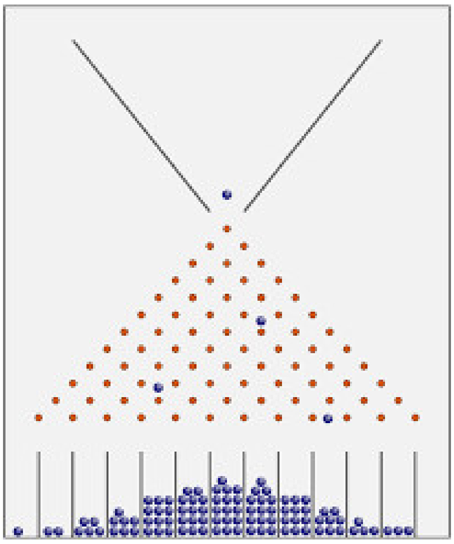
Décomposants de Goldbach sur planche de Galton (Denise Vella-Chemla, 27.8.18)

On a pris récemment la pleine mesure de la manière dont l'aléa gouverne les décompositions de Goldbach (i.e. ou décompositions d'un nombre pair en somme de deux nombres premiers) ainsi que leur nombre, en les étudiant selon un point de vue utilisant des matrices 2×2 de transitions codant des sortes d'échanges de jetons.
On souhaite étudier ici, pour appréhender davantage encore cet aléa, la manière dont les décomposants de Goldbach quantifiés (coupés en unités) remplissent une sorte de "planche de Galton" ; c'est une planche dans laquelle des billes tombent, et se répartissent plus il y en a selon une courbe de Gauss (courbe en cloche). Cette idée est venue de l'association souvent faite dans la littérature entre les concepts de chip-firing game et de sandpile (pile de sable) qui s'effondre petit à petit, les grains glissant les uns sur les autres *.

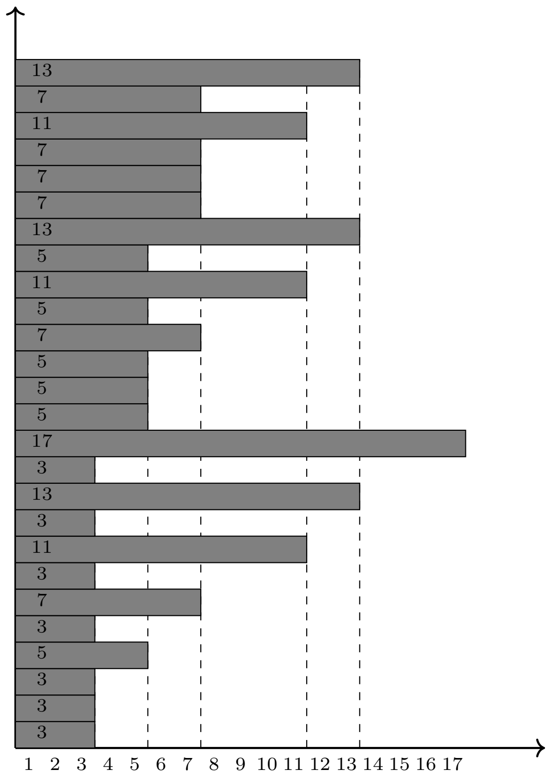


Illustrons sur un diagramme les comptages qu'on va effectuer par programme, avec les décompositions de Goldbach des nombres pairs compris entre 6 et 20. Voici les décompositions de Goldbach de ces nombres :

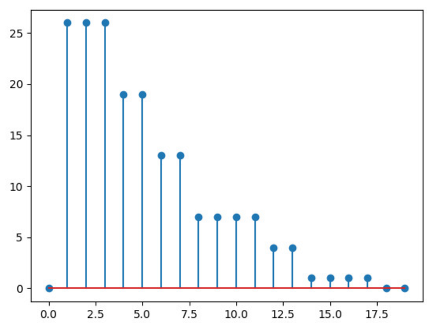
$$6 = 3 + 3$$
$$8 = 3 + 5$$
$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$
$$12 = 5 + 7$$
$$14 = 3 + 11 = 7 + 7$$
$$16 = 3 + 13 = 5 + 11$$
$$18 = 5 + 13 = 7 + 11$$
$$20 = 3 + 17 = 7 + 13$$

Empilons-les toutes les unes sur les autres ainsi :

$*$. sans compter qu'on a souvent eu l'impression, lors de ces recherches, de concepts qui nous filent entre les doigts comme du sable...



