5

Функциональный анализ
Functional analysis
Analyse fonctionnelle
Funktionalanalysis

ESPACE DUAL D'UNE ALGÈBRE, OU D'UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT

JACQUES DIXMIER

1. Introduction

Soit G un groupe commutatif localement compact. On appelle *caractère* de G toute fonction continue complexe π sur G telle que $\pi(gg') = \pi(g)\pi(g')$ quels que soient $g, g' \in G$; si $|\pi(g)| = 1$ pour *tout* $g \in G$, le caractère est dit *unitaire*. L'ensemble des caractères unitaires de G se note $\hat{G}$; on le munit de la topologie *de la convergence compacte*, d'où un espace localement compact. (En fait, $\hat{G}$ est de manière naturelle un groupe localement compact, mais nous laisserons de côté ici cette structure de groupe.) Etant donnée une fonction plus ou moins arbitraire sur G, on cherche à l'écrire comme combinaison linéaire (en général intégrale) de caractères, et si possible de caractères unitaires. C'est là un problème typique de synthèse harmonique. Toute étude de synthèse harmonique sur G nécessite la connaissance détaillée de l'espace $\hat{G}$.

Choisissons une mesure de Haar sur G, et soit $L^1(G)$ l'algèbre de Banach (convolutive) des fonctions intégrables sur G. On appelle caractère d'une algèbre de Banach commutative un homomorphisme non nul de cette algèbre dans $\mathbf{C}$ (un tel caractère est de norme $\leqslant 1$). Tout $\pi \in \hat{G}$ définit un caractère de $L^1(G)$ par la formule

$$\pi'(f) = \int_G \pi(g) f(g)\, dg \tag{1}$$

et on obtient ainsi une correspondance bijective entre caractères unitaires de G et caractères de $L^1(G)$. La topologie de $\hat{G}$ correspond dans cette bijection à la topologie *faible* sur l'ensemble des caractères de $L^1(G)$.

Observons qu'il existe sur $L^1(G)$ une involution $f \to f^*$, définie par $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$, et qu'un caractère π de $L^1(G)$ est automatiquement hermitien, c'est-à-dire tel que $\overline{\pi(f)} = \pi(f^*)$ pour tout $f \in L^1(G)$.

2. L'espace dual d'un groupe localement compact

Dans toute la suite, G désigne un groupe localement compact. Il semble raisonnable de définir l'ensemble $\hat{G}$ comme l'ensemble des *représentations unitaires topologiquement irréductibles* de G, deux représentations unitairement équivalentes étant identifiées. Nous allons maintenant définir une topologie sur $\hat{G}$.

Si $\pi \in \hat{G}$, nous noterons H_π l'espace hilbertien où opère π. Nous appellerons fonction de type positif associée à π toute fonction de la forme $g \to (\pi(g)\xi \mid \xi)$ sur G, où $\xi \in H_\pi$. Si $S \subset \hat{G}$, nous appellerons fonction de type positif associée à S une fonction de type positif associée à un élément de S. Ceci posé, nous écrirons $\pi \in \overline{S}$ si *l'une* des fonctions de type positif non nulles associées à π est limite uniforme sur tout compact de fonctions de type positif associées à S, ou, ce qui revient au même, si *toute* fonction de type positif associée à π est limite uniforme sur tout compact de fonctions de type positif associées à S. Ceci définit une opération d'adhérence dans $\hat{G}$, d'où une topologie sur $\hat{G}$ ([4], [10]). Quand G est commutatif, on retrouve la topologie du § 1. Dans le cas général, cette topologie n'est pas toujours séparée, ce qui suscite la méfiance. Nous espérons cependant montrer que cette topologie est «raisonnable». Nous allons d'abord généraliser la situation.

3. Passage aux C^*-algèbres

Soit A une algèbre de Banach involutive. On appelle représentation de A dans un espace hilbertien H une application linéaire π de A dans $\mathcal{L}(H)$ (algèbre involutive des endomorphismes continus de H) telle que $\pi(aa') = \pi(a)\pi(a')$, $\pi(a^*) = \pi(a)^*$ quels que soient $a, a' \in A$ (une telle représentation est automatiquement de norme $\leqslant 1$). On note $\hat{A}$ l'ensemble des *représentations topologiquement irréductibles de A dans des espaces hilbertiens*, deux représentations unitairement équivalentes étant identifiées.

