Décomposants de Goldbach et géométrie des nombres (Denise Vella-Chemla, février 2023)

On situe le problème de la recherche des décomposants de Goldbach dans la géométrie des nombres de Minkowski. Regardons 2 exemples pour fixer les idées. On cherche les décomposants de Goldbach du nombre 40. On sait que certains d'entre eux, ceux qui sont supérieurs à la racine de 40, s'ils existent, ne sont divisibles par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{40}$ (pour être des nombres premiers) et ne partagent aucune classe de congruence avec 40 selon les modules premiers inférieurs à $\sqrt{40}$ (pour que leur complémentaire soit premier).

On représente les nombres sur un treillis de nombres de Minkowski ainsi : les nombres qui partagent un reste sont sur une même droite. On ne s'intéresse qu'aux restes dans les divisions par 3 ou 5, les deux seuls nombres premiers impairs inférieurs à $\sqrt{40}$. Il y a quelques points multiples car $3 \times 5 < \dfrac{n}{2}$.

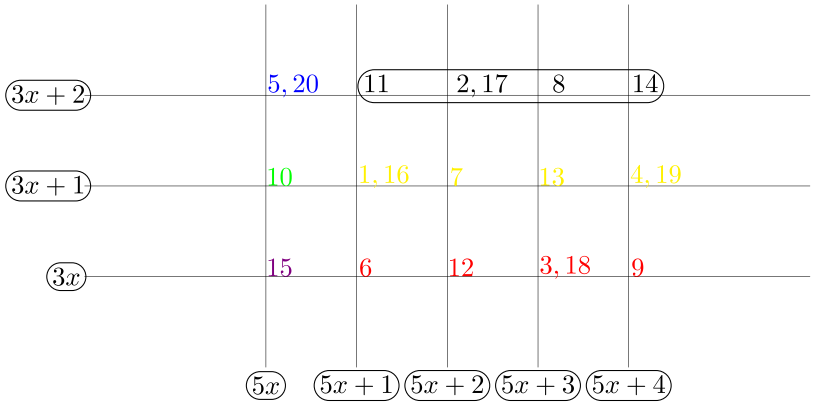
Voici le treillis des nombres :

$3x+2$	$5, 20$	11	$2, 17$	8	14
$3x+1$	10	$1, 16$	7	13	$4, 19$
$3x$	15	6	12	$3, 18$	9
	$5x$	$5x+1$	$5x+2$	$5x+3$	$5x+4$

Les décomposants de Goldbach s'ils existent ne peuvent être sur les deux bords inférieur et gauche du rectangle des nombres étiquetés (nombres divisibles par 3 ou 5) et ne peuvent appartenir à aucune droite à laquelle 40 appartient. La droite éliminée ici est la droite des $3x+1$ ($40 \equiv 1 \pmod 3$).

On symbolise par la couleur les hyperplans (là des droites) éliminés par les congruences de $n = 40$ (on utilise le mélange de couleur vert pour le nombre 10 qui est à la fois un $5k$ et un $3k'+1$ et le mélange de couleur violet pour le nombre 15 qui est à la fois un $3k$ et un $5k'$).

Voici le treillis des nombres après application des filtres polarisants (on n'a pas utilisé de filtre polarisant pour éliminer les nombres pairs, pour éviter d'avoir à passer à la troisième dimension sur ce minuscule exemple), seuls les nombres impairs 11 et 17 n'ont pas été éliminés par les filtres polarisants qui éliminent les hyperplans (ici les droites) auxquelles 40 appartient. Ne restent que 11 et 17 qui sont bien les décomposants de Goldbach de 40 supérieurs à $\sqrt{40} = 6, \ldots$.



Pour $n = 98$, on n'a plus de points multiples car $3 \times 5 \times 7 > \dfrac{n}{2}$. Pour des raisons de lisibilité, les nombres qui sont aux points entiers d'un réseau parallélépipède rectangle ont été représentés en séparant les différents "étages de l'immeuble" (les plans à troisième coordonnée constante, cette troisième coordonnée étant le reste modulaire d'un nombre selon le module 7). Les segments des hyperplans (ici des plans) auxquels 98 appartient[1] ont été notés en rouge.

