Traduction d'un article paru en mai 1965 dans Le professeur de mathématiques (Denise Vella-Chemla, 29.10.2020)

Utilisation des transformations pour trouver les équations de figures géométriques simples

Clarence R. Perisho

Un traitement clair de transformations géométriques utiles

Le signe de valeur absolue peut être utilisé pour écrire les équations de figures contenant des coins pointus ou des discontinuités, comme les carrés ou les parallélogrammes[1], des fonctions en escalier [2], et des fonctions en dents-de-scie[3]. La dérivation systématique de nombreuses telles équations peut être facilitée en utilisant certaines transformations de coordonnées. Cet article décrit cinq telles transformations de coordonnées et inclut des exemples de leur application.

Transformations de coordonnées

Les deux premières transformations de coordonnées dont on parlera, la translation et la rotation, sont des transformations métriques bien connues[4]. Des transformations moins connues sont les transformations qui étirent ou étendent une figure dans une direction parallèle à l'un des axes de coordonnées, les transformations qui ont un effet de cisaillement sur une figure, et les transformations qui produisent des formes symétriques des deux côtés d'un axe de coordonnées. L'étirement et le cisaillement sont des exemples de transformations affines[5].

Translation

Les équations habituelles d'une translation des axes sont

$$\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k, \end{aligned}$$

où x et y sont les coordonnées d'un point en relation avec l'ensemble des anciens axes, et x' et y' sont les coordonnées du même point par rapport aux nouveaux axes. Les nouveaux axes sont parallèles aux anciens, mais la nouvelle origine est située au point (h, k) relativement aux anciens axes. Si h et k sont positifs, les *axes* sont transportés à droite de h unités et

Article original : *"The use of transformations in deriving equations of common geometric figures,"* The mathematics teacher, vol. 58, issue 5, p. 386., may 1965, ©The National Council of Teachers of Mathematics.

Clarence R. Perisho : Lycée d'état de Mankato, Mankato, Minnesota.

[1] John L. Spence, "Equations of Some Common Geometric Figures," *School Science and Mathematics*, LVIII (décembre 1958), p. 674-676.

[2] John. L. Spence, "Step Function Notation," *School Science and Mathematics*, LX (mars 1960), p. 179-180.

[3] John L. Spence, "Periodic Absolute Value Functions", *School Science and Mathematics*, LXI (décembre 1961), p. 664-666.

[4] Une *transformation métrique* préserve les distances et les angles ; les figures gardent leur taille et leur forme.

[5] Une *transformation affine* est une transformation qui peut être représentée par les équations

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2, \end{aligned}$$

où a, b et c sont des nombres réels. (Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, le plan entier s'effondre en une ligne ou un point.)

En général, une transformation affine ne préserve pas la taille et la forme des figures. Les transformations métriques, pourtant, peuvent être considérées comme une classe spéciale des transformations affines où la taille et la forme des figures sont préservées. Voir Felix Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Geometry*, trans. E.R. Hedrick and C.A. Noble (New York: The Macmillan Company, 1999), p. 70-86, 131.

vers le haut de k unités. On peut, pourtant, imaginer les axes fixes et voir cela comme une translation de la figure. Dans ce cas, pour h et k positifs, la *figure* est transportée sur la gauche de h unités et vers le bas de k unités. Si l'origine est translatée au point (h, k), cela signifie que le point de la figure situé en $(0, 0)$ est transporté au point $(-h, -k)$.

Si nous souhaitons bouger la figure de telle façon que le point initialement en (0, 0) soit transporté au point (h, k), nous devrions écrire notre transformation comme

$$\begin{aligned} x &= x' - h \\ y &= y' - k, \end{aligned}$$

Pour des raisons de convenance, nous oublierons les premiers et dirons que pour translater une figure de telle façon que le point initialement à l'origine soit déplacé au point (h, k), on transforme l'équation en utilisant la règle :

$$\textbf{remplacer } x \textbf{ par } x - h$$

et

$$\textbf{remplacer } y \textbf{ par } y - k. \tag{1}$$

En d'autres termes, $f(z, y) = 0$ devient $f(x - h, y - k) = 0$.

