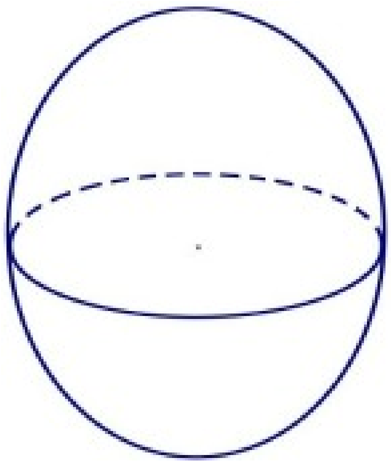
Courbes elliptiques et hyperelliptiques

A. Lesfari
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr

Nous allons construire le plus intuitivement possible les surfaces de Riemann dans le cas elliptique et hyperelliptique. Rappelons d'abord qu'en général, la définition d'une fonction fait qu'à une valeur de la variable correspond une seule valeur de la fonction. Dans certains cas, celà n'est pas très naturel car l'usage des fonctions complexes n'est pas simple. Lors de la définition de telles fonctions, on rencontre généralement des difficultés au niveau de la détermination de l'image : non unicité, défaut de continuité. On parle dans ce cas de fonction multiforme. Si la définition, par exemple, de la fonction carrée z^2, de la fonction inverse $\frac{1}{z}$, de la fonction exponentielle $\exp z$, etc... ne pose pas de problèmes majeurs, il n'en va pas de même, par exemple, avec les tentatives de définition de la fonction racine carrée $\sqrt{z}$, la fonction logarithme complexe $\log z$, etc... Considérons par exemple la fonction $\sqrt{z}$ sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Si z est un nombre complexe, on peut l'écrire : $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$ où r est le module de z et θ est un argument de z, défini à $2k\pi$ près. Lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, z reste inchangé. Les racines carrées de z dans $\mathbb{C}$ sont alors $\sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)}$. Supposons que le nombre complexe z décrit un cercle ne contenant pas l'origine, son argument augmente puis revient à sa valeur initiale après un tour complet. Par contre, si z décrit un cercle contenant 0, alors son argument augmente de 2π : z reprend donc sa valeur initiale mais, pendant ce temps, l'argument de la racine carrée choisie verra son argument augmenter de π. Au final, on retombe sur l'autre détermination de la racine carrée ! L'origine 0 qui pose ici problème, est appelé point de branchement ou de ramification pour la fonction racine carrée : elle est une fonction multiforme autour de 0. On est donc en présence d'une fonction multiforme : deux images opposées. Si z est non nul, il existe deux valeurs possibles pour $\sqrt{z}$, et il n'y a pas de raison de préférer l'une à l'autre. Laquelle choisir ? Problème a priori insoluble quel que soit le choix car nous travaillons ici dans $\mathbb{C}$.

Les calculs faisant intervenir des fonctions multiformes sont parfois lourds et compliqués. Riemann a eu l'idée de transformer les fonctions multiformes en fonctions uniformes (un point n'a qu'une seule image), en modifiant le domaine de définition. Il recolle pour cela continûment plusieurs représentations du domaine de définition, les feuillets, et obtient le concept de surface de Riemann. Partant de diverses fonctions multiformes sur $\mathbb{C}$, on peut les rendre uniformes en remplaçant leur domaine $\mathbb{C}$ par une surface de Riemann ; c'est le procédé d'uniformisation. Quoi qu'il semble compliqué à priori de remplacer $\mathbb{C}$ par une surface, on peut se dire que cette surface est le domaine naturel sur lequel la fonction est définie, ce qui justifie son introduction. Parmi les problèmes qui se posent, on ne peut pas définir de façon cohérente les opérations de calcul sur les fonctions multiformes : par exemple que vaut $(\pm\sqrt{z} \pm \sqrt{z})$? Sur la surface de Riemann de $\sqrt{z}$, cette complication n'existe pas. Plus précisément, pour remédier à ce problème, Riemann imagine un artifice redéfinissant l'ensemble de définition des fonctions complexes : on parle aujourd'hui de surfaces de Riemann sur lesquelles ces fonctions redeviennent uniformes (nos fonctions usuelles : l'image est unique).

