Proceedings of the International Congress of Mathematicians
Berkeley, California, USA, 1986

Enseignement Mathematique, Ordinateurs et Calculettes

JEAN-PIERRE KAHANE

Cet exposé s'inspire de l'étude de la C.I.E.M.[1] sur l'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques et leur enseignement. Il contient également des appréciations personnelles de ma part sur les calculettes et l'enseignement.

L'étude de la C.I.E.M. En 1983 la C.I.E.M. a décidé de mettre à l'étude des questions d'intérêt mondial, sur lesquelles une approche internationale pouvait apporter d'utiles mises au point. Le but, dans chaque cas, n'est pas de fournir des solutions garanties—C.I.E.M.; c'est de faire l'état de la question, en vue de permettre la poursuite de la réflexion et, lorsque c'est possible, des initiatives au plan régional, national ou institutionnel.

C'est dans ce cadre que s'est déroulée la première étude, en 1984 et 1985. Le comité de programme[2] a établi entre janvier et mars 1984 un document de discussion—rédigé d'abord en français puis en anglais, puis traduit en plusieurs langues—publié dans sa version anglaise par la revue *L'Enseignement Mathématique* [I1], distribué aux représentants nationaux, et appelant à des contributions à la discussion. Le document indiquait trois grands thèmes: l'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques en tant que science (leur développement, leurs concepts, leurs valeurs); les changements que les ordinateurs et l'informatique peuvent induire dans le contenu des programmes d'enseignement; l'aide qu'ils peuvent apporter dans l'enseignement lui-même.

[1] Il est bon de rappeler ce qu'est la C.I.E.M.—commission internationale de l'enseignement mathématique, alias I.C.M.I, International Commission on Mathematical Instruction. Créée par Félix Klein en 1907, c'est une commission de l'U.M.I. (Union Mathématique Internationale) dont le statut actuel a été établi sous la présidence d'Hassler Whitney, en 1980. Elle est constituée par un comité exécutif, élu par l'assemblée générale de l'U.M.I., et par des représentants nationaux—un par pays, désigné selon des formules différentes selon que le pays est membre ou non de l'U.M.I.

[2] Constitué de R. F. Churchhouse (Cardiff), B. Cornu (Grenoble), A. E. Eršov (Novosibirsk), A. G. Howson (Southampton), J. P. Kahane (Orsay), J. H. Van Lint (Eindhoven), F. Pluvinage (Strasbourg), A. Ralston (Buffalo), M. Yamaguti (Kyoto).

Pour mieux centrer la discussion, on se bornait à considérer le niveau universitaire et préuniversitaire (c'est-à-dire les élèves de plus de 16 ans).

Les contributions écrites ont été nombreuses (une cinquantaine), variées, et intéressantes. Le comité de programme a alors organisé une rencontre d'une semaine, à Strasbourg, fin mars 1985, pour discuter à la fois du document de base et des contributions. Dès la fin de la rencontre, le travail était bien préparé pour l'édition des documents finaux: les *Proceedings* (environ 160 pages) édités par Cambridge University Press [**I2**], et les *Supporting Papers* (équivalent à plus de 600 pages dactylographiées) éditées par l'I.R.E.M. de Strasbourg [**I3**].

Sur le déroulement du colloque et sur les résultats de l'étude, un excellent article est paru dans *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* [**I4**]. A côté d'appréciations flatteuses, je retiens une critique: malgré la publication dans *l'Enseignement Mathématique* et d'autres journaux, le document de discussion n'a atteint qu'une faible partie des collègues intéressés. Le présent congrès est l'occasion d'assurer une meilleur publicité aux travaux de la C.I.E.M.

Après le colloque de Strasbourg, la reflexion s'est poursuivie: un colloque de l'I.C.O.M.I.D.C. (International Committee on Mathematics in Developing Countries) à Monastir (Tunisie) en février 1986, sur l'informatique et l'enseignement des mathématiques avec 40 contributions très variées [**I-I**], et une rencontre internationale à Luminy (France) en janvier 1986, à l'invitation de la sous-commission française de la C.I.E.M., qui a abouti en particulier à la constitution d'une banque de logiciels d'enseignement mathématique au niveau universitaire [**I-F**].

A partir de maintenant, mon exposé s'inspirera librement de cet ensemble de travaux, sans chercher à en rendre compte.

L'informatique et la mathématique. L'informatique est partout. L'informatique influe sur toutes les sciences. Les ordinateurs sont utilisés dans toutes les disciplines. Directement, au plan du laboratoire et du travail scientifique. Indirectement, quand il s'agit de communiquer, de produire ou de consommer l'information. Les effets indirects sont déjà de grande portée: l'informatique a permis aux bases de données bibliographiques d'absorber la croissance exponentielle de la production scientifique (qui double tous les dix ans, si on la mesure en nombre d'articles publiés); elle permettra, sans doute, de faire face aux nouveaux besoins de publication et de communication rapide. Ces possibilités techniques produisent de nouvelles exigences intellectuelles. Pour prendre un exemple, les *Mathematical Reviews* sont devenues un outil de travail indispensable, mais elles ne jouent plus le rôle de guide et de critique qu'elles avaient il y a 30 ans. Pour se retrouver dans la littérature scientifique contemporaine, il faut des synthèses, des mises au points, des exposés historiques et critiques: on voit cette sorte d'articles scientifiques, qualifiés autrefois de "secondaires" prendre une place de premier plan. Le fait est général: *ni la puissance de calcul, ni la capacité de mémoire, ni les logiciels les plus élaborés, ni les systèmes experts n'éliminent l'activité intellectuelle; l'informatique déplace cette activité vers des champs nouveaux, et la stimule.*