Exemple. L'équation $x^2 + y^2 = 9$ représente un cercle avec un rayon de 3 et centré à l'origine. Si nous souhaitons bouger le cercle de façon à ce que son centre soit le point (2, 4), nous utilisons la transformation (1) et remplaçons x par $x - 2$ et y par $y - 4$. Cela donne

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

comme équation du cercle de rayon 3 et de centre le point (2, 4).

Rotation

Faire tourner une *figure* dans le sens des aiguilles d'une montre selon un angle θ autour de l'origine est la même chose que faire tourner les *axes* dans le sens inverse des aiguilles d'une montre d'un angle θ. Pour faire cela, on peut

$$\textbf{remplacer } x \textbf{ par } x \cos\theta - y \sin\theta$$

et

$$\textbf{remplacer } y \textbf{ par } x \sin\theta + y \cos\theta. \tag{2}$$

Par exemple, pour faire tourner une figure dans le sens des aiguilles d'une montre d'un angle de 45°, on utilise $\theta = 45°$ dans la transformation (2) et on obtient la règle :

$$\textbf{remplacer } x \textbf{ par } \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(x - y)$$

et

$$\textbf{remplacer } y \textbf{ par } \frac{1}{2}\sqrt{2}(x + y) \tag{3}$$

Exemple. L'équation $x = 5$ représente une ligne parallèle à l'axe des y décalée de 5 unités sur sa droite. En tournant la figure de 45° en utilisant la transformation (3), nous obtenons

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}(x - y) = 5$$

ou

$$y = x - 5\sqrt{2}$$

comme équation d'une droite (toujours à 5 unités de l'origine) avec une pente de 1 et telle que les points $(5\sqrt{2}, 0)$ et $(0, -5\sqrt{2})$ appartiennent à cette droite.

Étirement

Pour étirer, ou agrandir une figure selon un facteur p dans une direction parallèle à l'axe des x,

$$\textbf{remplacer } x \textbf{ par } \frac{x}{p} \tag{4}$$

Si $p > 1$, on a un agrandissement ; si $0 < p < 1$, on a une contraction; si $-1 < p < 0$, on a une réflexion et une contraction ; si $p < -1$, on a une réflexion et une expansion. Si $p = 1$, la figure est inchangée ; si $p = -1$, on a une réflexion selon l'axe des y sans changement de taille.

Similairement, pour étirer une figure selon un facteur q dans la direction parallèle à l'axe des y,

$$\textbf{remplacer } y \textbf{ par } \frac{y}{q} \tag{5}$$

Exemple. Un cercle peut être étiré en une ellipse. En remplaçant x par $\frac{x}{2}$, l'équation du cercle

$$x^2 + y^2 = 9$$

devient

$$x^2 + 4y^2 = 36,$$

qui est l'équation d'une ellipse d'axe le plus long horizontal et deux fois plus grand que l'axe le plus court.

Cisaillement

Si une translation bouge les points dans une direction parallèle à l'un des axes de coordonnées, tous les points sont translatés de la même distance. Un cisaillement bouge les points dans une direction parallèle à l'un des axes de coordonnées, mais les points à différentes distances de l'axe sont, en général, bougés à des distances différentes.

Pour cisailler une figure dans une direction parallèle à l'axe des x,

$$\textbf{remplacer } x \textbf{ par } x - cy. \tag{6}$$

Les points sont translatés horizontalement d'une distance proportionnelle à leur distance à l'axe des x. Les points de l'axe des x ne sont pas translatés, mais les points au-dessus de lui sont translatés vers la droite lorsque $c > 0$ et vers la gauche lorsque $c < 0$. Les points sous l'axe des x sont translatés dans la direction opposée. Une ligne parallèle à l'axe des y est déviée de façon à avoir une pente de $\frac{1}{c}$. Les ordonnées des points (coordonnées y) restent inchangées. Par exemple, les points de l'axe des y restent à la même distance de l'axe des x mais pas à la même distance les uns des autres.

Similairement, un cisaillement peut être réalisé parallèlement à l'axe des y ; pour cela, il faut

$$\textbf{remplacer } y \textbf{ par } y - dx. \tag{7}$$

Exemple. Si x est remplacé par $x - 2y$ dans l'équation du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = 9,$$

nous obtenons

$$(x - 2y)^2 + y^2 = 9.$$

Développé, cela devient

$$x^2 - 4xy + 5y^2 = 9$$

dont on peut démontrer que c'est l'équation d'une ellipse dont les axes ne sont parallèles ni à l'axe des x ni à l'axe des y.

