Intorno all'aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativo-decimale per lo studio delle sue analogie coll'aritmetica ordinaria (decimale)

MONOGRAFIA

DI

VITTORIO GRÜNWALD.

INTRODUZIONE

In una precedente mia pubblicazione (*) trattando della divisibilità per $(b+r)$ d'un numero N scritto in base b (intera e positiva), intravidi la possibilità di sistemi numerici a base negativa e quella questione stessa, se non altro dimostrava già esservi qualche relazione fra i sistemi predetti e quelli a base positiva. Nelle presenti pagine mi propongo di studiare tale argomento un po' più addentro, indagando in particolare quale aspetto prenderebbe l'aritmetica nelle sue più importanti ricerche, se fosse fondata su sistemi numerici a base negativa.

Un numero intero N qualunque si può porre sotto la forma seguente:

$$N = c_0 + c_1(-b) + c_2(-b)^2 + c_3(-b)^3 + c_4(-b)^4 + \dots + c_m(-b)^m \qquad (1)$$

in cui tutte le c_r e b rappresentano interi positivi, e se inoltre per tutte le c_r si ha $c_r \leqq (b-1)$, si può brevemente scrivere: $N = c_m\, c_{m-1}\, c_{m-2} \dots c_3\, c_2\, c_1$ e dire: N è scritto in base $(-b)$ colle cifre $c_0, c_1, c_2 \dots$

Esempio: $\quad 7 + 3(-10) + 9(-10)^2 + 5(-10)^3 + (-10)^4 = (15937)_{-10}$. (**).

(*) *Saggio di aritmetica non decimale* pubblicato per le nozze *Pardo-Ravenna*, Verona, 31 gennaio 1884; d'or innanzi sarà brevemente indicato così: *Saggio* ...

(**) Vedi simbolica adottata nell'opuscolo *Saggio*... succitato.

È facile vedere che la (1) rappresenta un numero intero positivo o negativo a seconda che m sarà pari o dispari e quindi:

I.° *Un numero intero scritto in base* (−b) *è positivo o negativo, a seconda che abbia un numero dispari o pari di cifre.*

Per significare poi un numero *radicale* (*) qualunque scritto in base $(-b)$, avremo

$$N=c_{-r}(-b)^{-r}+c_{-r+1}(-b)^{-r+1}+\ldots+c_{-3}(-b)^{-3}+c_{-2}(-b)^{-2}+c_{-1}(-b)^{-1}+$$
$$c_0+c_1(-b)+c_2(-b)^2+\ldots+c_m(-b)^m \qquad (2)$$

o più brevemente:

$$N = c_m\, c_{m-1}\, c_{m-2} \ldots c_2 c_2\, c_1\, c_0\, ,\, c_{-1}\, c_{-2}\, c_{-3} \ldots c_{-r}\, ,$$

in cui le c soddisfano tutte alle condizioni anzidette; le c con indice positivo rappresentano la *parte intera* e quelle con indice negativo la *parte radicale* di N, queste due parti sono separate dalla *virgola radicale*.

II.° *Un numero radicale con parte intera scritta in base* (−b) *è positivo o negativo, a seconda che abbia un numero dispari o pari di cifre nella sua parte intera.*

III.° *Un numero radicale senza parte intera scritto in base* (−b) *è positivo o negativo, a seconda che abbia un numero dispari o pari di zeri radicali a sinistra della 1ª cifra significativa.*

Si osservino le seguenti particolarità contenute negli esempi qui appresso, che facilmente si esprimerebbero quali proprietà dei sistemi numerici a base negativo-decimale, come faremo d'or innanzi in tutte le applicazioni, si ha p. e.

$$13 < 8\,,\ 26 < 23\ ;\ 7{,}6 < 7{,}4\ ;\ 18.5 < 7{,}5\ ;\ 0{,}18 < 0{,}07\ ;\ 1{,}9 < 0{,}2 \text{ ecc. ecc.}$$

Tutto questo si spiega perchè nei sistemi numerici a base negativa:

IV.° *Ogni* b *unità di ordine* m *concorrono a formare l' unità negativa dell'ordine* (m + 1).

Osservazioni. **A**) Le cifre del sistema numerico a base b sono pur quelle del sistema a base $(-b)$ e viceversa. **B**) Un numero N intero qualunque scritto in base $(-b)$ ha tante cifre quante ne avrebbe scritto in base $(+b)$, oppure ne ha una di più, oppure due di più. **C**) Per $N < M \overline{\overline{<}} (b-1)N$, (considerando N ed M interi ed in valore assoluto soltanto) se N si scrive in base $(-b)$ con n cifre, M scritto nella stessa base avrà pure n cifre, oppure $(n+2)$. **D**) Un numero N intero che scritto in base $(+b)$ ha un numero dispari di cifre ed in cui le cifre di posto pari sono zero; si scrive nelle basi $(\pm b)$ nello stesso modo. **E**) Un numero N intero che

(*) Vedi *Saggio*... Cap. V.

scritto in base $(+b)$ ha un numero pari di cifre ed in cui le cifre di posto dispari sono zero, si scrive nelle basi $(\pm b)$ nello stesso modo. F) Da quanto precede risulta: il maggior numero in senso assoluto che in base $(-b)$ si scriva con m cifre è formato dalla successione periodica della massima cifra significativa $b-1$ del sistema collo zero, e quello stesso numero si scrive nello stesso modo anche in base $(+b)$; mentre il minor numero in senso assoluto che in base $(-b)$ si scriva con m cifre è formato dall'unità seguita dalla successione di cifre anzidette.