L'informatique est entrée dans l'enseignement. L'usage des microordinateurs s'est largement répandu en Europe, aux Etats-Unis, au Japon [**I3**, pp. 14–16, 22–23, 39, 43–45]. L'Open University du Royaume Uni a introduit des graphiques animés produits par ordinateurs dans un cours de mathématiques de base dès 1971 [**I3**, p. 24]. En Union Soviétique, des cours de programmation pour étudiants en mathématiques existent depuis 1959, et en 1986 un cours sur les bases de l'informatique ("science de l'informatique et techniques de calcul") est introduit dans les écoles secondaires [**I3**, p. 8]. Avec des réticences diverses (notamment au Japon) les calculettes font une entrée en force dans les enseignements élémentaire et secondaire. Depuis 1978, elles sont autorisées pour tous les examens du "General Certificate of Education" en Ecosse [**ICR**]. A partir de 1986, elles figurent explicitement dans les programmes français de mathématiques au début des études secondaires (11-12 ans).

L'informatique est partout, mais inégalement distribuée. Les investissements et les frais de maintenance interdisent aux pays pauvres la diffusion massive des microordinateurs [**I-I**]. Par contre, une distribution massive de calculettes comme fournitures scolaires est envisageable—au même titre qu'une distribution massive de livres d'enseignement. C'est une raison, parmi d'autres, pour s'intéresser particulièrement au renouvellement possible de l'enseignement mathématique par l'usage des calculettes. En retour, les besoins de l'enseignement peuvent amener à de nouvelles spécifications pour les calculettes destinées aux fournitures scolaires.

Enfin l'informatique est doublement liée aux mathématiques. *Comme moyen nouveau de calcul et d'écriture, elle a, et elle aura de plus en plus, un impact sur les pratiques, les valeurs, et les concepts même des mathématiques. Comme outil à base mathématique, son histoire est liée à celle de la logique, et on doit s'attendre á un va et vient constant entre l'informatique (c'est-à-dire les ordinateurs et leurs usages), la logique, l'algèbre, et d'autres branches des mathématiques.*

★ ★ ★

Dans l'étude de la C.I.E.M., il était bon de commencer par là: l'influence de l'informatique sur la mathématique comme science. En particulier, sur une série d'exemples, on voit que les ordinateurs et l'informatique ont suscité de nouvelles recherches, remis à l'ordre du jour des questions étudiées il y a longtemps, et rendu possible l'étude de questions nouvelles. Ils ont multiplié brusquement nos possibilités d'observation et d'expérimentation en mathématiques. Ils ont valorisé tout ce qui peut se traduire en algorithmes. Au delà du calcul numérique, ils ont développé des possibilités de visualisation, et maintenant de calcul symbolique, qui sont de grande conséquence pour la recherche mathématique.

Cette influence est incontestable. Elle est déjà beaucoup plus profonde au niveau de la recherche que de l'enseignement. Pour certains, elle apparaît comme une menace. D'abord, une menace sur l'esprit même de la mathématique—comme science de l'ordre et des concepts unificateurs; la preuve du théorème des quatre couleurs au moyen de l'ordinateur peut être correcte, elle n'est pas "belle." Ensuite, une menace sur l'avenir du métier de mathématicien, concurrencé par l'appel des métiers de l'informatique, et par conséquent une menace sur l'héritage mathématique.

Au niveau de l'enseignement, on peut aussi énumérer les vues pessimistes:

- les élèves vont devenir paresseux
- ils ne vont plus savoir calculer à la main
- ils ne s'intéresseront plus qu'à l'informatique
- les enseignants ne pourront jamais s'adapter aux nouveaux outils
- ceux qui s'adapteront deviendront informaticiens
- si en plus on touche au contenu de l'enseignement, on court au même désastre qu'avec les "mathématiques modernes."

Ces dangers existent. Mais il faut également apprécier les chances nouvelles. Il y a de belles mathématiques à faire pour dominer l'usage des ordinateurs, et on peut attendre, dans l'avenir, un stimulant venant de l'informatique aussi important que le stimulant—classique—venant de la physique; aujourd'hui déjà, les "mathématiques discrètes" se trouvent ainsi stimulées et valorisées. D'autre part—et c'est là une raison essentielle d'être optimiste—les ordinateurs et même les calculettes ressuscitent de très belles mathématiques qui étaient oubliées ou négligées. J'illustrerai cela par quelques exemples tout à l'heure. Cette possibilité de réanimer des sujets dormants—parfois pendant des siècles—est un trait particulier des mathématiques dans l'ensemble des sciences, et c'est ce qui en fait un héritage extrêmement précieux. C'est une justification, pour le présent et pour l'avenir, d'une formation en grand nombre de jeunes mathématiciens.

On peut déjà dire qu'en face des ordinateurs, les élèves sont souvent actifs, intéressés et agiles—ils acquièrent l'usage des outils plus vite que leurs professeurs. Ils adoptent facilement l'attitude expérimentale. Mails ils ne peuvent pas découvrir seuls les bonnes voies où s'engager. L'expérience mathématique des enseignants est irremplaçable. Face à l'ordinateur, l'enseignant devient un conseiller. Plus encore que par le passé, l'essentiel est sa qualification comme mathématicien.

Après ces vues très générales, je vais évoquer des choses très anciennes sur lesquelles l'informatique, les ordinateurs et les calculettes font porter un regard neuf: les nombres, les figures, les symboles, les algorithmes.