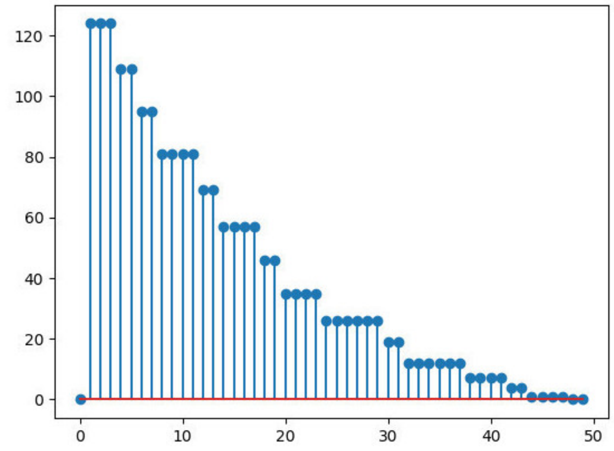
Faisons descendre les quanta de décompositions le plus bas possible pour les compter, on obtient par programme le graphique suivant :

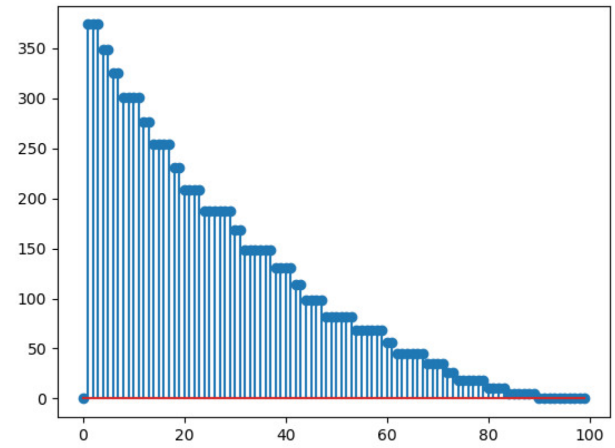


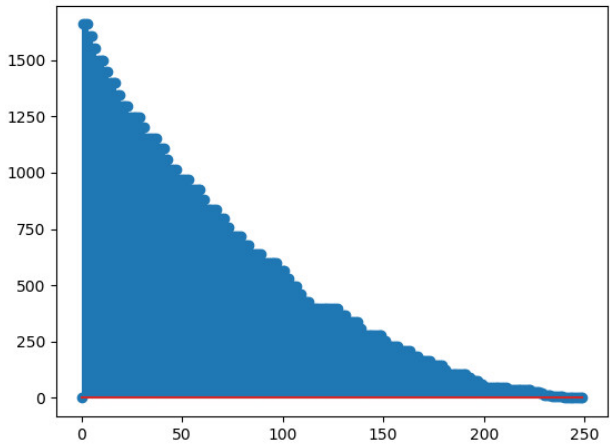
Notons les valeurs de la fonction que représente ce diagramme dans un tableau et explicitons ce que représentent ses valeurs (le sigle dg dans le tableau signifie *décomposant de Goldbach*) :

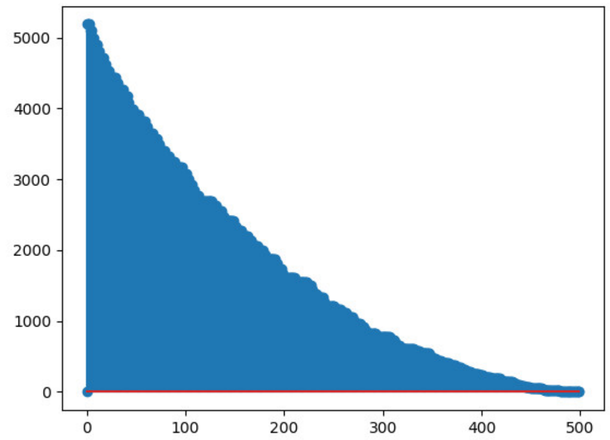
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
26	26	26	19	19	13	13	7	7	7	7	4	4	1	1	1	1
nb. dg ≥ 3			*nb. dg* ≥ 5		*nb. dg* ≥ 7		*nb. dg* ≥ 11				*nb. dg* ≥ 13		*nb. dg* ≥ 17			