On appelle C^*-algèbre une algèbre de Banach involutive telle que $\| x^*x \| = \| x \|^2$ pour tout élément x de l'algèbre. Reprenons l'algèbre A précédente. Il existe une C^*-algèbre A' et un homomorphisme (automatiquement continu) φ de A dans A' tels que l'application $\pi \to \pi \circ \varphi$ mette en correspondance bijective les représentations de A et celles de A' dans des espaces hilbertiens. En outre, A' et φ sont définis à un isomorphisme près. On dit que A' est la *C^*-algèbre enveloppante de A*. Les ensembles $\hat{A}$ et $\hat{A}'$ s'identifient. L'étude de $\hat{A}$ est ainsi ramenée au cas où A est une C^*-algèbre.

Choisissons une mesure de Haar à gauche sur G. On peut alors former l'algèbre de Banach involutive $L^1(G)$. Toute représentation unitaire π de G définit une représentation π' de $L^1(G)$ dans H_π par la formule (1) (où les deux membres représentent maintenant des endomorphismes continus de H_π). On obtient ainsi une bijection de $\hat{G}$ sur $L^1(G)^\wedge$. La C^*-algèbre enveloppante de $L^1(G)$ se note $C^*(G)$ et s'appelle la *C^*-algèbre de G*. D'après ce qui précède, il existe une bijection canonique de $\hat{G}$ sur $C^*(G)^\wedge$.

Dans toute la suite, A désigne une C^*-algèbre. L'étude de $\hat{G}$ est un cas particulier de celle de $\hat{A}$.

4. Le spectre d'une C^*-algèbre

Si $\pi \in \hat{A}$, appelons coefficient de π toute forme linéaire $a \to (\pi(a)\xi \mid \xi')$ sur A, où $\xi, \xi' \in H_\pi$. Si $S \subset \hat{A}$, appelons coefficient de S tout coefficient d'un élément de S. Ceci posé, nous écrirons $\pi \in \overline{S}$ si *l'un* des coefficients de π est limite faible de coefficients de S, ou, ce qui revient au même, si *tout* coefficient de π est limite faible de coefficients de S. Ceci définit l'espace topologique $\hat{A}$, appelé *spectre de A* [4]. En particulier, si $A = C^*(G)$, on retrouve la topologie introduite plus haut sur $\hat{G}$.

La topologie de $\hat{A}$ peut être définie par d'autres procédés équivalents :

A) Notons d'abord les propriétés suivantes : 1) si $\pi \in \hat{A}$, π est *algébriquement* irréductible ; 2) soient $\pi_1, \pi_2 \in \hat{A}$; si π_1 et π_2 sont équivalentes en tant que représentations de A dans les espaces vectoriels H_{π_1}, H_{π_2} (sans tenir compte de leurs structures hilbertiennes), alors π_1 et π_2 sont unitairement équivalentes ; 3) toute représentation algébriquement irréductible de A dans un espace vectoriel complexe est algébriquement équivalente à un élément de $\hat{A}$ [13]. Ainsi, $\hat{A}$ peut être considéré comme l'ensemble des classes de représentations irréductibles de A dans des espaces vectoriels complexes (tout étant pris en un sens purement algébrique). Or, si B est une algèbre complexe, l'ensemble $\hat{B}$ des classes de représentations algébriquement irréductibles de B dans des espaces vectoriels complexes peut être muni de la *topologie de Jacobson* [12] (la partie fermée la plus générale de $\hat{B}$ étant l'ensemble des $\pi \in \hat{B}$ qui s'annulent sur un sous-ensemble donné de B). Ceci posé, la topologie définie plus haut sur $\hat{A}$ n'est autre que la topologie de Jacobson [4].