I.

Osservazioni generali sulle operazioni aritmetiche. (*)

I. Se gli addendi d'una somma si scrivono tutti con un numero dispari di cifre, ciò si verificherà anche per la somma ed analogamente per addendi tutti composti d'un numero pari di cifre ecc; solo in questi casi otteniamo una vera somma aritmetica; che altrimenti riesce una somma algebrica che può anche ridursi sensibilmente e perfino annullarsi.

II. Posto

$$N=c_0+c_1(-b)+c_2(-b)^2+c_3(-b)^3+\ldots+c_{m-3}(-b)^{m-3}+c_{m-2}(-b)^{m-2}+c_{m-1}(-b)^{m-1}+c_m(-b)^m$$

sarà

$$(-N)=(b-c_0)+[b-(c_1-1)](-b)+[b-(c_2-1)](-b)^2+[b-(c_3-1)](-b)^3+\ldots+[b-(c_{m-3}-1)](-b)^{m-3}$$
$$+[b-(c_{m-2}-1)](-b)^{m-2}+[b-(c_{m-1}-1)](-b)^{m-1}+[b-(c_m-1)](-b)^m+(-b)^{m+1},$$

essendo $b>c_r$ per qualunque valore di r. $(+N)$ e $(-N)$ diconsi numeri *eguali-opposti* e si vede che uno di essi ha necessariamente l'unità al 1° posto a sinistra; la loro somma è identicamente nulla. Nello stesso modo si forma pure il valore *uguale-opposto* d'un numero radicale, talchè se, scrivendo p. e. in base negativo-decimale, $N=0{,}49325$ sarà $(-N)=1{,}71895$.

III. La sottrazione non presenta mai il cosiddetto caso impossibile; chè se l'uno dei termini ha un numero pari di cifre, e l'altro ne ha un numero dispari, allora si tratta d'una somma aritmetica; mentre una vera sottrazione aritmetica si verifica soltanto se ambo i termini si compongono di un numero pari o ambidue d'un numero dispari di cifre.

IV. Il prodotto di una moltiplicazione avrà un numero *dispari* di cifre, se

---

(*) Per la ristrettezza dello spazio assegnato al presente lavoro nel Giornale di Matematiche non se ne può inserire quì che un sunto. L'intelligenza del lettore supplirà alla concisione, di cui è stato mestieri fare uso.

ambo i fattori avevano un numero dispari di cifre, o ambidue un numero pari; altrimenti il prodotto riesce con un numero *pari* di cifre; analogamente avviene per il quoziente d'una divisione.

II.

Addizione.

Per agevolare le indagini particolari sulle singole operazioni, esporremo addirittura degli esempi scritti sempre in base negativo-decimale:

I.	II.
0,7865	7865
0,0034	34
1,4355	14355
0,0186	186
0,9876	———
———	0
0,9876	

Osservazioni.

A. Si opera come nell'aritmetica ordinaria per colonne, le decine che si portano, diminuiscono (vedi sottr.) la somma della colonna successiva, la somma dell'ultima colonna si scrive per intero: con una cifra sola, se non è maggiore di 9, altrimenti con tre cifre così diciassette = 197 ecc.

B. Le somme negli esercizi precedenti confermano quanto si è detto in generale nel § precedente alinea I.

C. La somma di più numeri radicali anche contenenti degli interi può essere un numero radicale senza interi.

III.

Sottrazione.

Esempi scritti in base negativo-decimale:

I.	II.	III.	IV.
959405	9,5940	0,759403	0,739405
1239876	7,8932	0,982344	0,977261
———	———	———	———
19721749	3,7028	1,977261	0,982344

Osservazioni.

A) Anche qui si opera come nell'aritmetica ordinaria per colonne; le decine, che si portano, aumentano la differenza nella colonna successiva, onde nell'ultima colonna se si porta 1, quell'unità si scrive a sinistra di questa stessa colonna.

B) Gli esercizi II III IV rappresentano vere sottrazioni aritmetiche; l'altro si riduce invece ad una somma aritmetica (vedi § precedente, alinea III), per cui la differenza può avere più cifre che ciascuno dei termini. (Es. I).

C) La differenza di numeri radicali senza parte intera può essere un numero radicale con parte intera. (Es. III).

IV.

Moltiplicazione.

È facile desumere teoricamente in generale e lo vedremo confermato anche negli esempi numerici particolari che qui seguono, che chiamando m ed n rispettivamente il numero delle cifre componenti i due fattori interi, il prodotto si comporrà di $(m+n\pm1)$ o di $(m+n-3)$ cifre, i quali risultati collimano perfettamente anche colla regola dei segni; mentre nell' aritmetica dei sistemi numerici a base positiva il prodotto avrebbe come è noto $m+n)$ o $(m+n-1)$ cifre. Se si tratta di fattori radicali; chiamando risp. m ed n, il numero delle cifre componenti le loro parti intere, e μ e ν quello delle loro parti radicali; il loro prodotto avrà nella parte intera tante cifre quante sono indicate dalle formole precedenti e nella parte radicale $(\mu+\nu)$ cifre, come nell'aritmetica ordinaria.