Symétrie

Pour produire une figure symétrique selon l'axe des y

$$\textbf{remplacer } x \textbf{ par } |x|. \tag{8}$$

Cela retire toute partie située à gauche de l'axe des y (où x est négatif) et la remplace par son symétrique à droite de l'axe des y. Tous les éléments sur l'axe des y sont inchangés. Pour produire une figure symétrique selon l'axe des x

$$\textbf{remplacer } y \textbf{ par } |y|. \tag{9}$$

Cela retire toute partie située sous l'axe des x (où y est négatif) et la remplace par son symétrique qui est au-dessus de l'axe des x. Les points situés sur l'axe des x restent inchangés. En utilisant simultanément les deux transformations, on détruit toute partie située en dehors du premier quadrant et on la remplace par des réflexions des points de cette portion à partir de leur position initiale dans le premier quadrant.

Exemple. L'équation

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

représente un cercle de rayon 3 et de centre (2, 3); il est tangent à l'axe des x mais intersecte l'axe des y en $(0, 3+\sqrt{5})$ et $(0, 3-\sqrt{5})$. En utilisant la transformation (8), on remplace x par $|x|$ et on obtient

$$(|x|-2)^2 + (y-3)^2 = 9,$$

qui représente les portions de deux cercles qui s'intersectent (Fig. 1). Si l'on appliquait également la transformation (9), la figure serait dupliquée sous l'axe des x.

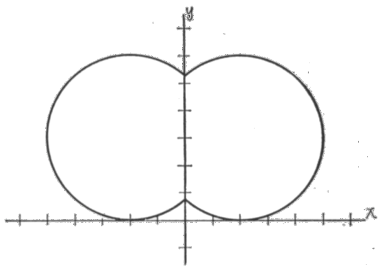

Figure 1

Applications

Les équations d'un certain nombre de figures géométriques communes peuvent être trouvées par l'utilisation de ces transformations. Comme exemples, les équations d'un carré, d'un triangle équilatéral, d'un hexagone régulier et d'un angle en position standard vont être trouvées ci-après.

Carré

Pour développer l'équation d'un carré, on commence avec la droite

$$x + y = a.$$

La droite croise les axes des coordonnées en $(a, 0)$ et $(0, a)$. La seule portion de la droite qui est dans le premier quadrant est le segment entre ces deux points. D'abord, on applique les transformations de symétrie (8) et (9); le remplacement de x par $|x|$ et de y par $|y|$ élimine la portion initiale de la ligne à gauche de l'axe des y et sous l'axe des x et place dans les second, troisième et quatrième quadrants les réflexions du segment de droite dans le premier quadrant. Ainsi, nous avons

$$|x| + |y| = a \tag{10}$$

comme équation du carré (Fig. 2) de sommets $(a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, 0)$, et $(0, -a)$. Chaque côté est de longueur $\sqrt{2}a$.

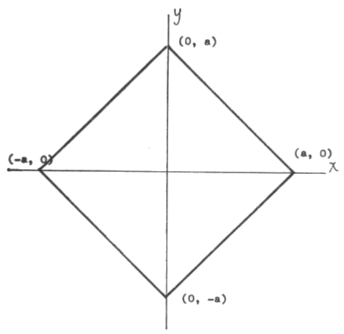

Figure 2

Si l'on souhaite que le carré ait ses côtés parallèles aux axes des coordonnées, on peut faire tourner la figure d'un angle de 45°. Après avoir appliqué la transformation (3) et avoir multiplié par $\sqrt{2}$, on obtient

$$|x+y|+|x-y|=\sqrt{2}a.$$

Ceci est l'équation d'un carré dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées et dont les sommets sont $(\frac{1}{2}\sqrt{2}a, \frac{1}{2}\sqrt{2}a), (-\frac{1}{2}\sqrt{2}a, \frac{1}{2}\sqrt{2}a), (-\frac{1}{2}\sqrt{2}a, -\frac{1}{2}\sqrt{2}a)$ et $(\frac{1}{2}\sqrt{2}a, -\frac{1}{2}\sqrt{2}a)$. Chaque côté est toujours de longueur $\sqrt{2}a$.

