Traduction du chapitre XIII "Méthodes de Liouville", p. 429 et suivantes) du livre Elementary number theory de J. V. Uspensky et M. A. Heaslet, éditeur McGraw-Hill, 1939 (Denise Vella-Chemla, février 2023)

Chapitre XIII
Méthodes de Liouville

1. Objet de ce chapitre. La théorie des nombres emprunte ses outils d'investigation à presque toutes les branches des mathématiques. Une grande partie des questions importantes sont gérées de la plus naturelle des manières par des méthodes géométriques, et de tels développements constituent ce qu'on appelle la "géométrie des nombres". Les applications de l'analyse à la solution des problèmes arithmétiques sont nombreuses et voient leur importance augmenter de telle manière qu'actuellement, les avancées les plus brillantes en théorie des nombres sont dues presque exclusivement à des méthodes analytiques. Naturellement, ni le caractère de ce livre ni sa taille ne permettent d'y inclure quoi que ce soit de ces méthodes avec une exception, concernant soit les méthodes géométriques soit les méthodes analytiques de la théorie des nombres.

Depuis sa création, la théorie des fonctions elliptiques a été une source abondante pour un grand nombre de théorèmes arithmétiques particuliers et intéressants. Il serait bien sûr impossible de parler ici en détail des fonctions elliptiques. Heureusement, comme l'a montré Liouville (1809-1882), leur usage peut être remplacé par quelques identités arithmétiques très générales qui peuvent soit être dérivées de quelques expansions dans la théorie des fonctions elliptiques, soit établies directement de la manière la plus élémentaire. Une fois que les identités fondamentales sont établies, par leur spécialisation et leur adaptation, un nombre incommensurable de résultats spécifiques sont obtenus d'une façon assez simple. Dans ce chapitre, nous nous cantonnerons seulement à quelques applications, destinées à montrer la fertilité des méthodes de Liouville ; et, comme couronnement, nous produirons une solution complète du problème concernant la représentation des nombres comme sommes de trois carrés.

2. Fonctions arbitraires. Conditions de parité. Dans ce qui suit, on traitera de fonctions arbitraires

$$F(x, y, z)$$

définies pour des valeurs entières de leurs arguments x, y, z et sujettes à certaines conditions de parité. On dit que $F(x, y, z)$ est une fonction paire par rapport à x si

$$F(-x, y, z) = F(x, y, z)$$

pour toutes les valeurs entières de x, y, z. De façon similaire, $F(x, y, z)$ est une fonction impaire par rapport à x, si

$$F(x, y, z) = -F(x, y, z)$$

pour toutes les valeurs entières de x, y, z. En particulier, cette dernière condition implique

$$F(0, y, z) = 0.$$

Par rapport à la paire de variables y, z, la fonction $F(x, y, z)$ est paire ou impaire selon que

$$F(x, -y, -z) = F(x, y, z)$$

ou

$$F(x,-y,-z) = -F(x,y,z).$$

Prenons un exemple ;

$$F(x,y,z) = xyz$$

est une fonction impaire par rapport à chacune de ses variables, mais est une fonction paire par rapport à la paire y, z. Un autre exemple est

$$\begin{aligned} &F(x,y,z) = 0 \qquad \text{si} \qquad x^2 \neq 1 \\ &F(\pm 1, y, z) = (y-z)^2. \end{aligned}$$

Cette fonction est paire par rapport à x et est aussi paire par rapport à la paire y, z, mais elle n'est ni paire ni impaire par rapport à y ou z pris seuls.