B) Limitons-nous ici, pour simplifier, au sous-ensemble $\hat{A}_n$ de $\hat{A}$ formé des classes de représentations irréductibles dont la dimension hilbertienne est un cardinal fixé n. Soit H_n un espace hilbertien de dimension n. Soit $\mathrm{Irr}_n(A)$ l'ensemble des représentations irréductibles de A dans H_n ; on munit $\mathrm{Irr}_n(A)$ de la *topologie de la convergence* *simple forte* ; autrement dit, $\pi_\lambda \to \pi$ dans $\mathrm{Irr}_n(A)$ si $\| \pi_\lambda(a)\xi - \pi(a)\xi \| \to 0$ pour tout $a \in A$ et tout $\xi \in H_n$. Si, à tout élément de $\mathrm{Irr}_n(A)$, on fait correspondre sa classe, on obtient une application de $\mathrm{Irr}_n(A)$ sur $\hat{A}_n$. Ceci posé, la topologie sur $\hat{A}_n$ induite par celle de $\hat{A}$ est la topologie *quotient* de celle de $\mathrm{Irr}_n(A)$ [5]. On observera le caractère concret de cette définition.

C) Supposons qu'il existe une sous-algèbre involutive A' de A, dense dans A, avec la propriété suivante : pour tout $x \in A'$, le rang de $\pi(x)$ reste borné quand π parcourt $\hat{A}$ (c'est le cas si $A = C^*(G)$ avec G linéaire semi-simple). Alors il y a des relations étroites entre la topologie de $\hat{A}$ et la notion de trace. Par exemple : soit $(\pi_1, \pi_2, \ldots)$ une suite d'éléments de $\hat{A}$, et $\nu_1, \ldots, \nu_r \in \hat{A}$; on suppose que, pour tout $x \in A'$, on a

$$\mathrm{tr}(\pi_n(x)) \to \mathrm{tr}(\nu_1(x)) + \ldots + \mathrm{tr}(\nu_r(x)) \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

Alors les seules limites de la suite $(\pi_1, \pi_2, \ldots)$ dans $\hat{A}$ sont $\nu_1, \ldots, \nu_r$ [4].

5. Propriétés de la topologie du spectre

L'espace $\hat{A}$ est *localement quasi-compact* (c'est-à-dire que tout point de $\hat{A}$ admet un système fondamental de voisinages quasi-compacts) [6].

L'espace $\hat{A}$ est un *espace de Baire.*

Si A est séparable (par exemple si $A = C^*(G)$ avec G séparable) $\hat{A}$ est *séparable.*

Pour pouvoir énoncer d'autres propriétés, il faut nous limiter à des C^*-algèbres particulières (ou à des groupes particuliers) que nous allons maintenant définir. On dit que A est CCR (ou *liminaire*) si, pour tout $\pi \in \hat{A}$, $\pi(A)$ est l'ensemble des opérateurs compacts de H_π [14]. On dit que G est CCR (ou liminaire) si $C^*(G)$ est liminaire. Par exemple, si G est un groupe de Lie connexe réel semi-simple [11] ou nilpotent [3], [15], G est liminaire. On dit que A est GCR (ou *postliminaire*) si toute C^*-algèbre quotient non nulle de A possède un idéal bilatère fermé liminaire non nul [14]. Les C^*-algèbres liminaires sont postliminaires, mais la réciproque n'est pas vraie. Si A est séparable, les conditions suivantes sont équivalentes : 1) A est postliminaire ; 2) toute représentation factorielle de A est de type I (ceci veut dire par exemple que, si π est une représentation de A dans un espace hilbertien telle que l'adhérence faible de $\pi(A)$ ait son centre réduit aux scalaires, alors π est somme de représentations irréductibles équivalentes) ; 3) si $\pi \in \hat{A}$, $\pi(A)$ contient l'ensemble des opérateurs compacts de H_π ; 4) si $\pi, \pi' \in \hat{A}$ et si $\mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Ker}\,\pi'$, alors $\pi = \pi'$ [9]. Un groupe G est dit GCR (ou postliminaire) si $C^*(G)$ est postliminaire. Par exemple, si G est un groupe algébrique linéaire réel, G est postliminaire [2]. Beaucoup de groupes de Lie réels connexes résolubles sont postliminaires [17], mais pas tous.

Ces définitions et ces exemples étant donnés, voici les propriétés supplémentaires qu'on peut énoncer pour $\hat{A}$.