Ulteriori osservazioni si presenteranno opportunamente, dopo aver esposto i seguenti *esempi scritti in base negativo-decimale.*

I	II	III	IV
1,81	0,345	19	9870,003
1,73	0,73	15	20,9107
143	815	15	158290181
267	19955	19	9870003
$\dot{1}81$	1,98365	5	135630187
0,0713			197540006
			1988855,5877481

Osservazioni:

A. Si opera in complesso come nell'aritm. ordinaria ricordando ripetutamente quanto fu detto intorno all'addizione (vedi osser. alinea A).

B. Sia per fattori interi che per fattori radicali, il numero delle cifre del prodotto negli esempi qui sopra corrisponde alle formole suesposte.

C. Fattori contenenti ambidue una parte intera, possono fornire un prodotto senza parte intera (Es. I°) e viceversa fattori senza parte intera, possono fornire un prodotto con parte intera (Es. II°).

V.

Divisione.

Per analogia a quanto ci risultò nella moltiplicazione potremo concludere, che chiamando risp. m ed n il numero delle cifre di dividendo e divisore (ambidue interi), il quoziente approssimato a meno di 1 unità si comporrà di $(m-n+3)$ cifre; nell'aritm. ordinaria invece il quoziente avrebbe $(m-n)$ o $(m-n+1)$ cifre. Anche queste formole sono in perfetto accordo colla regola dei segni per la divisione.

Però precisamente in base alla regola dei segni, bisogna avere qui delle avvertenze speciali nell'incominciare l'operazione, appunto per non incorrere in un errore di segni. Bisogna adunque prendere alla sinistra del dividendo una parte in valore assoluto non minore del divisore, nè maggiore di $(b-1)$ volte il divisore, chiamando con b il valore assoluto della base del sistema numerico adottato. Essendo n il numero delle cifre componenti il divisore, il 1.° dividendo parziale ne avrà $(n \pm 1)$, n, oppure $(n+2)$; (Vedi osser. C dell'introduzione) ed a seconda che il 1° quoziente parziale dovrà riuscire positivo o negativo si comporrà di 1 o 2 cifre; in seguito però si ottengono le cifre del quoziente ad una ad una; epperciò i successivi dividendi parziali dovranno esser tutti del segno del divisore, e quindi di segno contrario dei singoli rispettivi resti parziali a meno che la corrispondente cifra nel quoziente non sia zero. Onde i resti parziali dovranno soddisfare ad una duplice condizione, cioè esser sempre di segno contrario del divisore e per valore assoluto sempre minori del medesimo: ove questi requisiti non si verificassero, la successiva cifra nel quoziente risulterebbe nel 1° caso troppo piccola, nel 2° troppo grande. Del resto quest'operazione si eseguisce anche nell'aritmetica dei sistemi numerici a base negativa come nell'aritmetica ordinaria, il che si vedrà confermato negli esempi seguenti, i quali proveranno pure quanto si disse più sopra.

Esercizi in base negativo-decimale.

I.	II.	III.
23650 : 78 = 1897	0,0724 : 1,81 = 1.73	1,98365 : 0,345 = 0,73
78	181	19955
—	—	—
1656	262	815
1504	267	815
—	—	—
1525	154	0
1562	143	
—	—	
1630	11	
1646		
—		
4		

Osservazioni.

I. Nel caso in cui, come si é fatto negli esempi I e II, il 1° quoziente parziale si compone di 2 cifre, le moltiplicazioni e sottrazioni ausiliarie possono eseguirsi per ciascuna delle 2 cifre separatamente.

II. Vediamo confermato quanto fu di sopra asserito intorno al numero delle cifre del quoziente, alla natura dei resti, ecc.

III. Finalmente notiamo che contrariamente a quanto si verifica nell' aritmetica ordinaria (Es. II e III) :

a) un dividendo senza parte intera con un divisore con parte intera può dare un quoziente con parte intera.

b) Un dividendo con parte intera con un divisore senza parte intera può dare un quoziente senza parte intera.

VI.

Moltiplicazioni e Divisioni da effettuarsi con metodi spediti in alcuni casi particolari.

Riferendoci a quanto si disse su tale argomento nel *Saggio*... ed ai lemmi che egualmente qui si potrebbero proporre, deduciamo senz' altro le seguenti regole particolari, trattandosi di numeri scritti in sistemi numerici a base negativa.

Regola I. Per moltiplicare un numero scritto in base $(-b)$ rispettivamente per $(-b)$, $(-b)^2$, ... $(-b)^m$ basta trasportarne la virgola radicale rispettivamente di 1, 2, ... m posti verso destra.

II. Per moltiplicare un numero scritto in base $(-b)$ rispettivamente per $b, -b^2, \ldots (-1)^{m-1} (-b)^m$ basta costruirne il valore uguale-opposto e trasportarne la virgola radicale rispettivamente di 1, 2... m posti verso destra.

III. Per dividere un numero scritto in base $(-b)$ rispettivamente per $(-b)$, $(-b)^2$, $(-b)^3$,... $(-b)^m$ basta trasportarne la virgola radicale rispettivamente di 1, 2. 3, ... m posti verso sinistra.

IV. Per dividere un numero in base $(-b)$ rispettivamente per $b, -b^2, b^3, \ldots (-1)^{m-1} (-b)^m$ basta costruirne il valore uguale-opposto e trasportarne la virgola radicale rispettivamente di 1, 2, ... m posti verso sinistra.