3. La première identité fondamentale. La première identité fondamentale fait intervenir une fonction arbitraire $F(x,y,z)$ définie pour toutes les valeurs entières de ses arguments et satisfaisant les conditions suivantes de parité :

$$F(-x,y,z) = -F(x,y,z), \qquad F(x,-y,-z) = F(x,y,z),$$
$$F(0,y,z) = 0.$$

Soit n un entier positif arbitraire, $\lambda > \mu \geq 0$ étant deux nombres positifs dont on ne spécifie pas la nature. On considèrera les partitions de n des types suivants :

$$\begin{aligned} &(a) \quad n = \lambda i^2 + \mu i + (\lambda\delta + \mu)d. \\ &(b) \quad n = \lambda i^2 - \mu i + (\lambda\delta - \mu)d. \\ &(c) \quad n = \lambda h^2 + \mu h + \lambda\Delta\Delta'. \end{aligned}$$

Dans (a) et (b), i est un entier positif, nul, ou négatif, alors que d et δ sont des entiers positifs. En vertu de la condition $\lambda > \mu > 0$ il y a seulement un nombre fini de partitions (a) et (b) s'il existe de telles partitions. Dans (c), h est un entier positif, nul, ou négatif, alors que Δ et Δ' sont des entiers positifs. Clairement, il n'y a qu'un nombre limité de partitions (c).

La première identité fondamentale peut être présentée ainsi :

$$\sum_{(a)} F(\delta - 2i, d+i, 2d+2i-\delta) + \sum_{(b)} F(\delta - 2i, d+i, 2d+2i-\delta)$$
$$= \sum_{(c)} F(\Delta + \Delta', h, \Delta - \Delta') + T - U,$$

les sommations étant étendues, respectivement, à toutes les partitions (a), (b), (c). Par rapport aux termes complémentaires T, U, ce sont

$$U = \sum_{(d)} F\left(\Delta + \Delta', \frac{\Delta - \Delta'}{2}, \Delta - \Delta'\right),$$

où la sommation est étendue à toutes les représentations de n de la forme

$$(d) \quad n = \lambda\left(\frac{\Delta + \Delta'}{2}\right)^2 + \mu\frac{\Delta - \Delta'}{2} \; ; \; \Delta' \equiv \Delta \pmod 2,$$

avec les entiers positifs Δ et Δ' de la même parité ; et

$$T = \sum_{(e)} F(2|s| - j, |s|, 2|s| - j) \ ; \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, 2|s| - 1,$$

où la sommation, pour chaque solution de l'équation

$$(e) \quad n = \lambda s^2 + \mu s$$

est étendue sur tout $j = 1, 2, 3, ..., 2|s| - 1$. On doit comprendre que lorsque les partitions de l'un des types indiqués sont absentes, la somme correspondante doit être remplacée par 0.

Malgré l'apparence compliquée de l'identité fondamentale, sa preuve est, en effet, très simple. Considérons d'abord la somme

$$S = \sum_{(a)} F(\delta - 2i, d + i, 2d + 2i - \delta)$$

et séparons-la en trois parties S_1, S_2, S_3, qui correspondent, respectivement, aux solutions de l'équation

$$(a) \quad n = \lambda i^2 + \mu(d + i) + \lambda d\delta,$$

dans laquelle $2i + d - \delta > 0, 2i + d - \delta = 0, 2i + d - \delta < 0$. À chaque solution i, d, δ de (a) dans laquelle $2i + d - \delta > 0$, les formules

$$i' = \delta - i, \qquad d' = 2i + d - \delta, \qquad \delta' = \delta$$

donnent une solution correspondante de la même sorte, car on a inversement

$$i = \delta' - i', \qquad d = 2i' + d' - \delta', \qquad \delta = \delta'.$$

Notons en outre que

$$\delta' - 2i' = -\delta + 2i, \qquad d' + i' = d + i,$$
$$2d' + 2i' - \delta' = 2d + 2i - \delta.$$

Quand i, d, δ parcourent les solutions de la première sorte, i', d', δ' parcourent les mêmes solutions. Par conséquent

$$S_1 = \sum F(\delta - 2i, d + i, 2d + 2i - \delta) = \sum F(\delta' - 2i', d' + i', 2d' + 2i' - \delta') \ ;$$

mais

$$\begin{aligned} F(\delta' - 2i', d' + i', 2d' + 2i' - \delta') &= F(-\delta + 2i, d + i, 2d + 2i - \delta \\ &= -F(\delta - 2i, d + i, 2d + 2i - \delta), \end{aligned}$$

et donc

$$S_1 = -S_1,$$

par conséquent $S_1 = 0$.

