Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 431 à 436.

GROUPES DE BARSOTTI-TATE ET CRISTAUX

par A. GROTHENDIECK

Dans la suite, p désigne un nombre premier fixé. Nous nous proposons d'exposer l'esquisse d'une généralisation de la théorie de Dieudonné [4] des groupes formels sur un corps parfait de car. p, au cas « des groupes de Barsotti-Tate » (« groupes p-divisibles » dans la terminologie de Tate [5]) sur un schéma de base S sur lequel p est nilpotent. Un exposé plus détaillé se trouvera dans des notes développant un cours que j'ai donné sur ce sujet en juillet 1970 au Séminaire de Mathématique Supérieure de l'Université de Montréal, cf. aussi [7].

1. Généralités.

Si S est un schéma, on identifie les schémas X sur S aux faisceaux (fppf) [2] qu'ils représentent. Les (faisceaux en) groupes sur S sont supposés commutatifs. Un groupe G sur S est appelé un *groupe de Barsotti-Tate sur* S (ou p-groupe de BT sur S, si on veut spécifier p), s'il satisfait aux conditions suivantes:

a) $p.G = G$, i. e. G est p-divisible.

b) G est de p-torsion, i. e. $G = \varinjlim_n {}_{p^n}G$.

c) Les groupes $G(n) = {}_{p^n}G \overset{\text{(def)}}{=} \operatorname{Ker}(p^n.\mathrm{id}_G)$ sont (représentables par des S-schémas) finis localement libres.

En fait, il suffit (moyennant *a*) et *b*)) de supposer que $G(1) = {}_pG$ soit fini localement libre, pour que les $G(n)$ le soient comme extensions multiples de groupes isomorphes à $G(1)$. Notons que $G(1)$ est de rang de la forme p^d, où d est une fonction sur S localement constante à valeurs dans les entiers naturels, et que pour tout n, $G(n)$ est alors de rang p^{dn}. L'entier d s'appelle le *rang* ou la *hauteur* du groupe de Barsotti-Tate G. Remarquons qu'une extension de deux groupes de BT est un groupe de BT, et que le rang se comporte additivement pour les extensions. Notons aussi que l'image inverse par un changement de base $S' \to S$ d'un groupe de BT est un groupe de BT.

Lorsque p est premier aux caractéristiques résiduelles de S, la catégorie des groupes de BT sur S est équivalente à la catégorie des faisceaux p-adiques libres constants tordus sur S [3], en associant à G le faisceau p-adique

$$T_p(G) = \text{« } \varprojlim \text{ » } G(n),$$

le morphisme de transition $G(n') \to G(n)$ étant induit par la multiplication par $p^{n'-n}$ (pour $n' \geqslant n$). Si S est connexe et muni d'un point géométrique s, la catégorie en question est donc équivalente à celle des représentations linéaires continues du groupe fondamental $\pi = \pi_1(S, s)$ dans des $\mathbb{Z}_p$-modules libres de type fini.

Lorsque A est un schéma abélien sur S, son sous-groupe de p-torsion maximal

$$_{p^\infty}A = \varinjlim_n {}_{p^n}A$$

est un groupe de BT, de rang égal à $2d$, ou d est la dimension relative de A. Les propriétés de A ont tendance à se refléter de facon très fidèle dans celles du groupe de BT associé, ce qui est une des raisons principales de l'intérêt des groupes de BT. Signalons à ce propos le

Théorème de Serre-Tate [6] [7]. — *Supposons que p soit localement nilpotent sur S* (i. e. *les car. residuelles de S sont egales a p*) *et soit S' un voisinage infinitésimal de S. Alors, pour tout schéma abelien A sur S, les prolongements A' de A à S'* « *correspondent exactement* » *aux prolongements du groupe de BT G associe à A en un groupe de BT G' sur S'.*

En fait, on obtient une équivalence entre la catégorie des schémas abéliens A' sur S', et la catégorie des triples (G', A, ϕ) d'un groupe de BT G' sur S', d'un schéma abélien A sur S, et d'un isomorphisme $\phi : G' \mid S \simeq {}_{p^\infty}A$.