Esempi in base negativo-decimale.

$$\left.\begin{array}{r} 78{,}35 \times 10000 \ = 783500 \\ 78{,}35 \times 190000 = 1438500 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{r} 783500 : 10000 \ = 78{,}35 \\ 1438500 : 190000 = 78{,}35 \end{array}\right\}.$$

V. Per moltiplicare un numero scritto in base $(-b)$ per F^m, basta moltiplicarlo per $(-b)^m$, vedi Regola I, e dividere il prodotto ottenuto per f^m, essendo $(-b) = F.f.$

VI. Per dividere un numero scritto in base $(-b)$ per F^m basta dividerlo per $(-b)^m$, vedi Regola III, e moltiplicare il quoziente ottenuto per f^m, essendo come prima $(-b) = F.f.$ Queste ultime due regole sono di convenienza, qualora $(F-f)$ sia un numero grande e positivo; che se il numero operatore (moltiplicatore o divisore) fosse $-F^m$ basterebbe costrurre il valore uguale-opposto del risultato superiormente ottenuto.

Esempi in base negativo decimale.

$$\left.\begin{array}{l} 9{,}576 \times 285 = 9576 : 12 = 19131{,}5 \\ 9{,}576 \ : \ 785 = 0{,}0009576 \times 24 = 0{,}1943184 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{r} 19131{,}5 : 285 = 19{,}1315 \times 12 = 9{,}576 \\ 0{,}1943184 \times 785 = 194{,}3184 : 24 = 9{,}576 \end{array}\right\}.$$

VII. *a*) Per moltiplicare un numero N scritto in base $(-b)$, per l' espressione $(b^{2n} - r)$, basta trasportarne la virgola radicale di $2n$ posti verso destra, e dal risultato levare il prodotto $r.N$.

b) Per moltiplicare un numero N scritto in base $(-b)$, per l'espressione $(b^{2n+1} + r)$ basta trasportarne la virgola radicale di $(2n+1)$ posti verso destra, ed al risultato aggiungere il prodotto $r.N$ (*).

(*) Veggasi ancora la divisione per $(b+1)$, nei criterii di divisibilità, Capitolo IX, A.

Esempi in base negativo-decimale.

I. $9{,}576\times116 = \left\{\begin{array}{r} 9576 \\ 175864 \\ \hline 983956 \end{array}\right\} = 983{,}956$ essendo $116 = (-10)^2 - 4$;

Verifica. $\left\{\begin{array}{r} 9576 \\ 9576 \\ 152796 \\ \hline 983956 \end{array}\right\} = 983{,}956.$

II. $9{,}576\times10017 = \left\{\begin{array}{l} 9576 \\ \quad\;\; 186308 \\ \hline 95795712 \end{array}\right\} = 95795{,}712$ essendo $10017 = (-10)^4 - 3$;

Verifica $\left\{\begin{array}{l} 9576 \\ \quad 9576 \\ \quad 140152 \\ \hline 95795712 \end{array}\right\} = 95795{,}712.$

III. $9{,}576\times100005 = \left\{\begin{array}{l} 9576 \\ \qquad 163220 \\ \hline 957763220 \end{array}\right\} = 957763{,}220.$

IV. $9{,}576\times10000006 = \left\{\begin{array}{l} 9576 \\ \qquad\quad 152\,796 \\ \hline 95760152{,}796 \end{array}\right\} = 95760152{,}796.$

VII.

Osservazioni generali sull' innalzamento a potenza ed in particolare alla potenza 2ª e 3ª dei numeri scritti in base $(-b)$

I. Se la parte intera di un numero radicale si compone d'un numero *dispari* di cifre, ciò si verifica pure per una sua potenza di grado *qualunque*.

II. La parte intera della potenza *di grado pari* d' un numero radicale qualunque si compone sempre d'un numero *dispari* di cifre.

III. Se la parte intera di un numero radicale si compone d'un numero *pari* di cifre la parte intera d'una sua potenza di grado n si comporrà pure d'un numero pari di cifre o *no* a seconda che n sarà dispari o pari.

IV. Se un numero ha m cifre radicali, la sua potenza n^{esima} ne avrà mn.

V. Se un numero intero finisce per m zeri, la sua potenza n^{esima} finirà con $m.n.$ zeri.

VI. Il quadrato d'un numero intero termina colla medesima cifra c_0 tanto scritto in base $(-b)$ come scritto in base $(+b)$; affinchè un numero scritto in base $(-b)$ sia quadrato d'un altro numero, è necessario che termini per una di queste cifre c_0 per cui terminano i quadrati dei numeri scritti in base $(+b)$, altrimenti è necessariamente non-quadrato.

VII. Analogamente: La potenza di grado m qualunque d'un numero intero, termina colla medesima cifra c_0 tanto scritto in base $(-b)$ quanto in base $(+b)$ (*).

VIII. Le potenze del medesimo grado dispari di due numeri interi uguali-opposti scritti in base $(-b)$ terminano per cifre complementari cioè per c_0 l'una e per $(b-c_0)$ l'altra, onde p. e. nelle basi (± 9) i cubi terminano necessariamente per 0,1 od 8 ecc.

IX. Le potenze del medesimo grado pari di due numeri uguali-opposti si scrivono nell'identico modo nella medesima base, poichè è sempre $(+a)^{2m}=(-a)^{2m}$.

X. Se invece di numeri interi si tratta di numeri radicali, quello che più sopra è detto della cifra c_0 vale in questo caso invece per la cifra c_{-r} (vedi introduzione).