Par expansion ou contraction, le carré peut être agrandi ou rétréci à la taille désirée. En particulier, l'utilisation des transformations (4) et (5) avec $p = q = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ rétrécit le carré de telle façon que ses côtés soient de longueur a (Fig. 3). L'équation est alors

$$|x+y|+|x-y|=a. \tag{11}$$

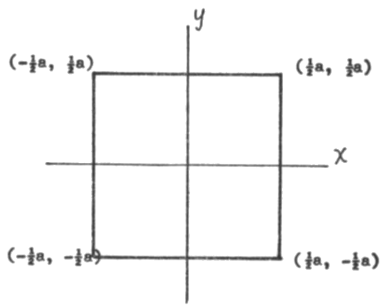

Figure 3

Si une figure quelconque est agrandie symétriquement (étirée d'un même montant parallèlement aux deux axes de coordonnées), la figure sera d'une taille différente mais elle sera similaire à la figure originale. En général, si la figure est agrandie assymétriquement (étirée plus dans une direction que dans une autre, ou étirée seulement dans une direction), la figure résultante aura une forme différente. En appliquant un agrandissement assymétrique à l'équation (10) au moyen des transformations (4) et (5), le carré sera changé en un losange de n'importe quelles dimensions données. En appliquant un agrandissement assymétrique à l'équation (11), le carré peut être changé en un rectangle de n'importe quelles dimensions spécifiées. Une combinaison d'agrandissement et de cisaillement produit un parallélogramme de toute taille et forme spécifiée.

Triangle équilatéral

Pour que ce soit plus pratique, dans le but d'obtenir l'équation d'un triangle équilatéral, nous choisissons $2a$ comme longueur des 3 côtés et situons les sommets en $(a, 0), (0, \sqrt{3}a)$, et $(-a, 0)$. On commence avec l'équation d'un carré de côté a, centré à l'origine, et dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées (Fig. 3). Comme vu dans l'équation (11), cette équation est

$$|x+y|+|x-y|=a.$$

D'abord nous translatons le carré de façon à ce que son côté du bas coïncide avec l'axe des x. Cela se fait par la transformation (1) ; on remplace y par $y - \frac{1}{2}a$, ce qui donne

$$|x + y - \frac{1}{2}a| + |x - y + \frac{1}{2}| = a.$$

Deuxièmement, on agrandit la figure horizontalement par un facteur 2 et verticalement par un facteur $\sqrt{3}$. Selon la transformation (4), on remplace x par $\frac{x}{2}$; selon la transformation (5), on remplace y par $\frac{y}{\sqrt{3}}$.

Cela donne

$$|x + \frac{2}{3}\sqrt{3}y - a| + |x - \frac{2}{3}\sqrt{3}y + a| = 2a$$

comme équation du rectangle (Fig. 4) de base $2a$ (la même que celle du triangle équilatéral) et hauteur $\sqrt{3}a$ (la même que celle du triangle).

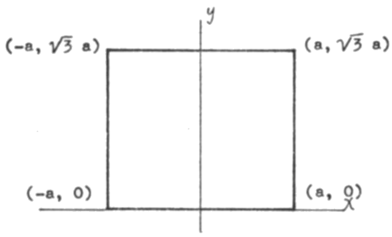

Figure 4

Troisièmement, le rectangle est penché sur la gauche de telle façon que son côté droit ait une pente de $-\sqrt{3}$. En utilisant la transformation (6), x est remplacé par $x + \frac{1}{3}\sqrt{3}y$, ce qui donne

$$|x + \sqrt{3}y - a| + |x - \frac{1}{3}\sqrt{3}y + a| = 2a$$

qui est l'équation d'un parallélogramme (Fig. 5) avec un côté sur l'axe des x et un côté allant du point $(a, 0)$ vers le haut à gauche jusqu'au point $(0, \sqrt{3}a)$.