Les nombres. Avec les cailloux (l'origine du "calcul") on a une conception claire de nombres entiers petits. Pour les nombres entiers plus grands, la vision qu'on en a dépend du mode de notation. Chez les Grecs de l'Antiquité, le système usuel permettait d'écrire 3 ou 700 avec une seule lettre, mais ne permettait pas d'écrire 2.100 (d'où la question de Socrate au savant Hippias: "toi qui es si savant, si on te demandait combien fait 3 fois 700, tu saurais répondre avec célérité et exactitude?"). Aujourd'hui, ne fût-ce que par la radio et la télévision, tous les enfants sont familiarisés avec des nombres entiers très grands; à chaque élection par exemple, on voit défiler des grands nombres, et des rapports exprimés en pourcentages. On change constamment d'échelle—le budget de la famille, le budget de la cité, les dépenses militaires dans le monde; l'âge de l'humanité, de la terre, de l'univers; les dimensions de l'atome, du système solaire, etc. Ce qui permet d'appréhender ces nombres et ces changements d'échelle, c'est l'écriture décimale et les puissances de 10. Ce qu'affiche une calculette, c'est justement une écriture décimale, et éventuellement (en virgule flottante) une puissance de 10.

L'enfant qui dispose d'une calculette se trouve immédiatement devant de grands nombres entiers, et aussi devant des développements décimaux assez longs. Des développements décimaux assez longs permettent d'imaginer naturellement des développements décimaux illimités. Ainsi la définition d'un nombre réel par un développement décimal illimité—esquissée par Simon Stevin il y a tout juste quatre siècles [**B**]—mérite d'être bien connue des enseignants. En France, un livre vient de paraître, sur les fondements de la géométrie, dont le premier chapitre est la théorie des réels à partir des développements décimaux illimités; c'est une présentation simple et complète, à l'intention des enseignants du secondaire, qui me paraît venir à son heure [**F**].

Cela ne supprime pas, mais au contraire valorise, la représentation du nombre réel positif comme rapport de deux longueurs. L'algorithme d'Euclide pour trouver une partie aliquote commune à deux longueurs, nous allons le retrouver comme algorithme des fractions continues.

★ ★ ★

La calculette ne se contente pas d'écrire. Elle permet de *traiter les données numériques*, elle calcule. La facilité du calcul doit permettre aux élèves, en arithmétique élémentaire comme en géographie, de traiter des données réelles, et beaucoup de suggestions intéressantes sont faites à ce sujet dans des ouvrages d'enseignement récents. Je ne m'y étend pas, quoiqu'il s'agisse d'une chose essentielle dans les écoles primaires. Ce traitement des données réelles oblige à réfléchir pour savoir quelles opérations faire, et par contre rend superflus les algorithmes d'opérations posées sur papier.

Ainsi l'addition, la multiplication, la soustraction, la division cessent d'être des opérations qu'on pose, pour devenir des opérations qu'on ordonne à la machine de faire. Il n'y a sans doute plus lieu, au début de l'enseignement élémentaire, d'insister sur les modes opératoires et les refrains traditionnels ("je pose, je retiens,..."). Par contre le *calcul mental*, et particulièrement le calcul des ordres de grandeurs, doivent permettre de deviner et de contrôler les résultats donnés par la machine. *Les modes opératoires traditionnels* ne disparaissent pas pour autant; mais ils prennent leur importance bien plus tard, quand on peut faire découvrir aux enfants les opérations en "multiprécision," c'est-à-dire quand on opère en base 10^n en utilisant la calculette comme table de multiplication.

★ ★ ★

La calculette fait instantanément les divisions. Plus précisément, elle donne immédiatement une écriture décimale à n chiffres (disons $n = 10$) en guise de quotient. Elle fait donc passer d'une fraction, disons $14/31$, à un développement décimal, $0,451612903$. Ce développement décimal, illimité, serait périodique, mais on ne voit apparaître le fait qu'en multiprécision. Si l'on donne l'écriture décimale $0,451612903$, comment remonter à la fraction? On inverse, on prend la partie décimale et on recommence, et on trouve $1/(2+1/(4+1/(1+1/2)))$.[3] C'est donc l'algorithme des fractions continues qui permet de passer de l'écriture décimale à la fraction (ou à une fraction égale). Si un de vos collègues affirme que, dans sa classe, $45,16\%$ des élèves ont été capables de répondre à une question, vous pouvez, si vous avez une calculette sous la main, lui dire que sa classe a 31 élèves (ou un multiple de 31).

Les fractions continues expliquent pourquoi $22/7$ et $113/355$ sont de bonnes approximations de π. Elles se prêtent à des jeux (découvrir deux nombres entiers quand on donne leur quotient), à des expériences, à des découvertes. Personnellement, je n'ai pas découvert la formule

$$e^{1/x} = (1, x-1, 1, 1, 3x-1, 1, 1, 5x-1, \ldots)$$

dans la littérature, mais en jouant avec une calculette. Les racines carrées des nombres entiers sont un vaste champ d'expériences. D'abord, on constate que la décomposition de

$$\sqrt{2} = 1,414\ldots = 1 + 1/2,414\ldots$$

semble ne pas s'arrêter. L'ayant constaté, il est facile de le démontrer. C'est la preuve la plus naturelle que $\sqrt{2}$ est irrationnelle (sa version géométrique était bien antérieure, chez les Grecs, à la démonstration par l'absurde qui se trouve chez Euclide, et qui est sans doute due à Théétète). Les propriétés des décompositions de $\sqrt{n}$ se découvrent expérimentalement, et fournissent de jolis problèmes. C'est d'ailleurs un sujet d'actualité. On sait que la factorisation de nombres très grands est essentielle pour le décodage. Or, depuis la factorisation du septième nombre de Fermat F_7 ($= 2^{128}+1$) par Morrison et Brillhart en 1970, il apparait que les développements en fractions continues des $\sqrt{kN}$ peuvent fournir la clé de la factorisation de N, surtout si on les utilise en calcul parallèle [**W**].