Tournons-nous maintenant vers la somme S_3 correspondant aux solutions de l'équation (a) dans laquelle $2i + d - \delta < 0$. À chaque telle solution, les formules

$$h = d + i, \qquad \Delta = d, \qquad \Delta' = \delta - d - 2i$$

donnent une solution correspondante h, Δ, Δ' de l'équation

$$(c)\ \ n = \lambda h^2 + \mu h + \lambda \Delta \Delta',$$

dans laquelle

$$\Delta' - \Delta + 2h > 0.$$

Inversement, à chaque solution de cette nature correspond une solution

$$i = h - \Delta, \qquad d = \Delta, \qquad \delta = \Delta' - \Delta + 2h$$

de l'équation (a) dans laquelle $2i + d - \delta < 0$. Par conséquent

$$S_3 = \sum F(\Delta + \Delta', h, \Delta - \Delta'),$$

où la sommation s'étend à toutes les solutions de (c) satisfaisant l'inégalité

$$\Delta' - \Delta + 2h > 0.$$

Il reste à considérer la somme S_2 correspondant aux solutions de (a) dans lesquelles $2i + d - \delta = 0$, ou

$$i = \frac{\delta - d}{2}.$$

Pour cette valeur de i, l'équation (a) devient

$$n = \lambda \left(\frac{d+\delta}{2}\right)^2 + \mu \frac{d+\delta}{2}.$$

Donc, à moins que

$$n = \lambda s^2 + \mu s$$

avec s entier positif, la somme S_2 se réduit à 0. Sinon,

$$d + \delta = 2s, \qquad \delta - 2i = 2s - \delta, \qquad d + i = s,$$
$$2d + 2i - \delta = 2s - \delta,$$

et δ peut prendre toutes les valeurs $1, 2, 3, ..., 2s - 1$, de telle façon que

$$S_2 = \sum F(2s - j, s, 2s - j),$$

j parcourant les valeurs $1, 2, 3, ..., 2s - 1$.

La somme

$$S' = \sum_{(b)} F(\delta - 2i, d + i, 2d + 2i - \delta)$$

peut être à nouveau séparée en trois parties S_1', S_2', S_3', correspondant aux solutions de l'équation

$$(6)\ \ n = \lambda i^2 - \mu(i + d) + \lambda d\delta,$$

dans laquelle $2i+d-\delta>0, 2i+d-\delta=0, 2i+d-\delta<0$, respectivement. Exactement la même discussion que précédemment montre que

$$S'_1 = 0$$

et

$$S'_3 = \sum F(\Delta+\Delta', h, \Delta-\Delta'),$$

la sommation s'étendant à toutes les partitions

$$n = \lambda h^2 - \mu h + \lambda\Delta\Delta',$$

dans laquelle $\Delta'-\Delta+2h>0$. Mais comme $-h, \Delta', \Delta$ parcourt le même ensemble de valeurs que h, Δ, Δ' dans l'équation (c), on a aussi

$$S'_3 = \sum F(\Delta+\Delta', -h, \Delta'-\Delta),$$

ou parce que $F(x,y,z)$ est paire par rapport à y, z

$$S'_3 = \sum F(\Delta+\Delta', h, \Delta-\Delta'),$$

où la sommation s'étend à toutes les solutions de (c) dans lesquelles $\Delta'-\Delta+2h<0$. Finalement, $S'_2 = 0$ à moins que

$$n = \lambda s^2 - \mu s$$

avec s un entier positif, auquel cas

$$S'_2 = \sum F(2s-j, s, 2s-j)\ ; \qquad j = 1, 2, 3, = ..., 2s-1.$$

De cette discussion il s'ensuit que le côté gauche de l'identité fondamentale se réduit à

$$S_3 + S'_3 + S_2 + S'_2.$$

Mais

$$S_3 + S'_3$$

diffère de

$$\sum_{(c)} F(\Delta+\Delta', h, \Delta-\Delta')$$

seulement par des termes dans lesquels $\Delta'-\Delta+2h=0$, et ces termes se combinent pour donner U ; il est aussi clair que

$$S_2 + S'_2 = T,$$

et ainsi la première identité fondamentale est démontrée.

