, non seulement chaque *point* de P devrait être un *point-limite* de P, mais aussi chaque *point-limite* de P serait nécessairement un *point appartenant* à P.

Que l'on prenne p_1, pour centre d'un ensemble continu à $(n-1)$ dimensions, lieu des points de G_n, qui ont la distance $\rho_1 = 1$ de p_1 ; nous nommerons un tel ensemble une sphère de rayon ρ_1, et nous la désignerons ici par K_1.

De tous les points de la suite (p_ν) qui suivent p_1 soit p_{i_1} le premier qui tombe dans *l'intérieur* de la sphère K_1 (et il y en a dans l'intérieur de K_1 un nombre infini, puisque le centre p_1 est, comme nous avons admis, un *point-limite* de P ; nommons σ_1 la distance des points p_1 et p_{i_1} et prenons p_{i_2} comme centre d'une seconde sphère K_2 dont le rayon ρ_2 est déterminé par la condition d'être la plus petite des deux quantités :

$$\frac{1}{2}\sigma_1, \qquad \frac{1}{2}(\rho_1 - \sigma_1).$$

La sphère K_2 est alors située toute entière à l'intérieur de K_1, et les points

$$p_1, p_2, \ldots, p_{i_2-1}, \ldots$$

de la série (p_ν) sont situés tous, en dehors de la sphère K_2 ; le rayon ρ_2 de la dernière est, comme on voit, plus petit que $\frac{1}{2}$.

De même soit p_{i_2} le premier point de la suite (p_ν) de tous ceux, qui suivent p_{i_2} et qui tombent dans l'intérieur de la sphère K_2 ; il y en a un nombre infini, puisque p_{i_2} est supposé être point-limite de P ; nous désignons la distance des points p_{i_2} et p_{i_3} par σ_2 et prenons p_{i_3} pour centre d'une troisième sphère K_3 dont le rayon ρ_3 est déterminé par la condition d'être la plus petite des deux quantités :

$$\frac{1}{2}\sigma_2, \qquad \frac{1}{2}(\rho_2 - \sigma_2).$$

la sphère K_3 est alors située tout entière à l'intérieur de K_2 et les points $p_1, p_2, p \ldots, p_{i_3-1}, \ldots$ de la série (p_ν) sont situés tous en dehors de la sphère K_3 ; le rayon ρ_3 est évidemment plus petit que $\frac{1}{4}$.

On voit donc ici une *loi* d'après laquelle on peut former une suite infinie de sphères :

$$K_1, K_2, K_3, \ldots, K_\nu, \ldots$$

liée à une série déterminée de nombres entiers i_ν croissants avec leurs indices, de sorte que l'on a :

$$1 < i_2 < i_3 < \ldots$$

Chaque sphère K_ν est située toute entière à l'intérieur de la précédente $K_{\nu-1}$.

Le centre p_{i_ν} de la sphère K_ν est défini par la condition qu'il est le premier point de la série (p_ν) de tous ceux qui suivent $p_{i_{\nu-1}}$ et qui sont situés à l'intérieur de la sphère $K_{\nu-1}$; le rayon ρ_ν de K_ν est défini par la condition d'être le plus petit des deux nombres :

$$\frac{1}{2}\sigma_{\nu-1}, \qquad \frac{1}{2}(\rho_{\nu-1} - \sigma_{\nu-1}).$$

en désignant par $\sigma_{\nu-1}$ la distance, des points $p_{i_{\nu-1}}$ et p_{i_ν}.

Les points $p_1, p_2, \ldots, p_{i_\nu - 1}$ sont situés tous en dehors de la sphère K_ν mais il y a un nombre infini de points de la série (p_ν), qui sont situés à l'intérieur de K_ν puisque le centre p_{i_ν} est, comme nous l'avons admis, un point-limite de P. Comme on a évidemment

$$\rho_\nu < \frac{1}{2^{\nu-1}},$$

les rayons des sphères K_ν deviennent infiniment petits pour $\nu = \infty$, et puisque les sphères K_ν, sont emboîtées de telle sorte que K_ν, est située à l'intérieur de $K_{\nu-1}$, celle-ci à l'intérieur de $K_{\nu-2}$, etc., on en conclut d'après un principe connu l'existence d'un point t dont s'approchent indéfiniment les centres p_{i_ν}, en sorte que l'on a

$$\underset{\nu=\infty}{lim}\, p_{i_\nu} \doteq t \qquad ;$$

le point t est donc point-limite de P. Mais de plus on s'assure, que t n'est pas un *point* appartenant à P ; car s'il l'était, on aurait $t = p_n$ pour une certaine valeur de l'indice n, équation *impossible*, puisque t est situé à l'intérieur de la sphère K_ν, quelque grand que soit ν, quand au contraire on peut prendre ν assez grand, savoir $\nu > n$, de sorte que p_n tombe en dehors de la sphère K_ν.

Donc nous avons démontré que P ne peut pas être un *ensemble parfait.*

Démonstration du théorème B.