Si A est postliminaire, $\hat{A}$ est un T_0-espace. Si A est liminaire, $\hat{A}$ est un T_1-espace.

Supposons A postliminaire. Il existe une suite croissante transfinie $(U_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ de parties ouvertes de $\hat{A}$ possédant les propriétés suivantes : 1) $U_0 = \emptyset$, $U_\alpha = \hat{A}$; 2) si ρ est un ordinal limite, U_ρ est réunion des $U_{\rho'}$ pour $\rho' < \rho$; 3) pour tout $\rho < \alpha$, $U_{\rho+1} - U_\rho$ est une partie ouverte dense *séparée* (donc localement compacte) de $\hat{A} - U_\rho$. On voit que $\hat{A}$ est « presque » localement compact [14].

Cette suite (U_ρ) a le défaut de ne pas être canonique. Disons qu'un point fermé π de $\hat{A}$ est *séparé* si, pour tout $\pi' \in \hat{A}$ distinct de π, π et π' admettent des voisinages disjoints. Soit V_1 l'intérieur de l'ensemble des points fermés séparés de $\hat{A}$; soit V'_2 l'intérieur de l'ensemble des points fermés séparés de $\hat{A} - V_1$, et $V_2 = V_1 \cup V'_2$, etc. On construit ainsi une suite croissante transfinie (V_ρ) de parties ouvertes canoniques de $\hat{A}$, et les $V_{\rho+1} - V_\rho$ sont localement compacts. Si $V_\rho = \hat{A}$ à partir d'un ordinal β, A est une C^*-algèbre liminaire d'un type particulier. Cette circonstance se présente, avec de plus $\beta < +\infty$, lorsque $A = C^*(G)$ avec G groupe de Lie nilpotent réel connexe, ou $G = SL(2, \mathbf{C})$ [4] (et probablement lorsque G est semi-simple réel connexe).

Si G est compact, $\hat{G}$ est *discret*. (Plus généralement, il y a des relations entre les points isolés de $\hat{G}$ et les représentations irréductibles intégrables de G.) Si G est discret, $\hat{G}$ est *quasi-compact*.

Comme les éléments de $\hat{G}$ sont souvent induits par des représentations unitaires irréductibles de sous-groupes fermés G' distincts de G, il est intéressant d'étudier les propriétés de continuité de l'opération d'induction. Il existe des résultats dans cette voie. Mais il est impossible ici de se limiter aux représentations irréductibles. Il faut donc définir une topologie dans l'ensemble des représentations unitaires quelconques. Nous n'aborderons pas cette question [7].

6. Exemples

1) Si G est le groupe diédral infini, $\hat{G}$ s'identifie à $]0, 1[\cup \{a\} \cup \cup \{b\} \cup \{c\} \cup \{d\}$, où un point t de $]0, 1[$ tend à la fois vers a et b quand t tend vers 0 au sens usuel, et où t tend à la fois vers c et d quand t tend vers 1 au sens usuel (cf. fig. 1).

2) Si $G = SL(2, \mathbf{C})$, $\hat{G}$ s'identifie au sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ formé des points suivants :

(i) les points (n, r), où n est un entier $\geqslant 0$, et où r est réel (et $\geqslant 0$ si $n = 0$) ; ces points correspondent à la série principale ;

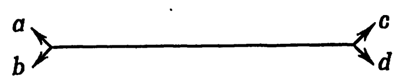

Fig. 1.

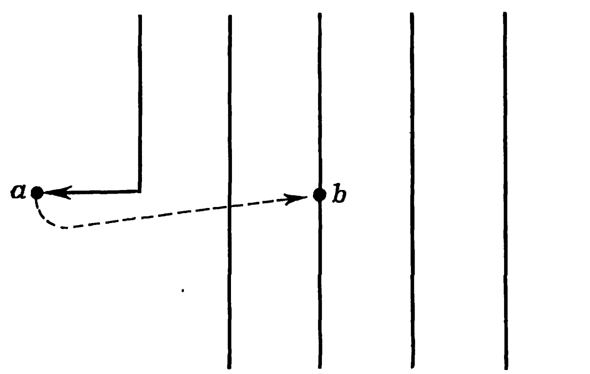

Fig. 2.