Pour la fonction $\sqrt{z}$, on clone le plan complexe que l'on représente par deux feuillets reliés entre eux par le demi-axe positif, appelé coupure. Aucun cercle autour de 0 ne doit franchir cette coupure à moins de passer d'un feuillet à l'autre ou inversement. Dans ces conditions, z ne reprendra sa valeur initiale qu'au bout de deux tours. Ayant fait le choix d'une détermination de la racine carrée, celle-ci devient uniforme sur la surface de Riemann (ici la sphère de Riemann), ce qui autorise alors la notation $\sqrt{z}$.



Passons maintenant à la construction de la surface de Riemann dans le cas elliptique et hyperelliptique. Soit

$$w^2 = P_3(z),$$

où $P_3(z)$ est un polynôme de degré 3, ayant trois racines distinctes e_1, e_2, e_3.

Considérons

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \; z \longmapsto w : w^2 = P_3(z),$$

Il est évident que w n'est pas une fonction (uniforme). A chaque valeur de z correspond deux valeurs différentes de w sauf quand

$$z = e_1, \quad z = e_2, \quad z = e_3.$$

En ces points, w est univaluée : en effet, on a

$$w = \pm\sqrt{P_3\left(e_i\right)} = 0,$$

une seule valeur. Tous les points à l'infini dans toutes les directions seront identifiés en un seul point que l'on désigne par ∞. Au point $z = \infty$, w est aussi univaluée : en effet, posons $z = \frac{1}{t}$, d'où

$$w^2 = P_3\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t} - e_1\right)\left(\frac{1}{t} - e_2\right)\left(\frac{1}{t} - e_3\right),$$

et

$$w \sim \pm\sqrt{\frac{1}{t^3}}.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{t\to 0} w = \pm\infty$ c'est-à-dire ∞, une seule valeur.

Notre problème consiste à uniformiser w, autrement dit, on cherche un domaine sur lequel w est une fonction (uniforme). Auparavant, étudions le comportement de w au voisinage des racines de $P_3(z) = 0$ c'est-à-dire e_1, e_2, e_3 ainsi qu'au voisinage du point à l'infini ∞. Si z décrit un circuit (c'est-à-dire un chemin fermé, par exemple un cercle) entourant un des points e_1, e_2, e_3 et ∞, alors w change de signe : en effet, supposons que z décrit un cercle centré en e_1 et posons

$$z - e_1 = re^{i\theta},$$

où r est le module de $z - e_1$ et θ son argument. Evidemment r ne change pas tandis que θ varie de 0 à 2π. Au voisinage de e_1, $w = \sqrt{P_3(z)}$ se comporte comme

$$w = \sqrt{z - e_1} = r^{1/2} e^{i\theta/2}.$$

Dès lors, pour $\theta = 0$, on a $w = r^{1/2}$ tandis que pour $\theta = 2\pi$, on a $w = -r^{1/2}$. Si on refait de nouveau un tour complet autour de $z = e_1$, l'argument θ varie de 2π à 4π et alors on obtient $r^{1/2}$ qui est la valeur de départ. Pour $z = e_2$ ou $z = e_3$, il suffit d'utiliser un raisonnement similaire au cas précédent. En ce qui concerne le point ∞, on pose comme précédemment $z = \frac{1}{t}$ et on étudie

$$w^2 = P_3\left(\frac{1}{t}\right),$$

au voisinage de $t=0$. On a

$$w \sim \pm\sqrt{\frac{1}{t^3}} = \pm t^{-3/2}.$$

Soit $t = re^{i\theta}$. Autour de $t=0$, w se comporte comme

$$w = t^{-3/2} = r^{-3/2}e^{-3i\theta/2}.$$

Dès lors, pour $\theta = 0$, on a $w = r^{-3/2}$ et pour $\theta = 2\pi$, on a $w = -r^{-3/2}$. Comme précédemment, si t refait de nouveau un tour complet, w reprend la valeur de départ c'est-à-dire $r^{-3/2}$.