2. Groupe formel associé à un groupe de BT.

Si G est un faisceau sur S muni d'une section e, on définit de façon évidente le voisinage infinitésimal d'ordre n de cette section dans G, $\mathrm{Inf}^n(G, e)$, et le voisinage infinitésimal d'ordre infini

$$\overline{G} = \mathrm{Inf}^\infty(G, e) = \varinjlim \mathrm{Inf}^n(G, e).$$

Lorsque G est un groupe de BT sur S et que p est localement nilpotent sur S, on prouve que $\overline{G}$ est un *groupe de Lie formel*, qu'on appelle le *groupe formel associé au groupe de BT G*. Sa formation est fonctorielle en G et commute au changement de base. Lorsque S est réduit à un point, $\overline{G}$ lui-même est un groupe de BT, et G est une extension d'un groupe de BT $G/\overline{G}$ ind-étale par le groupe de BT ind-infinitésimal $\overline{G}$. La catégorie des groupes de BT ind-infinitésimaux n'est alors autre que celle des groupes de Lie formels qui sont p-divisibles, i. e. ou la multiplication par p est une isogénie [5].

3. Théorie de Dieudonné.

Nous supposons maintenant p localement nilpotent sur S. Pour la notion de « cristal en modules localement libre » sur S, nous renvoyons à [1]; nous considérons ici S comme un schéma sur $\mathbb{Z}_p$, l'idéal $p\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Z}_p$ étant muni de ses structures de puissances divisées. La théorie de Dieudonné généralisée consiste en la définition d'un « *foncteur de Dieudonné* ».

$$\mathbb{D} : BT(S)^0 \to \mathrm{Crismodloclib}\,(S),$$

ou $BT(S)$ désigne la catégorie des groupes de BT sur S. Ce foncteur est compatible avec les changements de base. On peut le construire par deux procédés assez distincts en apparence (méthode de l'exponentielle, et méthode des $\natural$-extensions), dont la description dépasse le cadre de cette note. La première méthode a l'avantage de se prêter directement à la théorie des extensions infinitésimales de groupes de BT du paragraphe suivant; la deuxième, de permettre une comparaison assez directe de ce foncteur et le foncteur défini classiquement par Dieudonné, dans le cas où S est le spectre d'un corps parfait: dans ce cas, on trouve un isomorphisme canonique entre ce dernier, et le foncteur que nous construisons.

Lorsque S est de caractéristique p, on dispose des morphismes de Frobenius et de Verschiebung (décalage):

$$G \underset{V_G}{\overset{F_G}{\rightleftarrows}} G^{(p/S)},$$

d'où, en transformant par le foncteur de Dieudonné $\mathbb{D}$, des morphismes

$$M \underset{V_M}{\overset{F_M}{\rightleftarrows}} M^{(p/S)}, \qquad M = D(G),$$

satisfaisant les conditions habituelles

$$F_M V_M = p.\mathrm{id}_M, \qquad V_M F_M = p.\mathrm{id}_{M^{(p/s)}}.$$

Un cristal M muni de morphisme F_M, V_M satisfaisant aux conditions précédentes sera appelé un *cristal de Dieudonné*. Ainsi, la théorie de Dieudonné généralisée nous fournit un foncteur contravariant de la catégorie des groupes de Barsotti-Tate sur S dans celle des cristaux de Dieudonné, compatible aux changements de base. Lorsque S est le spectre d'un corps parfait, la théorie de Dieudonné classique nous apprend que c'est une équivalence de catégorie. Dans le cas général, on peut espérer que ce foncteur soit pleinement fidèle.

On peut d'ailleurs donner une description conjecturale assez simple de l'image essentielle de ce foncteur, que nous n'expliciterons pas ici.

4. Filtration du cristal de Dieudonné et déformations de groupes de BT.

Nous supposons toujours p localement nilpotent. Avec la construction du cristal de Dieudonné $\mathbb{D}(G)$ d'un groupe de BT G, on trouve en même temps une filtration canonique du module localement libre $\mathbb{D}(G)_S$ sur S par un sous-module localement facteur direct Fil $(\mathbb{D}(G)_S)$. De façon précise, on trouve une suite exacte canonique

$$0 \to \underline{\omega}_G \to \mathbb{D}(G)_S \to \check{\underline{\omega}}_{G^*} \to 0,$$

où $\underline{\omega}_G$ est le faisceau localement libre sur S des 1-formes différentielles le long de la section unité du groupe de Lie formel $\overline{G}$ associé à G (n° 2), et $G^* = \varinjlim G(n)^*$ désigne le groupe de BT *dual* de G (pour la dualité de Cartier), enfin $\check{}$ désigne le module dual. La suite exacte envisagée est fonctorielle en G, et commute aux changements de base.