4. La seconde identité fondamentale. Si l'on suppose que $F(x,y,z)$ satisfait les conditions

$$F(-x,y,z) = -F(x,y,z), \qquad F(x,-y,-z) = -F(x,y,z),$$
$$F(0,y,z) = 0$$

et si l'on répète exactement le même raisonnement que ci-dessus, en faisant attention au fait que maintenant $F(x,y,z)$ est impaire par rapport à la paire y,z, on obtient la seconde identité fondamentale

$$\sum_{(a)} F(\delta-2i, d+i, 2d+2i-\delta) - \sum_{(b)} F(\delta-2i, d+i, 2d+2i-\delta)$$
$$= \sum_{(c)} F(\Delta+\Delta', h, \Delta-\Delta') + T_1 - T_2 - U$$

où on indique l'étendue des sommations par (a), (b), (c) et où l'expression pour U est exactement la même que dans la première identité fondamentale, alors que $T_1 = 0$ à moins que

$$n = \lambda s^2 + \mu s$$

avec s un entier positif, auquel cas

$$T_1 = \sum F(2s-j, s, 2s-j); \qquad j = 1, 2, 3, ..., 2s-1.$$

Similairement $T_2 = 0$ à moins que

$$n = \lambda s^2 - \mu s$$

avec s un entier positif, auquel cas

$$T_2 = \sum F(2s-j, s, 2s-j); \qquad j = 1, 2, 3, .., 2s-1.$$

5. Formule de récurrence d'Euler. La célèbre formule de récurrence d'Euler pour la somme des diviseurs a déjà été mentionnée dans la section 9, Chap. IV. Maintenant nous pouvons la démontrer très simplement en utilisant les identités fondamentales dans lesquelles $F(x,y,z)$ est spécialisée d'une façon particulière. Soit

$$F(x,y,z) = 0 \qquad \text{si soit } x \text{ soit } z \text{ est pair ;}$$

$$F(x,y,z) = (-1)^{\frac{x+z}{2}+y} \text{ si à la fois } x \text{ et } z \text{ sont impairs.}$$

Alors

$$F(-x,y,z) = -F(x,y,z), \qquad F(x,-y,-z) = -F(x,y,z),$$
$$F(0,y,z) = 0,$$

et on peut utiliser cette fonction dans la seconde identité fondamentale dans laquelle, en outre, on dénotera $\lambda = \frac{3}{2}, \mu = \frac{1}{2}$.

En remarquant que $U = 0$ avec cette définition de $F(x,y,z)$, on aura

$$\sum_{(a)} (-1)^i - \sum_{(b)} (-1)^i = \sum_{(c)} (-1)^{h+\Delta} + T_1 - T_2,$$

où les sommes indiquées par (a), (b), (c) font référence aux partitions

$$(a) \quad n = \frac{3i^2+i}{2} + \frac{3\delta+1}{2}d, \qquad \delta \text{ impair.}$$

$$(b) \quad n = \frac{3i^2-i}{2} + \frac{3\delta-1}{2}d, \qquad \delta \text{ impair.}$$

$$(c) \quad n = \frac{3h^2+h}{2} + \frac{3}{2}\Delta\Delta', \qquad \Delta' + \Delta \text{ impair.}$$

Quant à $T_1 - T_2$, en considérant que seulement un entier t positif ou négatif peut satisfaire l'équation

$$n = \frac{3t^2+t}{2},$$

on trouve aisément que dans tous les cas

$$T_1 - T_2 = 0 \qquad \text{si } n \text{ n'est pas un nombre pentagonal ;}$$

$$T_1 - T_2 = (-1)^{s-1}s \qquad \text{si} \qquad n = \frac{3s^2+s}{2}, \qquad s \gtrless 0^1.$$