(ii) les points $(s, 0)$, où $-1 \leqslant s < 0$; ces points correspondent à la série supplémentaire si $-1 < s$, à la représentation triviale de dimension 1 si $s = -1$.

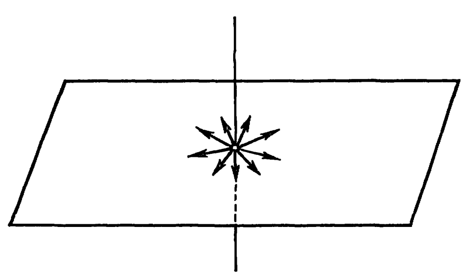

Fig. 3.

La topologie de $\hat{G}$ est la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^2$, à ceci près que, si t tend vers a au sens usuel (cf. fig. 2), t tend à la fois vers a et b dans $\hat{G}$.

3) Dans le cas des groupes nilpotents, la non-séparation est un peu plus sensible. Par exemple, si G est le groupe simplement connexe réel nilpotent de dimension 3 non commutatif, $\hat{G}$ s'identifie à $(\mathbf{R} - \{0\}) \cup \mathbf{R}^2$; la topologie de $\hat{G}$ est celle de l'espace somme de

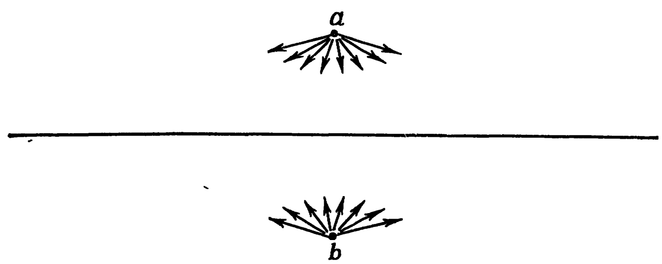

Fig. 4.

$\mathbf{R} - \{0\}$ et de $\mathbf{R}^2$, à ceci près qu'un point de $\mathbf{R} - \{0\}$ qui tend vers 0 au sens usuel tend dans $\hat{G}$ vers tous les points de $\mathbf{R}^2$ (fig. 3).

4) Dans le cas des groupes résolubles (même postliminaires), la non-séparation devient plus sévère. Par exemple, si G est le groupe résoluble réel de dimension 2 non commutatif, $\hat{G}$ s'identifie au sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ de la fig. 4, à ceci près que l'adhérence de a (resp. b) est $\hat{G} - \{b\}$ (resp. $\hat{G} - \{a\}$).

7. Structure borélienne sur $\hat{G}$ et $\hat{A}$

Supposons A séparable. Considérons sur $\mathrm{Irr}_n(A)$ la structure borélienne sous-jacente à la topologie, c'est-à-dire la structure borélienne définie par les fonctions $\pi \to \pi(a)\xi$ ($a \in A$, $\xi \in H_n$). Pour cette structure, $\mathrm{Irr}_n(A)$ est un espace borélien standard. Munissons $\hat{A}_n$ de la structure borélienne quotient, et $\hat{A}$ de la structure borélienne somme de celles des $\hat{A}_n$ (comme A est séparable, on a $\hat{A}_n = \varnothing$ pour $n > \aleph_0$) [16]. Cette structure, appelée *structure de Mackey*, est plus fine que la structure borélienne sous-jacente à la topologie de $\hat{A}$. Les conditions suivantes sont équivalentes : 1) A est postliminaire ; 2) la structure de Mackey est la structure sous-jacente à la topologie de $\hat{A}$; 3) il existe une suite de parties de $\hat{A}$ boréliennes pour la structure de Mackey et qui séparent les points de $\hat{A}$ [9].

8. Cas d'un groupe de Lie; relations avec l'algèbre de Lie

Dans cette section, nous supposerons que G est un groupe de Lie réel connexe et nous noterons L son algèbre de Lie.