Soit maintenant S' un épaississement à puissances divisées de S, et supposons que, ou bien les puissances divisées envisagées sont nilpotentes, ou bien que les fibres de G sont connexes, ou qu'il en soit ainsi de celles de G^* (i. e. $G(1)$ est unipotent). Considérons le module localement libre $\mathbb{D}(G)_{S'}$ sur S'. Pour tout prolongement G' de G en un groupe de BT sur S, $\mathbb{D}(G)_{S'}$ peut s'identifier à $\mathbb{D}(G')_S$, et à ce titre il est muni d'une filtration par un sous-module localement facteur direct Fil $\mathbb{D}(G')$, qui prolonge la filtration Fil $\mathbb{D}(G)$ dont on dispose déjà sur $\mathbb{D}(G)_S$. Ceci dit, on trouve que les prolongements de G en un groupe de BT G' sur S' « correspondent exactement » aux prolongements de la filtration qu'on a sur $\mathbb{D}(G)_S$ en une filtration de $\mathbb{D}(G)_{S'}$ par un sous-module localement facteur direct. Plus précisément, on trouve une équivalence entre la catégorie des groupes de BT G' sur S' (resp. ceux à fibres connexes, resp. ceux à fibres ind-unipotentes) avec la catégorie des couples (G, Fil), où G est un groupe de BT sur G (resp. un groupe de BT à fibres connexes, resp. à fibres und-unipotentes), et où Fil est une filtration de $\mathbb{D}(G)_{S'}$ par un sous-module localement facteur direct, prolongeant la filtration canonique de $\mathbb{D}(G)_S$.

Remarques.

1. Sans hypothèse sur les puissances divisées envisagées ou sur les fibres de G, on a en tous cas un foncteur

$$G' \mapsto (G, \mathrm{Fil}),$$

mais même si G est la somme du groupe constant $\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$ et de son groupe de BT dual ${}_{p^\infty}\boldsymbol{G}_m$, il n'est plus vrai (si les puiss. div. ne sont pas nilpotentes) qu'un prolongement de G soit connu quand on connait le prolongement correspondant d'une filtration. Ceci est lié au fait que le logarithme sur $1 + J$ (J l'idéal d'augmentation) n'est plus nécessairement injectif.

2. Soit toujours S un schéma où p soit localement nilpotent, et soit $S_0 \hookrightarrow S$ le sous-schéma Var (p) défini par l'annulation de p. Alors S est un épaississement à puissances divisées de S, et si $p \neq 2$, il est à puissances divisées (localement) nilpotentes. On peut donc appliquer la théorie de déformations précédentes, pour expliciter les groupes de BT sur S en termes de groupes de BT sur le schéma S_0 de car. p, et du prolongement d'une filtration, à condition, si $p = 2$, de se borner aux groupes de BT à fibres connexes ou ind-unipotentes. *Si* la théorie de Dieudonné du n° 3 fournit une description complète de la catégorie des groupes de BT sur S_0 en termes cristallins (ce qui pour l'instant reste conjectural), on en déduit donc une description de la catégorie des groupes de BT sur S en termes purement « cristallins », avec toutefois le grain de sel habituel pour $p = 2$.

5. Groupes de BT à isogénie près.

La catégorie des groupes de BT « à isogénie près » sur S est par définition la catégorie dont les objects sont les groupes de BT sur S, et ou $\mathrm{Hom}_{\mathrm{isog}}(G, G')$ est défini comme $\mathrm{Hom}(G, G') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Si p est localement nilpotent sur S, on trouve donc un foncteur de la catégorie des groupes de BT sur S à isogénie près, dans celle des cristaux sur S à isogénie près. Lorsque S' est un voisinage infinitésimal de S, l'idéal d'épaississement étant annulé par une puissance de p, on trouve que le foncteur restriction induit une *équivalence* de la catégorie des groupes de BT à isogénie près sur S', avec la catégorie analogue pour S: ainsi, la théorie des déformations infinitésimales à isogénie près est triviale.

Par un passage à la limite facile, on déduit des résultats du paragraphe précédent le résultat qui suit.

Soit A un anneau séparé et complet pour la topologie p-adique, $A_n = A/p^{n+1}A$.