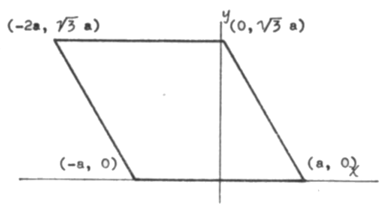

Figure 5

Quatrièmement, on remplace x par $|x|$ selon la transformation (8); cela enlève la portion du parallélogramme à gauche de l'axe des y et la remplace par la réflexion de la portion à droite de l'axe des y. Cela donne

$$||x| + \sqrt{3}y - a| + ||x| - \frac{1}{3}\sqrt{3}y + a| = 2a,$$

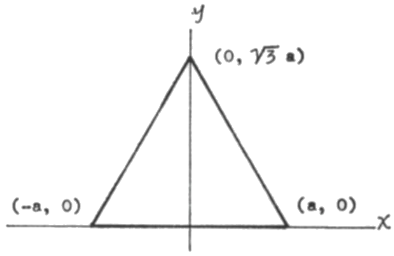

Figure 6

qui est l'équation requise d'un triangle équilatéral (Fig. 6) de côté $2a$ et de sommets $(a, 0), (0, \sqrt{3}a)$, et $(-a, 0)$.

L'équation n'est pas unique, car l'équation du triangle peut être produite en appliquant la transformation (8) à l'équation de n'importe quelle figure qui coïncide avec cette portion du triangle à droite de l'axe des y. D'un choix différent de figures peut résulter une équation différente.

Hexagone régulier

Si un hexagone régulier a son centre à l'origine, il peut être orienté de telle façon que deux de ses sommets soient sur l'axe des x, deux au-dessus, et deux en-dessous. La figure sera alors symétrique selon le premier axe et selon le deuxième axe. Si les côtés sont de longueur a, les sommets seront les points $(a, 0), (\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}\sqrt{3}a), (-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}\sqrt{3}a), (-a, 0), (-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}\sqrt{3}a)$, et $(\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}\sqrt{3}a)$.

On commence par écrire l'équation d'une courbe qui coïncide avec cette portion de l'hexagone située dans le premier quadrant. Cette courbe est constituée de deux segments de droites (Fig. 7) avec un coin en $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}\sqrt{3}a)$. À gauche de ce point, la pente est 0 ; à droite de ce point, la pente est $-\sqrt{3}$. L'équation requise est [6]

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}|x - \frac{1}{2}a| + \frac{3}{4}\sqrt{3}a.$$

Quand les transformations de symétrie (8) et (9) sont appliquées, les réflexions de cette courbe sont trouvées dans les second, troisième, et quatrième quadrants pour compléter l'hexagone (Fig. 8). L'équation devient alors

$$|y| = -\frac{1}{2}\sqrt{3}|x| - \frac{1}{2}\sqrt{3}||x| - \frac{1}{2}a| + \frac{3}{4}\sqrt{3}a.$$

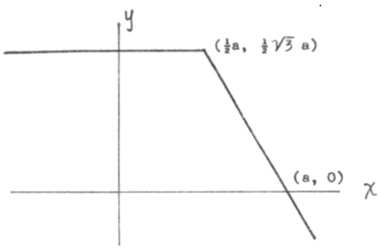

Figure 7

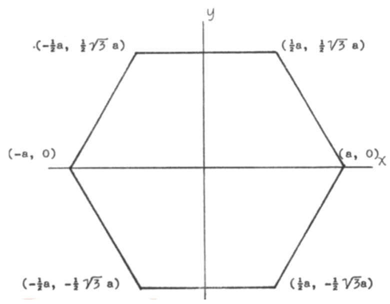

Figure 8

Angle en position standard

D'abord, nous plaçons un angle A symétrique selon l'axe des y avec son sommet à l'origine, son côté initial à droite de l'axe des y et son côté terminal à gauche de l'axe des y. Si $0^o < A < 180^o$, la figure formera un V s'ouvrant vers le haut avec son côté initial dans le premier quadrant et son côté terminal dans le second quadrant (Fig. 9). Si $180^o < A < 360^o$, la figure formera un V inversé avec le côté initial dans le quatrième quadrant et son côté terminal dans le troisième quadrant.