α étant un nombre donné quelconque de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres, on a, quel que soit l'ensemble P, l'identité suivante :

(I) $$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}) + P^{(\alpha)}$$

dans laquelle α' parcourt tous les nombres entiers positifs qui sont *inférieurs* à α. La vérité de cette identité (I) découle facilement de la notion générale de *l'ensemble dérivé* $P^{(\alpha)}$ *de l'ordre* α.

Lorsque α est un nombre tel qu'il existe un autre $\alpha - 1$ qui précède α immédiatement, alors $P^{(\alpha)}$ est défini comme étant le *premier ensemble dérivé* de $P^{(\alpha-1)}$ mais lorsque α est un nombre tel (comme par exemple ω ou ω^ω ou $\omega^{\omega^\omega} + \omega^2$), qu'il n'a point de voisin qui le précède immédiatement, alors $P^{(\alpha)}$ est défini comme étant le plus grand commun diviseur de tous les ensembles dérivés $P^{[\alpha')}$ dont les ordres α' sont *inférieurs* à α.

D'après l'hypothèse admise dans notre théorème, $P^{(\alpha)}$ s'évanouit, on a donc ici :

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

Le nombre des valeurs de α' est ou fini ou infini selon que α appartient à la *première* ou à la *seconde* classe de nombres ; mais dans le dernier cas l'ensemble des valeurs de α' est de la *première* puissance (cf. la définition de la seconde classe de nombres dans *Gr.* § 11).

Chaque terme

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

de notre somme est un ensemble de points appartenant à la catégorie de ceux que j'appelle *ensembles isolés* (voir Annales math. T. 21 p. 51).

Comme je l'ai démontré au même endroit, un ensemble *infini* et *isolé* est toujours de la *première puissance.* Donc le terme

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

de notre somme est un ensemble ou fini, ou de la *première puissance.*

Par là, on conclut facilement que $P^{(1)}$ est aussi de la *première puissance* donc aussi P est de la première puissance, comme on le trouve démontré à l'endroit cité tout à l'heure.

Démonstration du théoreme C.

En désignant par Ω le premier nombre de la *troisième* classe de nombres, on a, quelque soit l'ensemble P, l'identité suivante :

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha} (P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)}) + P^{(\Omega)} \tag{2}$$

où α parcourt tous les nombres entiers positifs de la *première* et de la *seconde* classe de nombres.

L'ensemble P est d'après l'hypothèse admise dans notre théorème tel que son premier dérivé $P^{(1)}$ ait la *première puissance* ; donc aussi les dérivés $P^{(\alpha)}$, qui sont tous des diviseurs de $P^{(1)}$, ont la même puissance, en tant qu'ils sont constitués par un nombre infini de points.

En nous appuyant maintenant sur le théorème A, démontré plus haut, nous concluons que la différence $(P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)})$ *ne peut pas s'annuler tant que* $P^{(\alpha)}$ *n'est pas zéro.*

Si donc tous les dérivés $P^{(\alpha)}$ étaient *différents* de zéro, tous les termes $(P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)})$ de notre somme à droite de l'équation (2) le seraient de même et comme l'ensemble de ces *termes* est de la *seconde* puissance (cf. *Gr.* § 12), il s'ensuivrait à plus forte raison que l'ensemble de points à droite de notre équation (2) serait d'une puissance *non inférieure* à la *seconde* ; ce qui serait contraire à l'hypothèse, d'après laquelle l'ensemble $P^{(1)}$ à gauche de l'équation (2) est supposé de la *première* puissance.

Donc les dérivés $P^{(\alpha)}$ ne peuvent pas être tous différents de zéro, il existe donc des nombres α de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres tels que l'on a :

$$P^{(\alpha)} \equiv 0$$

De ces nombres α, il y en a un qui est le plus petit, comme il est facile de le voir.

Dans le mémoire *Gr.* page 31, j'ai aussi indiqué une proposition se rapportant au cas où $P^{(1)}$ n'est pas de la première puissance, et qui, dans la forme où je l'ai exprimée, n'est pas tout à fait juste dans sa généralité. Comme je l'ai trouvé alors, il existe sans doute, une seule décomposition :

$$P^{(1)} = R + S,$$

où S est un ensemble parfait, mais R un ensemble de la *première* puissance. Si passant de là, je dis que R est un ensemble réductible, ce n'est pas correct dans sa portée générale.

Monsieur Bendixson de Stockholm qui s'est occupé avec un succès distingué de l'examen de ma proposition a trouvé que R est toujours tel que, pour, un certain γ de la première ou de la seconde classe de nombres, on a l'équation :

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) = 0.$$

Il résulte des communications que M. Bendixson a eu l'obligeance de me faire, qu'il a retrouvé d'une manière parfaitement indépendante mes développements d'alors concernant ce sujet, et qu'il les a complétés et rectifiés dans le sens indiqué. Sur ma demande, M. Bendixson a voulu bien rédiger ses recherches pour être publiées à la suite de cette communication.

Halle, le 22 Avril 1883.