Pour tout groupe de BT G_0 sur $S_0 = \operatorname{Spec}(A_0)$, on définit par passage à la limite sur les $D(G_0)_{A_n}$ un A-module de type fini localement libre $M = \mathbb{D}(G_0)$, et si G_0 est prolongé en G sur A, M est muni d'une filtration par un sous-module facteur direct $M' = \operatorname{Fil} M \subset M$. Localisant par rapport à p, on trouve un A_p-module localement libre M_p, muni d'un facteur direct Fil M_p. On trouve ainsi un foncteur $G_0 \to \mathbb{D}(G_0)_p$ de la catégorie des groupes de BT à isogénie près sur A_0, dans la catégorie des modules localement libres sur A_p, et un foncteur $G \mapsto (G_0, \operatorname{Fil})$ de la catégorie des groupes de BT à isogénie près G sur S, dans la catégorie des couples $(G_0, \operatorname{Fil})$ d'un groupe de BT à isogénie près G_0 sur S_0, et d'un sous-module facteur direct Fil $\mathbb{D}(G_0)_p$. *Ce dernier foncteur est pleinement fidèle.*

Considérons notamment le cas où A est un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel k parfait de car. p, et à corps des fractions K de caractéristique nulle. On trouve qu'un groupe de BT G sur A est connu à isogénie près, quand on connait *a*) le groupe de BT $G_0 = G \otimes_A k$ sur k à isogénie près, ou ce qui revient au même, son espace de Dieudonné $E = D(G_0)_W \otimes_W L$ (ou L est le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt sur k), muni de F_E et V_E, et *b*) la filtration correspondante de $D(G_0)_p = E \otimes_L K$.

Remarques. — Le résultat qui précède soulève de nombreuses questions auxquelles je ne sais répondre:

1. Quelles sont les filtrations sur $E \otimes_L K$ qu'on peut obtenir par un groupe de BT à isogénie près sur A ? Forment-elles un ouvert de Zariski d'une grassmanienne ?

2. Comment peut-on expliciter G, et plus particulièrement sa fibre générique G_K (qu'on peut interpréter comme un vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ sur lequel Gal $(\overline{K}/K)$ opère), en termes du couple $(E, \operatorname{Fil} \subset E \otimes_L K)$, ou E est un L-vectoriel muni de F_E et V_E?

3. Quels sont les modules galoisiens qu'on trouve à l'aide de groupes de BT à isogénie près G sur A? Comment, à l'aide d'un tel module galoisien, peut-on reconstituer plus ou moins algébriquement le couple (E, Fil)? (Cette question se pose à cause du théorème de Tate [5], qui nous dit que G est connu quand on connait le module galoisien associé.)

Enfin, pour traiter la cohomologie cristalline et ses relations avec la cohomologie p-adique, il y a lieu de se poser des questions analogues, où les cristaux de Dieudonné avec filtrations à 2 crans sont remplacés par des cristaux avec un morphisme de Frobenius et des filtrations finies de longueur quelconque (la cohomologie en dimension n donnant lieu à des filtrations à $n + 1$ crans). De plus, il y a lieu de ne pas se restreindre au cas des bases de dimension 1, et de revenir au cas des anneaux A supposés simplement séparés et complets pour la topologie p-adique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Berthelot. — Cohomologie cristalline des schémas, *Notes aux C. R.*, du 18-8-, 1-9 et 8-9-1969.
[2] M. Demazure. — In S. G. A. 3 IV (Springer *Lecture Notes*, No. 151).
[3] P. Jouanolou. — In S. G. A. 5 VI *(Institut des Hautes Études Scientifiques)*.

[4] U. I. MANIN. — Théorie des groupes commutatifs formels sur des corps de car. finie, *Uspechi Mat. Nauk* (en russe), 18 (1963), pp. 3-90.

[5] J. TATE. — *p*-divisible groups in local fields, *Proceedings of a Conference held at Driebergen* (The Netherlands) in 1966, Springer (Berlin), 1967.

[6] Séminaire de J. TATE au Collège de France en 1968 (écrire à TATE, Dep. of Math., 2 Divinity Avenue, Cambridge, Mass., U. S. A).

[7] W. MESSING. — The crystals associated to BARSOTTI-TATE groups, thèse, Princeton (1971).

(Collège de France,
11, Place Marcelin-Berthelot,
Paris 5e
France).