★ ★ ★

J'insiste encore sur les fractions continues. Les fractions continues, familières à Euler et à Lagrange [L], importantes dans les applications et dans différentes branches des mathématiques, n'ont jamais fait partie de l'enseignement secondaire, et occupent encore aujourd'hui une place marginale dans l'enseignement supérieur. Elles me paraissent, grâce aux calculettes programmables, pouvoir être enseignées au lycée et devenir une connaissance commune.

De façon générale, ce qui est facile à programmer peut devenir facile à enseigner. Ainsi la sommation des séries (et ses pièges: pour éviter des additions du type $A+0+0+\cdots$, une série doit être sommée "à l'envers," ou par blocs). Ainsi la méthode de Newton pour le calcul des racines d'une équation (intéressante même pour $\sqrt{n}$). Ainsi la transformation en moyennes arithmétique et géométrique de

[3]En vérité, il faut identifier à un entier les nombres qui en sont assez voisins.

Gauss $T(a,b) = ((a+b)/2, \sqrt{ab})$, dont nous allons voir une application. Ces deux dernières méthodes donnent des approximations "quadratiques," c'est-à-dire, en gros, doublent le nombre de décimales exactes à chaque opération.

★ ★ ★

La calculette permet de se familiariser avec les nombres en général, et aussi avec des nombres particuliers: les nombres premiers, les carrés, les solutions d'équations diophantiennes; les racines carrées, le nombre e, le nombre π. Je m'attarderai un instant sur π.

La tradition, pour le calcul de π, est le calcul de séries, par l'intermédiaire de formules du type

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

qui avait permis à J. Machin vers 1700 de calculer π avec 100 décimales; des formules analogues ont été introduites et exploitées par Euler [**E**], et elles ont servi dans les années 1960 pour le calcul de π sur ordinateur, avec 100.000 décimales. Il y a pourtant beaucoup mieux. Voici le meilleur procédé actuel—découvert par E. Salamin en 1976, repris par Borwein et Borwein en 1984 [**BB**], et perfectionné par D. J. Newman récemment [**N**]. La transformation de Gauss $(a,b) \to T(a,b) = ((a+b)/2, \sqrt{ab})$ laisse invariante l'intégrale

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$$

et les $T^n(a,b)$ convergent très vite vers leur limite $m(a,b)$. Ainsi

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + (m(a,b))^2} = \pi m(a,b).$$

Or

$$\begin{aligned} I(1,N) &= 2\int_0^{\sqrt{N}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+N^2)}} \\ &= \frac{2}{N} \log 4N + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \end{aligned}$$

et le calcul de $m(1,N)$ avec $n \sim \log N$ décimales exige environ $\log n$ itérations de T. Si on veut se débarrasser du logarithme, on écrit

$$N((N+1)m(1,N+1) - Nm(1,N)) = \frac{2}{\pi} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

C'est un procédé remarquablement efficace, même avec une calculette, et qui peut intéresser des étudiants.

★ ★ ★

On peut donc faire beaucoup de choses intéressantes, à plusieurs niveaux, avec de simples calculettes. Tout l'aspect numérique—aussi bien de l'enseignement élémentaire que de l'analyse mathématique—se trouve ainsi valorisé.[4]

Les figures. Les possibilités de tracés par ordinateurs et de visualisation sur écran ont déjà été exploitées avec succès par des mathématiciens. J'évoquerai deux exemples.

Autour de 1920, Fatou et Julia, indépendamment, avaient mené très loin l'étude des itérations d'applications rationnelles de $\overline{\mathbf{C}}$ dans $\overline{\mathbf{C}}$ (plan complexe complété); en particulier, ils avaient étudié les diverses formes des orbites et des ensembles invariants, et ils avaient reconnu les deux situations typiques—ensembles parfaits totalement discontinus, ou ensembles connexes dont la frontière est généralement très irrégulière. Dans le cas des applications $z \to z^2 + c$ (c complexe), on a appelé ensembles F, ou ensembles de Julia, l'ensemble invariant constitué par les points dont l'orbite reste bornée; c'est B. Mandelbrot qui a eu l'idée de reprendre les recherches de Fatou et de Julia en utilisant les possibilités graphiques des ordinateurs. A. Douady et J. Hubbard, D. Sullivan et d'autres ont étudié de près les ensembles F, et aussi l'ensemble M (pour Mandelbrot) des points c pour lesquels F est connexe. On connait maintenant assez bien la dynamique de la transformation sur les ensembles F, et on a des formules pour la dimension de Hausdorff de F (dans le cas totalement discontinu) ou de sa frontière (dans le cas connexe), on sait que M est connexe et on a considéré sa frontière à la loupe, en y découvrant des invariants universels des applications rationnelles. Du coup, les mathématiciens retrouvent et comprennent mieux les phénomènes de bifurcation découverts par les physiciens en particulier, les invariants de Feigenbaum. Tout ce domaine—itérations et systèmes dynamiques—est le siège d'une compétition fructueuse entre physiciens et mathématiciens. Sans les ordinateurs, on n'aurait sans doute jamais tenté de reprendre le sujet si profondément exploré par Fatou et Julia (**I3**, p. 48).