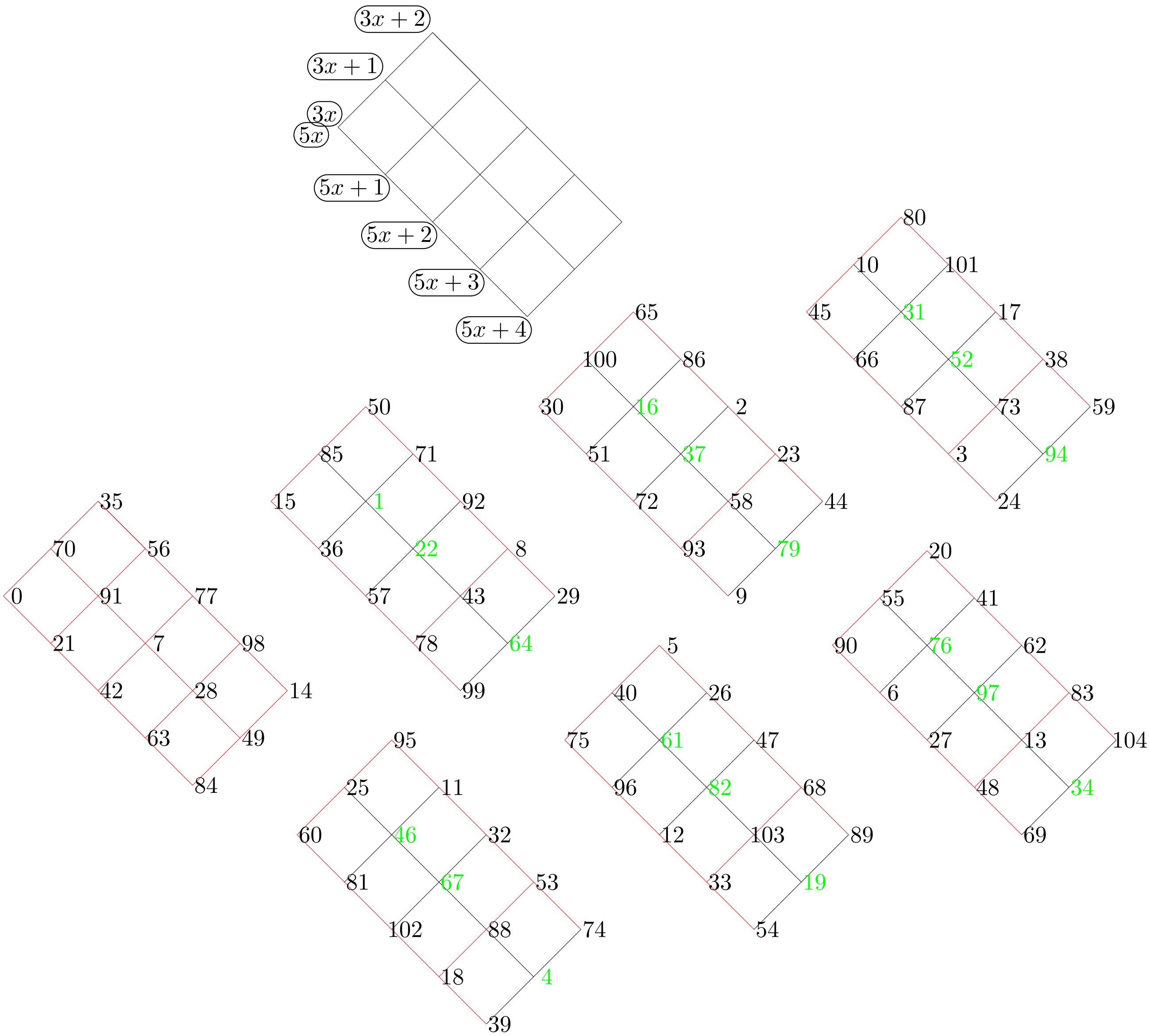
Les décomposants de Goldbach de 98 ne partagent aucun plan avec lui et ne peuvent appartenir aux "plans bords" qui contiennent les nombres divisibles par 3, 5 ou 7.

On imagine aisément comment le problème se généralise à un polytope de $\mathbb{Z}^d$ avec d le nombre de nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$. L'existence d'au moins un point dans l'espace après élimination des hyperplans auquel n appartient provient sûrement de l'application du théorème de Blichfeldt, qui se situe dans la géométrie des nombres de Minkowski. On ne sait pas s'il est applicable : le fait d'éliminer des plans annihile la convexité du volume obtenu, même si les régions obtenues sont grandes. De plus, une solution doit être inférieure à la moitié du nombre pair considéré et on voit bien que les nombres sont tout mélangés (c'est pour cette raison qu'on ne peut pas appliquer une méthode comme le simplexe qui permettrait de situer les nombres inférieurs à la valeur souhaitée dans un demi-espace, d'un côté ou de l'autre d'un hyperplan).

On se contente de la démonstration probabiliste[2] qui dit que quand on choisit aléatoirement $\prod\limits_{\substack{p_k \text{ premier} \\ p_k \leq \sqrt{n}}} (p_k - 2)$ nombres parmi $\prod\limits_{\substack{p_k \text{ premier} \\ p_k \leq \sqrt{n}}} p_k$ nombres, on est très vite assuré que l'un d'entre eux au moins est inférieur à une valeur fixée (la valeur $\dfrac{n}{2}$ souhaitée).

[1] à éliminer, comme par des filtres polarisants en photographie.

[2] https://hal.science/hal-03750889 (en anglais http://denise.vella.chemla.free.fr/proba-sans-deux-post-en.pdf).



Le problème de la recherche d'un décomposant de Goldbach de n un nombre pair, qui soit supérieur à $\sqrt{n}$ s'est transformé en la recherche d'un point dans la grille de nombres de Minkowski :

> *n étant associé à un point de la grille des nombres, un décomposant de Goldbach de n, supérieur à $\sqrt{n}$, est un autre point D ($D \neq 1$ et de $D \neq n-1$) de la grille tel que D n'a aucune coordonnée nulle et D et n ont toutes leurs coordonnées différentes 2 à 2.*