A. *Innalzamento a quadrato dei numeri interi o radicali scritti in base* $(-b)$.

Per riguardo al numero delle cifre della parte intera e radicale del risultato basta riferirsi a quanto è detto in proposito nel Capitolo IV. È di speciale interesse soltanto l'innalzamento diretto a quadrato di 2 numeri uguali-opposti, perchè dovendo dare risultati identici offrono così un prezioso elemento di controllo per l'esattezza del calcolo, anche senza ricorrere alla diretta moltiplicazione.

(*) Veggasi le tavole a pag. 39 e 40 del « *Saggio* ... » e le osservazioni relative.

Vediamone un esempio scritto, al solito, in base negativo-decimale.

$$N=(23,9107)^2=\left|\begin{array}{r} 4 \\ 1929 \\ 1714 \\ 121 \\ 458 \\ 100 \\ 1850540 \\ 169 \\ \hline 48003315569 \end{array}\right|=480,03315569\,;\;(-N)^2=(198,2913)^2=480,03315569.$$

omessa l'operazione diretta per brevità.

Osservazioni.

I. I termini quadrati si compongono tutti di un numero dispari di cifre e così è pure dispari il numero complessivo delle cifre del quadrato e della sua parte intera; è sempre pari il numero delle cifre della parte radicale.

II. I termini rappresentanti doppio-prodotto riescono alternativamente composti il 1° d'un numero dispari di cifre, il secondo d'un numero pari e così via. Tutto questo altro non è che una continua conferma della regola dei segni e s'intende del resto molto facilmente da se.

III. Se $(\pm N)$ ha n cifre complessivamente, le unità semplici nel 1° termine dello sviluppo di $(\pm N)^2$ saranno seguite da $(2n-2)$ cifre complessivamente, come nell'aritmetica ordinaria.

IV. Nell'aritmetica ordinaria $(\pm N)^2$ avrebbe o $2n$ o $2n-1$ cifre complessivamente. Scrivendo invece in base $(-b)$, $(\pm N)^2$ ne potrà avere $(2n\pm1)$ o $(2n-3)$: dunque di più o di meno ma non mai $2n$ (vedi anche I). Se si compone di $(2n+1)$ cifre, la 1ª cifra a sinistra è l'*unità*.

V. $(\pm N)$ con parte intera può dare $(\pm N)^2$ senza parte intera e viceversa $(\pm N)$ senza parte intera (Vedi Cap. IV osservazione C) può dare $(\pm N)^2$ con parte intera.

B) *Innalzamento a cubo dei numeri interi o radicali scritti in base* $(-b)$.

La reiterata applicazione delle norme stabilite nel Cap. IV c'illumina tosto intorno al numero delle cifre della parte intera e radicale del cubo risultante. Anche quì l'innalzamento diretto a cubo di due numeri uguali-opposti fornisce un controllo ragguardevole dell'esattezza dei calcoli, dappoichè i due risultati devono pure essere numeri uguali-opposti.

Facciamo *simile operazione sopra un numero scritto in base negativo deci-*

male

$$N^3 = (23,9107)^3 = \left\{ \begin{array}{l} 8 \\ 176 \\ 154 \\ 187 \\ 13803 \\ 5949 \\ 889 \\ 1904283 \\ 6771000 \\ 14882906100 \\ 3431970 \\ 463 \\ \hline 6335,140195928163 \end{array} \right\} = 6335,140195928163$$

e ripetendo la diretta operazione sopra il numero $(-N)$ si otterrebbe

$$(-N)^3 = 15885,060026292057$$

ed essendo

$$(+N)^3 = 6335,140195928163$$

si avrà

$$(+N)^3 + (-N)^3 = N^3 - N^3 = 0.$$

Osservazioni:

I. I termini cubici si compongono tutti d'un numero dispari di cifre, e così e pure dispari il numero delle cifre dei termini della forma $3\alpha^2\beta$, essendo $\beta \leqq 9$ (numero d'una cifra sola), e nel cubo risultante $(\pm N)^3$ è pari o dispari il numero delle cifre della parte intera a seconda che era rispettivamente pari o dispari nella parte intera della radice $(\pm N)$ ed analogamente la parte radicale di $(\pm N)^3$ si compone d'un numero pari o dispari di cifre a seconda che è rispettivamente pari o dispari il numero delle cifre radicali di $(\pm N)$.

II. I termini rappresentanti la forma $3\alpha\beta^2$ (valendo per β quanto sopra) sono alternativamente composti il 1° d'un numero dispari di cifre, il secondo d'un numero pari ecc. ecc.

Anche qui tutto questo non è che una continua conferma della regola dei segni e che si sarebbe del resto molto facilmente preveduto senz'altro.

III. Se $(\pm N)$ ha n cifre complessivamente, le unità semplici del 1° termine dello sviluppo di $(\pm N)^3$ saranno seguite da $(3n-3)$ cifre complessivamente, come nell'aritmetica ordinaria.

IV. Nell'aritmetica ordinaria $(\pm N)^3$ avrebbe $3n$, $(3n-1)$ o $(3n-2)$ cifre complessivamente. Scrivendo invece in base $(-b)$, $(\pm N)^3$ nè potrà avere $3n$, $(3n-2)$, $(3n-4)$, $(3n-6)$: dunque di meno, ma al massimo $3n$ come nell'aritmetica ordinaria.

V. $(\pm N)$ con parte intera può dare $(\pm N)^3$ *senza* parte intera, ma *non mai* viceversa.

VIII.