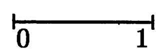
L'autre exemple concerne les surfaces dans $\mathbf{R}^3$. C'est un domaine où toutes les possibilités de visualisation (contour apparent, sections, agrandissements, rotations) se révèlent précieuses. En 1901, W. Boy, étudiant le plan projectif réel, avait montré qu'on pouvait l'immerger dans $\mathbf{R}^3$ sous la forme d'une surface dont la courbe d'autointersection est une hélice tripale. Dès cette époque, la question s'était posé de représenter une telle surface par une équation polynomiale $P(x, y, z) = 0$. En 1984, au terme d'une suite d'essais où la visualisation a joué un rôle majeur, F. Apéry est parvenu à résoudre la question, avec un polynôme P de degré 6. En fait, F. Apéry a utilisé non seulement les possibilités graphiques, mais un langage de programmation symbolique, pour traiter des calculs qui auraient été autrement impraticables (**I3**, p. 46).

[4] J'ai désigné par calculette aussi bien l'ordinateur de poche que la calculette "4-opérations." Il faut porter grande attention à la qualité de ces outils et à leur maitrise par les élèves. L'éducation est un marché assez important pour qu'elle impose ses normes aux fabricants. Encore faut-il définir ces normes. La "transparence" semble recommandable. "Simplicity is a virtue" (W. Kahan, UCB).

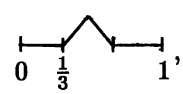
Ainsi, au niveau de la recherche, la visualisation par ordinateur a au moins deux effets: (1) rendre accessibles des formes considérées classiquement comme étranges, introduire à ce que B. Mandelbrot appelle la géométrie fractale (2) développer l'intuition en matière de géométrie des surfaces, en particulier des surfaces algébriques.

En matière d'enseignement, on peut prévoir des conséquences du même ordre.

D'abord, intégrer à la culture mathématique—des mathématiciens, mais aussi des physiciens et des ingénieurs—des objets autrefois réputés étranges, tels que les ensembles parfaits totalement discontinus, les courbes simples sans tangentes, les courbes de Peano, les mesures singulières. Une manipulation simple permet de refaire l'expérience de Michelson découvrant avec surprise que les graphes des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction discontinue débordent sans cesse le graphe de la fonction (le "phénomène de Gibbs"). La non-dérivabilité des fonctions de Weierstrass $\sum a^n \cos b^n x$ $(0 < a < 1,\ ab > 1)$ est évidente quand on zoome leurs graphes. La fonction partout non dérivable de Takagi $\sum \operatorname{dis}(x, 2^{-n}\mathbf{Z})$ mérite d'être vue, d'autant plus qu'elle peut apparaître dans des problèmes physiques très naturels [**I3**, p. 50]. La courbe de von Koch peut être dessinée à partir d'un programme très simple: remplacer le segment



par les quatre segments



et répéter. Le simple examen de cette courbe (et des courbes analogues où 1/3 est remplacé par une autre valeur) est une excellente introduction à la notion de dimension fractionnaire, ou fractale. La courbe de Peano la plus simple—et la plus utile—s'obtient en remplaçant 1/3 par 1/2. Au delà de ces exemples, c'est la théorie géométrique de la mesure à laquelle il conviendrait de faire une place dans l'enseignement, aux côtés de la mesure abstraite, de l'intégration et des probabilités. Les probabilités fournissent d'ailleurs les exemples les plus naturels de comportements non classiques: une trajectoire brownienne n'est pas difficile à programmer, et elle explique bien l'intuition de Jean Perrin, que le mouvement brownien fournit des fonctions nulle part dérivables. Toute cette géométrie fractale a aussi ses régularités, ses invariants (à commencer par la dimension de Hausdorff), et ses ressources esthétiques lui donnent un charme particulier.

Ensuite, réintégrer à la culture mathématique la géométrie dans l'espace, et en particulier la géométrie des surfaces. Autrefois, chaque département de mathématiques avait une "salle des modèles," avec des moulages de quadriques, de tores, de cônes, de rubans, de bouteilles et d'autres surfaces. L'informatique graphique a tous les avantages des moulages en platre, et beaucoup d'autres—comme d'aller inspecter de près les singularités. La géométrie dans l'espace sur ordinateurs se développe dans l'industrie, dans l'architecture, dans la médecine. En chimie, la géométrie des grosses molécules joue un rôle essentiel, et d'excellents logiciels de visualisation ont été développés. L'enseignement mathématique ne peut pas l'ignorer.

La visualisation sur écrans ou sur tables traçantes a été déjà largement utilisée dans l'enseignement mathématique. On connait les succès de Logo en géométrie élémentaire. De nombreux logiciels de géométrie plane sont maintenant commercialisés. Il faudrait y consacrer la même attention qu'aux manuels d'enseignement.

Dans l'enseignement supérieur, l'étude des fonctions et surtout l'étude des équations différentielles avec des moyens graphiques est un succès incontestable. Plusieurs équipes dans le monde ont des approches voisines: de l'exploration des figures naissent des conjectures et des problèmes, qui amènent à un travail mathématique beaucoup plus intéressant que la simple recherche (souvent illusoire!) d'une formule permettant de représenter les courbes intégrales. Etudier un système différentiel, c'est, dans cette approche, chercher quelle est l'allure globale et locale des solutions. Les notions relatives aux points critiques (cols, noeuds, foyers, centres) ou aux branches infinies (asymptotes, entonnoirs) apparaissent naturellement par l'inspection d'exemples. On peut obtenir des dessins surprenants à l'aide de systèmes très simples, tels que

$$\frac{dx}{dt} = \cos y, \quad \frac{dy}{dt} = \sin xy \qquad [\mathbf{I2}, \text{p. } 107; \mathbf{I3}, \text{p. } 49].$$

Equations différentielles et itérations—appelées parfois: équations aux différences—constituent les deux approches mathématiques les plus simples des systèmes dynamiques. Un excellent livre récent est consacré à leur expérimentation sur ordinateur [**Ko**]. L'itération des homéomorphismes du cercle serait d'ailleurs une bonne occasion de retrouver les fractions continues, et les rotations qu'elles définissent.