Dans la somme

$$\sum_{(c)} (-1)^{h+\Delta}$$

à chaque terme

$$(-1)^{h+\Delta}$$

correspond un terme

$$(-1)^{h+\Delta'}$$

obtenu en échangeant Δ et Δ'. Puisque Δ et Δ' sont de parités différentes, la contribution due à de tels termes en correspondance

$$(-1)^{h+\Delta} + (-1)^{h+\Delta'} = 0,$$

donc il en découle que

$$\sum_{(c)} (-1)^{h+\Delta} = 0.$$

Ainsi on a le résultat suivant :

$$\sum_{(a)} (-1)^i = \sum_{(b)} (-1)^i = 0 \qquad \text{si } n \text{ n'est pas un nombre pentagonal,}$$

$$= (-1)^{s-1}s \qquad \text{si} \qquad n = \frac{3s^2+s}{2}, \qquad s \gtrless 0 \qquad (A)$$

[1] *Note de la traductrice* : sens de l'expression $s \gtrless 0$ trouvée dans un blog, à confirmer : s peut être n'importe quel réel. Une telle variable peut être éliminée en introduisant deux variables auxiliaires non-négatives : $s = s_1 - s_2$ avec $s_1 \geq 0$ et $s_2 \geq 0$.

dont l'interprétation arithmétique sera donnée ultérieurement.

Dans la première identité fondamentale, on a le droit de prendre

$$F(x,y,z)=0 \qquad \text{si soit } x \text{ soit } z \text{ est pair,}$$

$$F(x,y,z)=(-1)^{\frac{x+z}{2}+y}(2y-z) \text{ si à la fois } x \text{ et } z \text{ sont impairs,}$$

car alors
$$F(x,y,z)=-F(x,y,z), \qquad F(x,-y,-z)=F(x,y,z),$$
$$F(0,y,z)=0.$$

Le résultat sera
$$\sum_{(a)}(-1)^i\delta+\sum_{(b)}(-1)^i\delta=\sum_{(c)}(-1)^{h+\Delta}(2h+\Delta'-\Delta)+T,$$

où

$$T=0 \qquad \text{si } n \text{ n'est pas un nombre pentagonal,}$$

$$T=(-1)^{s-1}s^2 \qquad \text{si } n=\frac{3s^2+s}{2}, \qquad s \gtrless 0.$$

Pour la même raison que précédemment
$$\sum_{(c)}(-1)^{h+\Delta}h=0,$$

de telle façon que la relation précédente peut être simplifiée et mise sous la forme
$$\sum_{(a)}(-1)^i\delta+\sum_{(b)}(-1)^i\delta=\sum_{(c)}(-1)^{h+\Delta}(\Delta'-\Delta)+T,$$

De cela et de (A), il s'ensuit que
$$\sum_{(a)}(-1)^i\frac{3\delta+1}{2}+\sum_{(b)}(-1)^i\frac{3\delta-1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}\sum_{(c)}(-1)^{h+\Delta}(\Delta'-\Delta)+V, \qquad (B)$$

où

$$V=0 \qquad \text{si } n \text{ n'est pas un nombre pentagonal,}$$

$$V=(-1)^{s-1}\frac{3s^2+s}{2} \qquad \text{si} \qquad n=\frac{3s^2+s}{2}, \qquad s \gtrless 0.$$

Puisque δ est impair, on peut poser $\delta = 2k-1$ dans (a) et $\delta = 2k+1$ dans (b) ; alors (a) et (b) peuvent être écrites ainsi :

$$(a) \quad n = \frac{3i^2+i}{2} + (3k-1)d,$$
$$(b) \quad n = \frac{3i^2-i}{2} + (3k+1)d,$$

ou, en changeant i en $-i$,

$$(b) \quad n = \frac{3i^2+i}{2} + (3k+1)d.$$

Dénotons maintenant par $\sigma_0(m), \sigma_1(m), \sigma_2(m)$ les sommes des diviseurs de m qui sont $\equiv 0, 1, -1 \pmod 3$, respectivement ; alors