Le groupe G agit dans L par la représentation adjointe, donc dans l'espace vectoriel L^* dual de L. Si G est nilpotent [15] (ou, plus généralement, résoluble exponentiel [1]) simplement connexe, il existe une bijection canonique de L^*/G sur $\hat{G}$. On conjecture, au moins si G est nilpotent, que cette bijection est un homéomorphisme [15].

Soient $L_{\mathbf{C}}$ la complexification de L, U l'algèbre enveloppante de $L_{\mathbf{C}}$, $u \to u^*$ l'antiautomorphisme principal de U. Toute représentation unitaire topologiquement irréductible π de G définit une représentation π_∞ de U dans l'espace des vecteurs de H_π indéfiniment différentiables pour π. Soit Prim (U) l'ensemble des idéaux primitifs de U. Il est vraisemblable que Ker $(\pi_\infty) \in$ Prim (U). C'est en tous cas démontré quand G est semi-simple ou résoluble. Dans ces deux cas, on a donc une application Φ de $\hat{G}$ dans Prim (U), et Φ est continue si on munit Prim (U) de la topologie de Jacobson. Lorsque G est nilpotent simplement connexe, Φ est une bijection de $\hat{G}$ sur l'ensemble des $I \in$ Prim (U) tels que $I = I^*$; d'autre part, Prim (U) est en correspondance bijective canonique avec $L^*_{\mathbf{C}}/G$, et il est vraisemblable que la topologie de Jacobson sur Prim (U) est le quotient de la topologie de Zariski sur $L^*_{\mathbf{C}}$.

Ne supposons plus G nilpotent. Si z appartient au centre de U, $\pi_\infty(z)$ est scalaire pour tout $\pi \in \hat{G}$; posons $\pi_\infty(z) = \chi_\pi(z) \cdot 1$. Alors la fonction $\pi \to \chi_\pi(z)$ est continue sur $\hat{G}$.

9. Représentations non unitaires

Lorsque G est commutatif, $\hat{G}$ n'est qu'une partie de l'ensemble $\check{G}$ de tous les caractères (unitaires ou non) de G. Il serait intéressant de définir l'espace $\check{G}$ pour G non commutatif. Il y a divers résultats dans ce sens, mais la théorie ne semble bien établie que lorsque G possède un « grand » sous-groupe compact. Nous allons définir ce qu'il faut entendre par là.

Soit π une représentation continue de G dans un espace de Banach H. On dit que π est *complètement irréductible* (topologiquement) si le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(H)$ engendré par $\pi(G)$ est fortement dense dans $\mathcal{L}(H)$. (Ceci entraîne que π est irréductible (topologiquement) ; on ignore si la réciproque est exacte.)

Soit K un sous-groupe compact de G. Pour tout $\delta \in \hat{K}$, soit H_δ la somme de tous les sous-espaces vectoriels V de H stables pour $\pi(K)$ et tels que la sous-représentation de $\pi|K$ induite dans V soit de classe δ. Chaque H_δ est un sous-espace vectoriel fermé de H, et ΣH_δ est dense dans H. Ceci posé, on dit que K est un *grand* sous-groupe compact si, pour tout $\delta \in \hat{K}$,il existe un entier n_δ tel que, pour toute représentation complètement irréductible π de G dans un espace de Banach H, on a dim $H_\delta \leqslant n_\delta$. Nous supposerons désormais que G possède un grand sous-groupe compact K. (C'est le cas si G est un groupe de Lie réel connexe semi-simple de centre fini, ou si G est le groupe des déplacements d'un espace euclidien.)

Considérons l'ensemble des représentations complètement irréductibles de G dans des espaces de Banach. Dans cet ensemble, définissons une relation d'équivalence : écrivons $\pi \sim \pi'$ s'il existe un sous-espace vectoriel H_0 (resp. H'_0) dense dans H_π (resp. $H_{\pi'}$), stable par $\pi(G)$ (resp. $\pi'(G)$), et une application linéaire bijective T de H_0 sur H'_0, fermée, telle que $\pi'(g) \circ T = T \circ (\pi(g) \mid H_0)$ pour tout $g \in G$. On note $\check{G}$ l'ensemble quotient. Nous allons définir une topologie sur $\check{G}$.