Les symboles. Dans l'aspect numérique et dans l'aspect graphique, on se préoccupe de valeurs approchées, de procédés d'approximation, d'étude qualitative. Pour la résolution des équations numériques ou des équations fonctionnelles, peu importent les formules exactes (résolution à l'aide de radicaux, ou résolution en termes de fonctions élémentaires) pourvu qu'on ait un moyen pratique de calculer ou de représenter la solution.

Il est remarquable que l'informatique réhabilite aussi les aspects algébriques, les manipulations de formules littérales, les solutions en forme finie. C'est ce qu'apportent les systèmes symboliques formels.

Remontons à un siècle et demi. En 1835, J. Liouville établissait un théorème général sur les intégrales indéfinies exprimables "sous forme finie." En voici l'énoncé: si $\int P\,dx$ est exprimable, sous forme finie, en fonction de $x, y, z, \ldots$ ($y', z', \ldots$ étant des fonctions algébriques de $x, y, z, \ldots$), comme superposition de fonctions algébriques, d'exponentielle et de logarithme, il est permis de poser

$$\int P\,dx = t + A\log u + B\log v + \cdots + C\log w,$$

$A, B, \ldots, C$ étant des constantes, et $t, u, v, \ldots, w$ des fonctions algébriques de $x, y, z, \ldots$.

Le même énoncé vaut en remplaçant “algébrique” par “rationnelle,” d'où, par exemple, l'impossibilité d'exprimer $\int e^{-x^2}\,dx$ sous forme finie. Ce théorème fut très apprécié en son temps, puis oublié.

A. Ostrowski dégagea de là en 1946 l'aspect algébrique, en définissant les “corps liouvilliens.” Le théorème devient purement algébrique avec M. Rosenlicht (1968), algorithmique avec R. H. Risch (1969), et concrètement applicable au calcul formel avec J. H. Davenport (1982). Grâce à ces travaux, la machine peut décider si une intégrale compliquée se calcule ou non sous forme finie, et, dans l'affirmative, donne la forme en question [**I2**, p. 76].

La machine fait donc, beaucoup mieux, ce que peut faire un étudiant expert en calcul des intégrales. Cela signifie que l'agilité à calculer des intégrales pourrait être complètement supprimée des buts de l'enseignement. Si le temps laissé libre permet d'accéder au théorème de Liouville ou à ses versions modernes, tant mieux. Il faut préférer aux techniques ad hoc les énoncés les plus généraux et les plus puissants. Comme on le voit, l'ordinateur nous pousse vers l'abstraction!

Le calcul symbolique, ou calcul formel, n'était naguère accessible que sur de gros ordinateurs. Actuellement, un système tel que muMATH est accessible sur micro. Pour les élèves, le calcul littéral deviendra bientôt aussi facile à effectuer que le calcul numérique. Ce sont les principes les plus généraux du calcul littéral—les aspects algébriques—qui méritent donc d'être explicités [**I2**, p. 35].

Les algorithmes. Le concept majeur en informatique est celui d'algorithme. En mathématiques, les algorithmes ont toujours joué un rôle important. Cependant, dans les définitions et dans les preuves, les procédés non constructifs ont naguère été préférés aux procédés constructifs, à cause de leur élégance et de leur puissance (ainsi toutes les utilisations de l'axiome du choix). Les procédés constructifs reviennent à la mode, et l'élégance que nous leur attribuons dépend évidemment des outils dont nous disposons.

Par exemple, considérons la théorie et la définition du pgcd. En voici trois approches.

(1) L'algorithme des divisions successives. Si r est le reste de la division de a par b, on pose $(b,r) = T(a,b)$, et on répète T jusqu'à obtenir $(\rho, 0)$. Tous les diviseurs de a et b divisent ρ, et ρ divise a et b. C'est le pgcd.

(2) Le procédé des idéaux. L'ensemble $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$ a un plus petit élément > 0, soit ρ. On démontre $\rho\mathbf{Z} = a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$, et ρ est le pgcd.

(3) La récurrence descendante:

$$\begin{aligned}\mathrm{pgcd}(a,b) := {} & \text{si } b = 0 \text{ alors } a \\ & \text{sinon si } a > b \text{ alors } \mathrm{pgcd}(a-b, b) \\ & \text{sinon } \mathrm{pgcd}(b,a) \quad [\mathbf{I3}, \text{p.}32].\end{aligned}$$

Cette dernière définition est incontestablement la plus simple, pour le programme comme pour la théorie. On peut juger la rédaction rébarbative, et la changer pour la rendre conforme au bon usage. Mais on peut également se demander si le bon usage ne sera pas influencé par le langage de la programmation. Naturellement, même si la définition 3 est la plus simple (c'est l'algorithme des "soustractions successives"), les autres gardent leur valeur.