Osservazioni generali sull'Estrazione di radice, ed in particolare sulle radici 2ª e 3ª dei numeri scritti in base $(-b)$.

I. Se la parte intera del radicando N si compone d'un numero *dispari* di cifre, esisterà sempre per lo meno *una sua radice reale di grado qualunque*, e la sua parte intera si comporrà pur sempre d'un numero *dispari* di cifre.

Inoltre ogni radice di grado pari qualunque di N, ammette necessariamente due valori reali uguali-opposti direttamente calcolabili.

II. Se la parte intera di N si compone d'un numero *pari* di cifre, ne saranno reali solo le radici di grado *dispari*, ciascuna delle quali ha necessariamente *un* valore reale la cui parte intera avrà pur sempre un numero *pari* di cifre. Le radici di grado *pari* di N sono invece immaginarie.

III. Le radici del medesimo grado *pari* di due numeri uguali-opposti sono naturalmente l'una reale e l'altra immaginaria.

IV. Le radici del medesimo grado dispari di due numeri uguali-opposti sono naturalmente entrambe reali e rispettivamente uguali-opposti.

V. Essendo n l'indice di radice, se il radicando N ha mn cifre radicali, col loro mezzo si possono sempre come nell' aritmetica ordinaria direttamente calcolare m cifre radicali della radice e talvolta, come vedremo in seguito anche $(m+1)$.

VI. Nella decomposizione di N in gruppi, come nell'aritmetica ordinaria per ottenere le successive cifre della radice di grado n, il 1° gruppo a sinistra di N (scritto in base neg.) *può* riescir deficiente, se n è dispari, ma *deve* riescir deficiente (e precisamente composto di un numero dispari di cifre) per n pari. Se N non contiene parte intera ed n è pari, la virgola dovrà essere seguita da un numero dispari di zeri radicali, altrimenti la radice è immaginaria.

VII Non può esistere radice esatta d' un numero N, qualora non termini per quella cifra c_0 ossia c_{-r} di cui agli alinea VI e segg. nelle osservazioni generali del § precedente.

A. *Estrazione di radice quadrata dai numeri interi e radicali scritti in base* $(-b)$.

Interessa specialmente il calcolo diretto delle due radici uguali-opposte d'un radicando positivo proposto, perchè tale procedimento ci fornisce un controllo scambievole dell' esattezza delle 2 operazioni, astrazion fatta dall'innalzamento a quadrato per riprodurre il radicando.

Come al solito offriamo un esempio scritto in base negativo-decimale.

I.	II.
Calcolo della radice positiva	*Calcolo della radice negativa*
$\sqrt{480,0331} = 198,29$	$\sqrt{480,0331} = 23,91$
$19^2 = 1$ Sempre approssimato per difetto	$^2 = 4$ o esatto o approssimato per eccesso
380 : 188 × 8	080 : 43 × 3
384	1929
160,3 : 1762 × 2	17103 : 469 × 9
132 4	17261
4998,1 : 17649 × 9	423,1 : 4581 × 1
4828 1	4581
1850	1850

Osservazioni.

I. Come già fu accennato nell' introduzione a questo capitolo il 1° gruppo a sinistra del radicando deve essere difettivo (composto d'una sola cifra), affinchè la radice sia reale.

II. A seconda che si consideri il detto 1° gruppo come quadrato d'un numero positivo o negativo si ottiene poi col seguito dell'operazione direttamente l' uno o l'altro dei due valori uguali-opposti della radice.

III. Considerando il 1° gruppo come quadrato di un numero negativo calcoleremo la sua radice sempre per difetto, purchè quel 1° gruppo non rappresenti l'unità positiva, nel qual caso bisogna ricorrere al complesso dei due primi gruppi, che per la valutazione della radice sarà considerato come il quadrato d'un numero positivo che noi determineremo ancora per difetto; se quel complesso fosse un quadrato esatto, ne daremo la radice esatta.

IV. Considerando poi il primo gruppo come quadrato di un numero positivo ne calcoleremo la radice sempre per eccesso, purchè quel primo gruppo non sia un quadrato perfetto, nel qual caso, ne piglieremo la radice esatta.

V. I residui *finali* nelle due radici uguali-opposte sono sempre uguali ed i residui parziali devono non superare il doppio della radice rispettivamente sin alora trovata e soddisfare inoltre naturalmente alle norme relative ai resti parziali nelle divisioni (Vedi Capitolo V).

VI. Il numero delle cifre significative direttamente ottenute nella radice, può essere minore ed anche maggiore del numero dei gruppi di cifre significative del radicando; il primo caso si verifica, allorquando per ottenere la prima cifra della radice si deve ricorrere al complesso dei primi 2 gruppi significativi del radicando, perchè il primo gruppo darebbe per difetto la radice nulla.

VII. Il radicando senza interi può fornire una radice con parte intera e viceversa.

B. *Estrazione di radice cubica da numeri interi o radicali scritti in base* $(-b)$.

Qui interessa in modo speciale l' estrazione diretta da due radicandi uguali-opposti che devono appunto fornirci risultati uguali-opposti; a titolo di controllo eseguiremo anche qui adunque come nel caso precedente ambedue le operazioni con procedimento diretto.

S'abbia adunque un radicando scritto al solito in base negativo decimale.

I.

$\sqrt[3]{6335140195} = 2391$
8
18335 : 192
176
154
187
1226140 : 947
13803
5949
889
1918811,95 : 1904283
1904283
677
1′
1488124

II.