[6]Pour une explication de la méthode générale, voir Clarence E. Perisho, "Curves with corners", *The mathematics teacher*, LV (May 1962), 326-329 ; et Charles P. Seguin, "Equations of Polygonal Paths", *The American Mathematical Monthly*, LXIX (June-July, 1962), p. 548-549.

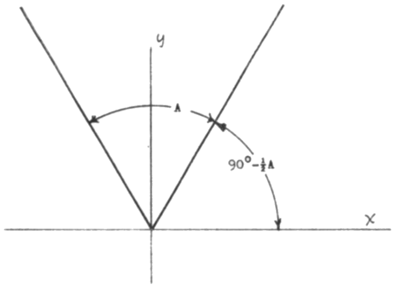

Figure 9

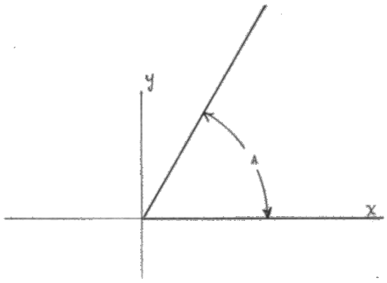

Figure 10

Dans les deux cas, si nous utilisons des angles orientés, l'inclinaison de la courbe à droite de l'axe des y est $90^o - \frac{1}{2}A$, et la pente est $\tan(90^o - \frac{1}{2}A) = \cot\frac{1}{2}A$. L'équation pour la moitié droite de la figure est ainsi

$$y = x\cot\frac{1}{2}A.$$

En appliquant la transformation (8), nous obtenons l'équation de l'angle qui est

$$y = |x|\cot\frac{1}{2}A. \tag{12}$$

Alors nous plaçons l'angle dans la *position standard*, i.e. de telle façon que son sommet soit à l'origine et que le côté initial coïncide avec la portion positive de l'axe des x (la Figure 10 montre un angle aigu en position standard). Si $0^o < A < 180^o$, l'angle est placé en position standard en le faisant tourner dans le sens des aiguilles d'une montre d'un angle de $90^o - \frac{1}{2}A$. Si $180^o < A < 360^o$, on fait tourner l'angle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre d'un angle de $\frac{1}{2}A - 90^o$. Si on utilise des angles orientés, on peut dire dans les deux cas que la figure est tournée dans le sens des aiguilles d'une montre d'un angle de $90^o - \frac{1}{2}A$ ou que les axes sont tournés selon le sens inverse des aiguilles d'une montre d'un angle égal à $90^o - \frac{1}{2}A$.

Quand on applique la transformation (2) avec $\theta = 90^o - \frac{1}{2}A$ à l'équation (12), on obtient

$$x\sin(90^o - \frac{1}{2}A) + y\cos(90^o - \frac{1}{2}A) = \cot\frac{1}{2}A|x\cos(90^o - \frac{1}{2}A) - y\sin(90^o - \frac{1}{2}A)|$$

comme équation de l'angle A en position standard. Cela peut être simplifié en

$$x + y\tan\frac{1}{2}A = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}A}|x\sin\frac{1}{2}A - y\cos\frac{1}{2}A|.$$

Puisque $\sin\frac{1}{2}A$ est toujours positif pour $0^o < A < 360^o$, on peut faire entrer l'expression $\sin\frac{1}{2}A$ à l'intérieur de la valeur absolue, et l'équation est simplifiée encore en

$$x + y\tan\frac{1}{2}A = |x - y\cot\frac{1}{2}A|. \tag{13}$$

Cette équation est valide pour tous les angles tels que $0^o < A < 360^o$, sauf pour $A = 180^o$. L'angle peut être translaté de façon que son sommet soit en n'importe quel endroit du plan, et il peut être tourné de telle façon que son côté initial prenne n'importe quelle direction donnée.

Les équations des angles des second et troisième quadrant en position standard peuvent s'écrire plus simplement par d'autres méthodes[7], puisque y est une fonction à une seule valeur de x, l'équation (13) est applicable aux angles du second et du troisième quadrant, où y est une fonction à valeur unique de x, et aussi aux angles des premier et quatrième quadrants, où y est une fonction à deux valeurs de x.

[7] Joseph F. Santner, "A Note on Curve Fitting.", The Mathematics Teacher, LVI (avril 1963), p. 218-221.