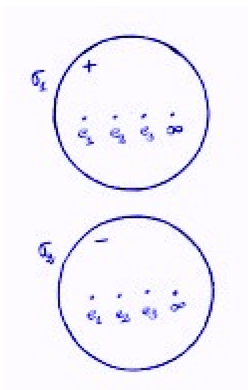
Passons maintenant à la construction du domaine sur lequel w serait une fonction uniforme. Cette construction se fera en plusieurs étapes :

1ère étape : Prenons deux copies ou feuillets σ_1 et σ_2 du plan complexe compactifié $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ou ce qui revient au même de la sphère de Riemann puisqu'ils sont homéomorphes. Plaçons le feuillet σ_1 au dessus de σ_2 et sur chacun de ces feuillets marquons les points e_1, e_2, e_3, ∞. Supposons que les points de σ_1 seront envoyés sur

$$w = \sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)},$$

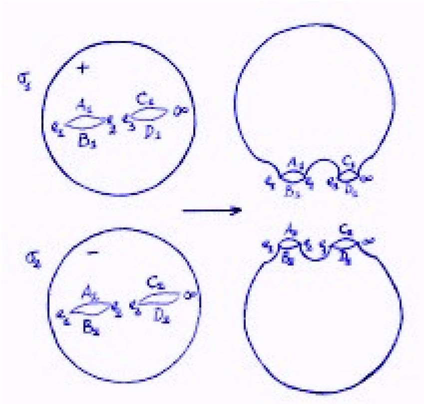
et que ceux de σ_2 seront envoyés sur

$$w = -\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}.$$

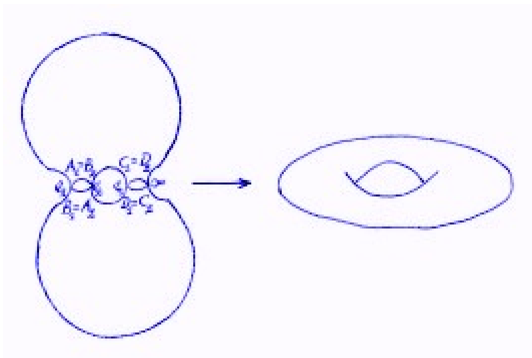


2ème étape : Dans chaque feuillet, faisons deux coupures : une le long de la courbe reliant le point e_1 au point e_2 et l'autre le long de la courbe reliant le point e_3 au point ∞. Désignons par A_1, B_1, C_1, D_1 (resp. A_2, B_2, C_2, D_2) les bords des coupures dans le feuillet σ_1 (resp. σ_2). Rappelons que w change de signe lorsque l'on tourne d'un tour autour d'un des points e_1, e_2, e_3, ∞. Donc en allant de A_1 à B_1, on change le signe de w c'est-à-dire on passe sur l'autre feuillet, là où w a l'autre signe. De même pour les bords A_2 et B_2, C_1 et D_1, C_2

et D_2. Par conséquent, w a la même valeur sur A_1 et B_2, sur B_1 et A_2, sur C_1 et D_2 et enfin sur D_1 et C_2.



3ème étape : On identifie les bords suivants : A_1 à B_2, B_1 à A_2, C_1 à D_2 et D_1 à C_2. Après recollement, on obtient un tore à un trou.