$\sqrt[3]{15885060025} = 19829$
19
16885 : 3
184
1808
692
19130,60 : 19032
18064
396
8
1267120,25 : 1905132
1265548
164866
889
732096

Osservazioni.

I. Dei gruppi ternari del radicando, il primo a sinistra può essere completo o incompleto.

II. La parte intera del radicando e della radice contengono o tutte due un numero dispari di cifre, o tutte due un numero pari di cifre.

III. Radicandi uguali-opposti danno radici cubiche uguali-opposte e resti final pure uguali-opposti.

IV. Se il 2° gruppo a sinistra del radicando si compone di due cifre, esso dà luogo alle due prime cifre della radice che viene calcolata per difetto; negli altri casi si calcola invece per eccesso la radice del 1° gruppo, il quale se è $> (b-1)^3$, fornirà le tre prime cifre addirittura della radice, che in base negativo-decimale si presenterà p. e. sotto la forma 190. Solo se il 1° gruppo è un cubo perfetto, se ne piglia la radice esatta.

V. Nulla cambia per rispetto alla continuazione del calcolo, che si effettua quindi come nell'aritmetica ordinaria. Merita soltanto speciale osservazione, che i singoli divisori essendo della forma $3a^2$, essi si compongono tutti d'un numero dispari di cifre e sarà quindi pari il numero delle cifre componenti i singoli resti parziali. Solo il resto corrispondente alla cifra 0 nella radice potrà risultare composto d'un numero dispari di cifre, chè altrimenti quel resto sarebbe indizio che l'ultima cifra trovata fu troppo piccola; se poi il resto riescisse numericamente maggiore di $3\rho^2 + 3\rho = 3\rho(\rho+1)$, ciò significherebbe essere troppo grande l'ultima cifra trovata nella radice, chiamata simbolicamente ρ.

VI. Il numero complessivo delle cifre della radice non è mai minore del numero dei gruppi del radicando, può invece essergli uguale e maggiore di 1 o 2 unità.

VII. Il radicando senza parte intera può dar luogo a radice cubica con parte intera; ma un radicando con parte intera dà sempre una radice con parte intera.

IX.

Criteri di divisibilità per numeri scritti in base negativa.

A. *Criteri generali di divisibilità per numeri scritti in base negativa qualunque.*

Riferendomi a quanto ne ò detto in proposito nel Capitolo corrispondente (I) del mio *Saggio* . . . dirò qui che si conservano tali e quali i criteri di divisibilità per $(-b), (-b)^2, (-b)^3, \ldots (-b)^r$, $f, f^2, f^3, \ldots f^r$, essendo f un sottomultiplo qualunque di b. Il criterio di divisibilità d'un numero N_{-b} per $(b-1)$ è uguale a quello di N_b per $(b+1)$, e viceversa.

Il criterio di divisibilità di un numero N_{-b} per $(b-r)$ è eguale a quello di N_b per $(b+r)$, e viceversa.

ossia: N_{-b} ed N_r divisi per $(b+r)$ danno resti uguali e così pure N_{-b} ed N_{-r} divisi per $(b-r)$ dànno resti uguali, e finalmente: N_{-b} è divisibile per n, se la somma $\sum_{0}^{m} (-1)^p\, c_p\, r_p$ è divisibile per n; in generale: quella somma ed N_{-b} divisi per n dànno resti uguali.

B. *Criteri speciali di divisibilità per numeri scritti in base negativo-decimale.*

In conseguenza delle osservazioni fatte quì sopra, otterremo ancora le seguenti speciali.

I. Si conservano intatti come nell'aritmetica ordinaria i criteri di divisibilità, per la base, una sua potenza qualsiasi; un suo sottomultiplo in prima od altra potenza qualunque.

II. Il criterio della divisibilità per 9 nell'aritmetica ordinaria è quello per undici nell'aritmetica a base negativa decimale e viceversa.

III. Un numero N scritto in base negativo-decimale è divisibile per 7 o per tredici, se diviso in gruppi ternari, la loro somma riesce risp. divisibile per 7 o per tredici.

IV. Un numero N scritto in base negativo-decimale è divisibile per trentasette, se diviso in gruppi ternari, la somma dei gruppi di posto dispari diminuita della somma degli altri gruppi dia una differenza divisibile per trentasette.

V. La divisibilità per quarantuno differisce da quella per trentasette, solo inquantochè nella prima si richiede la formazione di gruppi quinarii.

Applicazione dei criterii di divisibilità.

I. Dividendo per $(b+1)$ un numero scritto in base $(-b)$ la divisione si può ridurre ad una sottrazione, in conseguenza si può fare altrettanto dividendo per undici un numero scritto in base negativo-decimale.

Esempio: 7869572 : 191 = 649128 si può ottenere collo schema seguente: $\left\{\begin{array}{l} 649728\,\boxed{0} \\ 786957\;2 \end{array}\right\}$

Questo stesso procedimento vale ancora per un numero radicale e con una piccolissima modificazione nel dividendo (previa sottrazione del resto della divisione) anche per dividendi non multipli di undici (Vedi *Saggio* pag. 6 Nota).

II. Sia N un numero qualunque scritto in base $(-b)$; ed R quel numero che da N si ottiene disponendo le sue cifre in un ordine qualsivoglia, sarà sempre $N-R=M(b+1)$ (Vedi *Saggio* pag. 6).