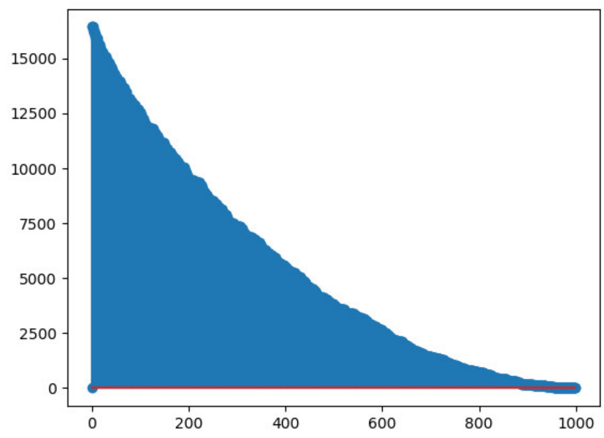
Le total de 26 compte les sommants des décompositions supérieurs ou égaux à 3 (on ne l'a noté que pour $f(2)$ mais il est identique pour $f(1)$ et $f(3)$), le total de 19 compte les sommants des décompositions supérieurs ou égaux à 5 (resp. 13 pour le nombre de sommants ≥ 7, 7 pour le nombre de sommants ≥ 11, 4 pour le nombre de sommants ≥ 13, 1 pour le nombre de sommants ≥ 17).
La fonction compte dans toutes les décompositions de Goldbach recensées des nombres de 6 à 20, pour un nombre x compris entre 2 nombres premiers successifs p_k et p_{k+1}, le nombre de sommants des décompositions qui sont supérieurs ou égaux à p_{k+1}. Par exemple, 4 sommants sont supérieurs ou égaux à 13 (les seconds sommants de décompositions de 16, 18 et 20) et la fonction attribue donc 4 comme image au nombre 12 et au nombre 13.
On fournit ci-dessous la tendance générale qui semble se dessiner pour cette fonction, bien qu'on n'ait pas pu la tester très loin (courbes jusqu'à 50, 100, 250, 500, 1000 et 10000).

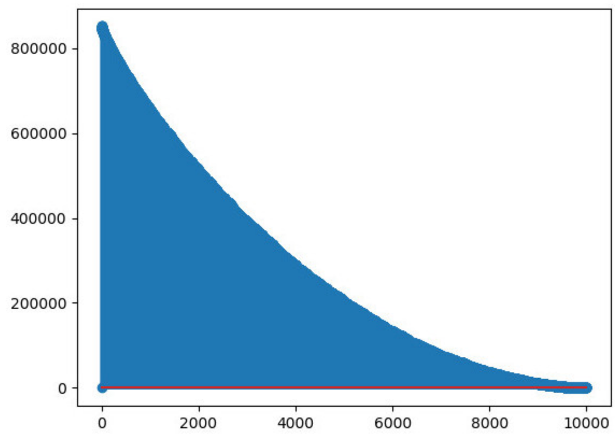












On approxime bien les premières courbes $f(x)$ par des formules comme :

$$(x - maxx) * (x - maxx)/(2.58498 * sqrt(maxx))$$

pour les petites valeurs de $maxx$ (50, 100, 250) (avec 2.58498 qui est la constante de Sierpinski †) mais cela ne va plus dès le graphique correspondant à $maxx = 500$ (regarder les ordonnées pour les petites

†. voir wikipedia : la constante de Sierpinski est la constante K définie par $K = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{r_2(k)}{k} - \pi \ln n\right]$ où $r_2(k)$ est le nombre de représentations de k comme une somme de deux carrés $a^2 + b^2$ avec a et b entiers naturels.
Sa valeur est :

$$K = \pi\left(2\ln 2 + 3\ln\pi + 2\gamma - 4\ln\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) \approx 2.58498,$$

où γ désigne la constante d'Euler-Mascheroni et Γ la fonction gamma.

valeurs, à gauche des graphiques).