Voici un autre exemple, de définition par algorithme, emprunté à la vie politique française. Les dernières élections législatives ont eu lieu en appliquant dans chaque département "le système de représentation proportionnelle à la plus forte moyenne." Il s'agit de désigner D députés. Il y a L listes de candidats, chacune portant D noms. Chaque électeur vote pour une liste, sans rayure ni mélange. Le dépouillement du vote fait apparaître le nombre total de votants, N, et le nombre de voix pour chaque liste, $n_1, n_2, \dots, n_L$ $(n_1 + \cdots + n_L = N)$. Voici l'algorithme qui définit le système. On calcule le "quotient électoral" $Q = [N/L]$. On attribue à la k-ième liste $[n_k/Q]$ députés. Si tous les sièges sont attribués, on s'arrête. Sinon, d_k étant le nombre de sièges attribués à la k-ième liste, on calcule $n_k/(d_k + 1)$ et on attribue un nouveau siège à la liste pour laquelle ce rapport (cette "moyenne") est le plus grand. On recommence jusqu'à ce que tous les sièges soient attribués.

Cet algorithme, très commode pour le calcul à la main (sauf au début, on ne divise que par de nombres petits, et le classement se fait d'un coup d'oeil), n'est pas agréable à programmer sur un ordinateur de poche. Il a pour autre inconvénient qu'on ne voit pas immédiatement à quoi il vise. C'est un autre algorithme, la résolution d'équation par dichotomie, qui convient à la machine: la fonction $\sum[n_k/q]$ est une fonction décroissante de q, prenant (on le suppose!) toutes les valeurs entières positives quand q varie sur $\mathbf{R}^+$. On choisit q de façon que cette somme soit D. Le nombre de sièges de la k-ième liste est alors $[n_k/q]$. Ce qu'on explique à la machine permet de comprendre ce qu'on cherche.

Les algorithmes disponibles ont un effet sur les définitions et sur les preuves, sur le style de rédaction, et sur la pensée mathématique elle-même. Je me suis déjà étendu sur les itérations, et en particulier sur les fractions continues. De manière générale, les algorithmes faciles à programmer peuvent avoir un contenu mathématique, et ce sont alors des candidats naturels pour entrer dans un programme d'enseignement. La complexité des algorithmes est un beau sujet mathématique dont on peut avoir rapidement une idée intuitive.

★ ★ ★

Le langage des algorithmes fait appel aux mathématiques discrètes. Depuis quelques années, des programmes de mathématiques discrètes sont proposés dans quelques universités des Etats-Unis sous la forme de cours d'un semestre ou de cours annuels, et il faut être attentif à leur évolution. Lorsqu'on énumère les matières, on peut avoir l'impression d'un pot-pourri: ensembles et relations, logique élémentaire, induction et définitions récursives, combinatoire, équations aux différences, graphes et arbres, probabilités discrètes, matrices et programmation linéaire, systèmes de numération, groupes et anneaux, machines à états finis et leurs relations avec les langages et les algorithmes [**I2**, p. 16]. Mais ce pot-pourri constitue la culture commune aux étudiants en informatique et aux étudiants en mathématiques, comme les éléments d'analyse (fonctions d'une variable réelle, dérivées, intégrales, équations différentielles, fonctions de plusieurs variables) constitue la culture commune aux étudiants en physique et aux étudiants en mathématiques. Qu'on en fasse un cours séparé ou non, il est clair que des mathématiques discrètes doivent être enseignées dès la tranche d'âge 16–18 ans, même si c'est au détriment du "calculus." On peut économiser sur la virtuosité dans le calcul des intégrales ou la résolution des équations différentielles au moyen de fonctions élémentaires: la compréhension des méthodes générales, et de ce que peuvent apporter les systèmes de calcul formel, est maintenant plus importante que le calcul à la main.

★ ★ ★

La machine de Turing a tout juste 50 ans. C'est l'origine des machines à calculer modernes, et c'est aussi l'origine de la théorie moderne des algorithmes. L'idée de base de Turing est de réduire une activité mentale à une action mécanique: "according to my definition, a number is computable if its decimal can be written down by a machine." Naturellement, il ne s'agit pas là de l'activité d'invention, mais de l'exécution d'un programme de calcul.

La théorie des langages et celle des automates est sortie de là. Les automates à état fini sont devenus l'une des bases de l'informatique théorique. Les suites qu'ils engendrent—suites "automatiques"—interviennent en analyse et en théorie des nombres, soit comme outils, soit comme objets. Par exemple, la suite découverte indépendamment par H. S. Shapiro (1951) et W. Rudin (1959)

$$+++-++-++++---+-\cdots$$

obtenue à partir du mot $abcd$ par l'application des règles $a \to ac$, $b \to dc$, $c \to ab$, $d \to db$ puis en remplaçant a et c par $+$, b et d par $-$ est très importante en analyse de Fourier, et ses généralisations donnent de bonnes approximations automatiques du mouvement brownien. Les constructions automatiques (traductions géométriques de suites automatiques, type pavage de Penrose) donnent aussi un large champ d'étude. Les automates devraient faire partie de la culture d'un mathématicien [**I3**, p. 33; **I2**, p. 69; **S**]. Peut-être, sur des exemples, conviendraient-ils aussi à de non-mathématiciens, comme modèles simples de ce que sait faire une machine.

L'idée de Turing s'applique également à la théorie de la preuve: une preuve est complètement formalisée si elle peut être vérifiée par une machine. C'est plus qu'une idée, c'est déjà une réalisation, avec le système Automath de N. de Bruijn. L'idée d'Automath, c'est d'expliquer les choses à une machine. Naturellement, ce n'est pas ainsi qu'il faut les expliquer à des étudiants. Mais, remarque de Bruijn, si on ne sait pas expliquer les choses à une machine, on peut avoir des difficultés à les expliquer à des étudiants [**I2**, p. 61].