III. Alla prova per 9 delle operazioni dell'aritmetica ordinaria ed a quella per $(b-1)$ per quella dei sistemi a base positiva b qualunque, corrisponde in tutto e per tutto rispettivamente la prova per undici nell' aritmetica del sistema numerico a base negativo-decimale, come in generale la prova per $(b+1)$ nell'aritmetica dei sistemi numerici a base negativa $(-b)$ qualunque.

Per la ristrettezza dello spazio dovettero essere omessi qui maggiori dettagli intorno a tali argomenti che non sono certo privi d'interesse e così pure le osservazioni intorno ai numeri primi, ai divisori semplici e composti dei numeri, al numero dei divisori ecc. ecc.

X.

Trasformazione delle frazioni ordinarie in radicali e viceversa.

A. *Problema diretto.*

Data la frazione $F=\frac{N}{D}$, avremo risolto il problema, se le possiamo dare la forma $F=\frac{N_1}{(-b)^m}$ ed arriveremo a questa ponendo $F=\frac{N\times(-b)^m:D}{(-b)^m}$, purchè sia $N\times(-b)^m:D=N_1=$ numero intero; supponendo adunque D primo con N, la soluzione del problema dipenderà dalla divisibilità o meno di $(-b)^m$ per D. Nel 1° caso esiste una frazione radicale finita equivalente alla frazione ordinaria proposta; nel 2° caso invece si genera una frazione radicale infinita, la quale, con perfetta analogia a quanto avviene per le frazioni decimali nell'aritmetica ordinaria, sarà o periodica semplice o periodica mista, a seconda che D sia primo o non primo con b. Trattandosi di una ripetizione dei ragionamenti analoghi fatti nel *Saggio* ... veggasi ivi per maggiori ragguagli su tale argomento il Capo III pag. 22 e seg.

B. *Problema inverso.*

Data una frazione radicale, se è finita, il problema è tosto risolto, scrivendola sotto forma di frazione ordinaria e se si vuole, riducendola ancora ai minimi termini. Se poi è infinita, distinguiamo:

I. Se è periodica semplice col periodo π composto di n cifre, la frazione ordinaria generatrice della medesima sarà $F=\frac{\pi}{(-b)^n-1}$.

II. Se è periodica mista col periodo π composto di n cifre, e l'antiperiodo Q di m cifre, la sua generatrice sarà. $F=\frac{[Q(-b)^n+\pi]-Q}{[(-b)^n-1](-b)^m}$.

Le ultime due formole facilmente si tradurrebbero in regole, che suonerebbero come quelle corrispondenti per le frazioni decimali periodiche, di cui la dimostrazione fu pure ripetuta nel *Saggio* a pag. 22 e seg.

XI.

Passaggio da un sistema numerico ad un altro.

Questo passaggio può avvenire tra due sistemi entrambi a basi positive, oppure l'uno a base negativa e l'altro a base positiva distinguendo ancora se le 2 basi sieno uguali-opposte od anche numericamente diverse.

Date però le norme per effettuare il passaggio anzidetto pel 1° caso (per basi entrambe positive, studiato per esteso nel *Saggio*. Cap. VIII a pag. 36-37, facilmente s'intuisce e di leggeri si verifica che le identiche norme con insignificanti modificazioni, che pure senz'altro s'intendono, valgono per tutti gli altri passaggi possibili.

Esempii.

I.

Dico : $(7835)_9 = (15823)_{-10}$

Infatti: Scrivendo in base 9 positivo si ha:

$$+7835 : -11 = -712 + \frac{3}{-11} \quad (3$$

$$-712 : -11 = +64 + \frac{2}{-11} \quad (2$$

$$+64 : -11 = -5 + \frac{8}{-11} \quad (8$$

$$-5 : -11 = +1 + \frac{5}{-11} \quad (5$$

$$1 : -11 = 0 + \frac{1}{-11} \quad (1$$

II.

Dico $(15823)_{-10} = (7835)_9$

Infatti: scrivendo in base 9 positivo si ha

$$\begin{array}{r} 15823 \\ \hline \times(-11)-5 \\ \hline +61 \\ \hline -712 \\ \hline +7835_9 \end{array}$$

Per maggiori ragguagli e pei ragionamenti analoghi si manda il lettore alle pag. 35–37 succitate del *Saggio*.

Per la ricerca della base ancorchè negativa di quel sistema numerico in cui N fosse scritto in un modo prestabilito si opera come trattandosi di basi positive. È poi interessante notare e facile dimostrare il fatto che:

I. Un numero N non può essere scritto nel medesimo modo in due o più basi numericamente diverse di segno eguale purchè N non sia minore della minore delle basi considerate.

II. Un numero N *può* essere scritto nel medesimo modo in due basi uguali opposte oppure in due basi numeriche diverse e di segno diverso. Se N non è minore della minore delle basi considerate, esso non potrà essere scritto in un terzo sistema come fu scritto in altri due; e precisamente:
se N è pos., esso si scrive nelle basi $(\pm b)$ nella medesima maniera, purchè sia $c_1=c_3=c_5=\ldots=c_{2m-1}=0$, essendo $(2m+1)$ il numero delle cifre di N.
se N è neg., esso si scrive nelle basi $(\pm b)$ nella medesima maniera, purchè sia $c_0=c_2=c_4=\ldots=c_{2m-2}=0$, essendo $(2m)$ il numero delle cifre di N.

Verona, 24 Aprile 1884.