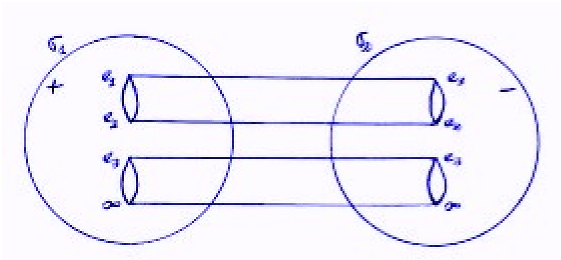


La surface à deux feuillets obtenue s'appelle surface de Riemann elliptique ou courbe elliptique associée à l'équation :

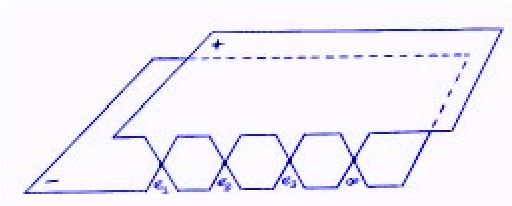
$$w^2 = (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3).$$

Sur cette surface, w est une fonction uniforme. Lorsqu'on tourne autour d'un des points e_1, e_2, e_3, ou ∞, on passe d'un feuillet à l'autre. En ces points les deux feuillets se joignent et on les appellent points de branchement ou de ramification de la surface.

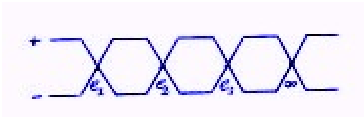
Remarque 1 a) *La surface obtenue peut-être tracée de différentes façons :*



ou



ou encore



b) Si

$$w^2 = P_4(z),$$

où $P_4(z)$ *est un polynôme de degré* 4, *ayant quatre racines distinctes* e_1, e_2, e_3, e_4, *alors on obtient aussi une courbe elliptique. Les points de branchements sont* e_1, e_2, e_3 *et* e_4. *Notons que si*

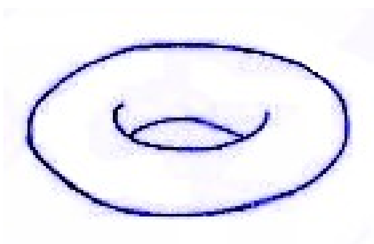
$$w^2 = (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4),$$

alors la transformation

$$(w, z) \longmapsto \left(\frac{y}{x^2}, e_1 + \frac{1}{x}\right),$$

ramène cette équation à la forme

$$y^2 = (1 + (e_1 - e_2)x)(1 + (e_1 - e_3)x)(1 + (e_1 - e_4)x).$$



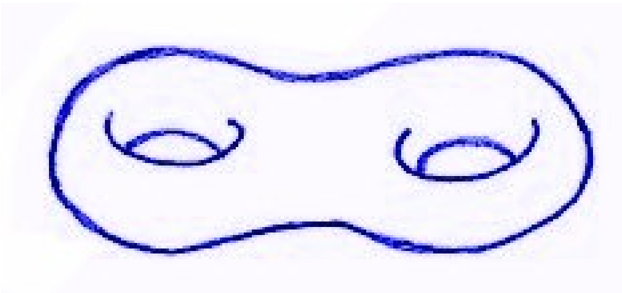
c) Signalons enfin que si

$$w^2 = P_n(z),$$

où $P_n(z)$ *est un polynôme de degré* n *supérieur où égal à* 5, *ayant* n *racines distinctes, alors on obtient ce qu'on appelle surface de Riemann hyperelliptique ou courbe hyperelliptique. Plus précisément, une surface de Riemann hyperelliptique ou courbe hyperelliptique de genre* g *se définit par une équation de la forme*

$$w^2 = P_n(z) = \begin{cases} P_{2g+1}(z) & si\ n = 2g+1 \\ \widetilde{P}_{2g+2}(z) & si\ n = 2g+2 \end{cases}$$

où $P_{2g+1}(z)$ *et* $\widetilde{P}_{2g+2}(z)$ *sont des polynômes sans racines multiples. Pour* $n = 5$ *ou* 6, *on obtient une courbe hyperelliptique de genre* $g = 2$ *:*



n	***g (genre)***	***Surface de Riemann***
1 ou 2	*0*	*sphère de Riemann*
3 ou 4	*1*	*elliptique à un trou*
5 ou 6	*2*	*hyperelliptique à deux trous*
7 ou 8	*3*	*hyperelliptique à trois trous*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\left[\frac{n-1}{2}\right]$ *(partie entière)*	*hyperelliptique à* $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ *trous*