Soit $\mathscr{K}(G)$ l'algèbre convolutive des fonctions continues complexes à support compact sur G. Si $\pi \in \check{G}$, soit $\Phi(\pi)$ l'ensemble des formes linéaires $f \to \langle \pi(f)\xi, \xi' \rangle$ sur $\mathscr{K}(G)$, où $\xi \in H_\pi$, $\xi' \in H'_\pi$ (dual topologique de H_π). Soit $S \subset \check{G}$, et soit $\overline{\Phi(S)}$ l'adhérence de $\Phi(S)$ dans le dual de $\mathscr{K}(G)$ muni de la topologie faible. Les conditions $\Phi(\pi) \cap \Phi(S)^- \neq \varnothing$ et $\Phi(\pi) \subset \Phi(S)^-$ sont équivalentes ; écrivons $\pi \in \overline{S}$ si elles sont remplies. Ceci définit une topologie sur $\check{G}$ [8].

L'ensemble $\hat{G}$ s'identifie à une partie de $\check{G}$, et la topologie induite sur $\hat{G}$ par celle de $\check{G}$ est la topologie considérée au § 2. Si G est un groupe de Lie connexe semi-simple linéaire, $\check{G}$ est localement quasi-compact, et il existe un entier p tel que toute suite (et même tout filtre) dans $\check{G}$ ait au plus p limites distinctes. L'espace $\check{G}$ a été calculé pour $G = SL(2, \mathbf{C})$ [8].

Université de Paris, Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques, France

RÉFÉRENCES

[1] Bernat P., Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 82 (1965), 37-99.
[2] Dixmier J., Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques, *Ann. Inst. Fourier*, 7 (1957), 315-328.
[3] Dixmier J., Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, V, *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), 65-79.
[4] Fell J. M. G., The dual spaces of C^*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **94** (1960), 365-403.
[5] Fell J. M. G., C^*-algebras with smooth dual, *Ill. J. Math.*, 4 (1960), 221-230.
[6] Fell J. M. G., The structure of algebras of operator fields, *Acta Math.*, 106 (1961), 233-280.

[7] F e l l J. M. G., Weak containment and induced representations of groups, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **110** (1964), 424-447.
[8] F e l l J. M. G., Non-unitary dual spaces of groups, *Acta Math.*, **114** (1965), 267-310.
[9] G l i m m J., Type I C^*-algebras, *Ann. Math.*, **73** (1961), 572-612.
[10] G o d e m e n t R., Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 1-84.
[11] H a r i s h - C h a n d r a, Representations of semi-simple Lie groups, III, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), 234-253.
[12] J a c o b s o n N., A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **31** (1945), 333-338.
[13] K a d i s o n R. V., Irreducible operator algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **43** (1957), 273-276.
[14] K a p l a n s k y I., The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 219-255.
[15] К и р и л л о в А. А., Унитарные представления нильпотентных групп Ли, *УМН*, **17**, № 4 (1962), 57-110.
[16] M a c k e y G. W., Borel structure in groups and their duals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85** (1957), 134-165.
[17] T a k e n o u c h i O., Sur la facteur représentation d'un groupe de Lie résoluble de type (E), *Math. J. Okayama Univ.*, **4** (1955), 143-173.

NUCLEAR OPERATORS AND APPROXIMATIVE DIMENSION

B. S. MITIAGIN AND A. PELCZYNSKI

Introduction

In this report we would like to discuss some characteristics of linear operators and convex sets in linear topological spaces. We also will indicate some applications of these concepts mainly by introducing linear topological invariants—called *approximative dimensions* which are naturally induced by the characteristics. The origin of these concepts is going back to some approximation problems in the theory of functions of real and complex variables considered in earlier twenties by Bernstein, Favard and Kolmogorov. However the concepts themselves have been defined and investigated around 1960 in connection with two different topics:

first by Kolmogorov and Vitushkin and their colaborators Arnold, Erochin and Tichomirov in connection with the problem of compositions of smooth functions related to the 13-th Hilbert problem;

second by Bessaga, Mitiagin, Pelczynski, Pietsch and Rolewicz in connection with Gelfand's problem [4, p. 6] of characterization of Grothendieck's nuclear spaces [8] by degree of approximation by finite dimensional spaces.