$$\sum_{(a)} (-1)^i \frac{3\delta+1}{2} = \sum (-1)^i \sigma_2\left(n - \frac{3i^2+i}{2}\right),$$

$$\sum_{(b)} (-1)^i \frac{3\delta-1}{2} = \sum (-1)^i \sigma_1\left(n - \frac{3i^2+i}{2}\right),$$

où les sommations sur la droite s'étendent à tous les nombres positifs, 0, et aux valeurs de i pour lesquelles

$$\frac{3i^2+i}{2} < n.$$

Il reste maintenant à transformer la somme

$$\frac{3}{2}\sum_{(c)} (-1)^{h+\Delta}(\Delta' - \Delta).$$

Dans l'équation

$$n = \frac{3h^2+h}{2} + \frac{3}{2}\Delta\Delta'$$

$\Delta\Delta'$ est un nombre pair $= 2^{\alpha+1}M$. En prenant la somme

$$\sum (-1)^{\Delta}(\Delta' - \Delta)$$

pour h fixé, on trouve facilement que sa valeur est

$$-2(2^{\alpha+1}-1)\sigma(M),$$

et par conséquent

$$\frac{3}{2}\sum (-1)^{\Delta}(\Delta' - \Delta)$$

est la somme, prise négativement, de tous les diviseurs de $n - \dfrac{3h^2+h}{2}$ qui sont divisibles par 3.

Par conséquent

$$\frac{3}{2}\sum_{(c)}(-1)^{h+\Delta}(\Delta'-\Delta) = -\sum \sigma_0\left(n-\frac{3h^2+h}{2}\right),$$

où la sommation s'étend à tous les entiers h pour lesquels

$$\frac{3h^2+h}{2} < n.$$

En transférant le premier terme du côté droit de (B), en changeant h en i, et en remarquant que

$$\sigma_0(m)+\sigma_1(m)+\sigma_2(m) = \sigma(m),$$

on obtient

$$\sum(-1)^i\sigma\left(n-\frac{3i^2+i}{2}\right) = 0 \qquad \text{si } n \text{ n'est pas un nombre pentagonal,}$$

$$\sum(-1)^i\sigma\left(n-\frac{3i^2+i}{2}\right) = (-1)^{s-1}\frac{3s^2+s}{2} \qquad \text{si } n = \frac{3s^2+s}{2}, \qquad s \gtrless 0,$$

et ceci, c'est la formule de récurrence d'Euler.

L'équation (A) a aussi un sens arithmétique simple. Dénotons par $\omega(m)$ la différence entre le nombre de diviseurs de m de la forme $3k+1$ et le nombre de diviseurs de la forme $3k-1$. Alors (A) est clairement équivalent à la formule de récurrence

$$\sum(-1)^i\omega\left(n-\frac{3i^2+i}{2}\right) = 0 \qquad \text{si } n \text{ n'est pas un nombre pentagonal,}$$

$$\sum(-1)^i\omega\left(n-\frac{3i^2+i}{2}\right) = (-1)^s s \qquad \text{si } n = \frac{3s^2+s}{2}, \qquad s \gtrless 0.$$

Prenons, par exemple, $n = 10$; alors puisque 10 n'est pas un nombre pentagonal, on doit avoir

$$\omega(10)-\omega(9)-\omega(8)+\omega(5)+\omega(3) = 0,$$

et en effet

$$w(10) = 0, \qquad \omega(9) = 1, \qquad \omega(8) = 0, \qquad \omega(5) = 0,$$
$$\omega(3) = 1\ ;$$
$$0-1-0+0+1 = 0$$

À nouveau, pour $n = 12$

$$\omega(12) = 1, \qquad \omega(11) = 0, \qquad \omega(10) = 0, \qquad \omega(7) = 2,$$
$$\omega(5) = 0$$

et

$$\omega(12)-\omega(11)-\omega(10)+\omega(7)+\omega(5) = 1-0-0+2+0 = 3,$$

comme cela devrait être, puisque

$$12 = \frac{3\cdot(-3)^2+(-3)}{2}.$$