Une remarque finale. La plupart des participants au colloque de Strasbourg avaient beaucoup plus d'expérience que moi en informatique et dans l'usage des ordinateurs. Si j'ai été invité à parler sur ce thème, ce n'est donc pas comme expert, mais comme amateur. Et c'est comme amateur que je crois pouvoir m'adresser aux collègues non-experts. On n'a pas besoin d'être informaticien pour apprécier le rôle de l'informatique sur la pensée mathématique—par contre, une telle appréciation est impossible à un non-mathématicien.

On doit réfléchir à ce rôle quand on pense à la place des mathématiques dans l'enseignement obligatoire. Quelles mathématiques enseigner, pourquoi et comment? Il y a maintenant de bons arguments pour les mathématiques discrètes, mais aussi pour la statistique, les probabilités, l'analyse numérique. On peut utiliser les outils de bien des façons—enseignement assisté par ordinateur ou expérimentation libre; calcul numérique, visualisation, calcul formel. Le champ des contenus possibles s'élargit autant que le champ des méthodes. Le champ des contenus souhaitables—fût-ce du seul point de vue de l'informatique—risque de croître encore plus vite.

L'enseignement des mathématiques—comme métier—n'est donc pas menacé par l'intrusion de l'informatique. Au contraire, dans presque tous les pays du monde, on trouvera qu'il est insuffisant—qu'il y faudrait consacrer plus d'heures, plus de moyens, plus d'enseignants.

Reste la question principale. Comment les enseignants peuvent-ils faire face à ce monde changeant, où il s'agit de renouveler et d'élargir les contenus et les méthodes? C'est une question très difficile, qui n'admet certainement pas de réponse universelle. Le signe le plus encourageant à cet égard, c'est l'ensemble des initiatives prises par le milieu lui-même pour élargir simultanément sa qualification mathématique et sa compétence en matière d'outils. Il y a maintenant d'excellents livres, où l'on trouve à la fois les règles d'utilisation d'un outil, d'un langage ou d'un système, X, et une série d'applications mathématiques de grand intérêt. Ainsi, le mathématicien désireux de s'initier à X a, du même coup, l'occasion de faire de bonnes mathématiques—et c'est actuellement dans des ouvrages mixtes de ce type (dont le plus avancé est sans doute [**G**]) qu'on trouve les meilleurs exposés des langages ou systèmes en usage [**Ki**, **G**, **CR**, **JL**, **Se**, **Ko**].

Nous devons être capables—et c'est un grand enjeu de société—de répondre aux nouvelles possibilités et aux nouveaux besoins qu'amènent les nouvelles technologies. L'apprentissage des mathématiques est un des moyens de développer l'intelligence humaine au même rythme que l'intelligence artificielle. L'enseignement des mathématiques n'a jamais été plus important et plus passionnant.

References

[**I1**] *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*, CIEM-ICMI Enseign. Math. **30** (1984), 159–172.

[**I2**] *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*, ICMI Study Series, Proc. Strasbourg Symposium (1985), CUP, 1986.

[**I3**] *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*, Supporting Papers (n° 1 à 50) from the Strasbourg Symposium (Strasbourg 25–30 March 1985), CIEM-ICMI, IREM 67084 Strasbourg Cedex.

[**I4**] *Report on the ICMI Symposium on "The Influence of computers and informatics on mathematics and its teaching"*, R. Biehler, R. Strässer, B. Winkelmann (Bielefeld), Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (1986).

[**I-F**] *Logiciels et réalisations informatiques pour l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement supérieur*, B. Cornu, Gazette des Mathématiciens **30** (1986), 147–164.

[**I-I**] *International Symposium on Informatics and the Teaching of Mathematics in Developing Countries*, Monastir (Tunisie), February 3–7, 1986, ICOMIDC-IFIP.

[**ICR**] *Working paper on hand-held calculators in schools*, Marilyn N. Suydam, SMEAC Information Reference Center, Ohio State Univ., Columbus (mars 1980), International Calculator Review.

[**B**] Nicolas Bourbaki, *Eléments de mathématiques*, livre III (topologie), chapitre 4 (nombres réels), Hermann, 1950.

[**F**] Jacqueline Ferrand, *Les fondements de la géométrie*, PUF, 1986.

[**E**] L. Euler, *Opera omnia*, I–14, p. 245, etc.

[**L**] J. Lagrange, *Additions à l'analyse indéterminée in Oeuvres d'Euler*, I, 1.

[**W**] M. C. Wunderlich, *Implementing the continued fraction factoring algorithm on parallel machines*, Math. Comp. **44** (1985), 251–260.

[**BB**] J. M. Borwein et P. B. Borwein, *The arithmetic and geometric mean and fast computation of elementary functions*, SIAM Rev. **26** (1984), 351–366.

[**N**] D. J. Newman, *A simplified version of the fast algorithms of Brent and Salamin*, Math. Comp. **44** (1985), 207–210.

[**Ko**] H. Koçak, *Differential and difference equations through computer experiments* (with diskettes containing Phaser: an animator/simulator for dynamical systems for IBM personal computers), Springer, 1986. ($X =$ Phaser)

[**S**] A. Salomaa, *Computation and Automata*, Encyclopedia Math. Appl., vol. 25, CUP, 1985.

[**G**] U. Grenander, *Mathematical experiments on the computer*, Academic Press, New York, 1982. ($X =$ APL)

[**Ki**] A. Kirch, *Elementary number theory: A computer approach*, Intext Educ. Publ., New York, 1974. ($X =$ Fortran)

[**CR**] B. Cornu et C. Robert, (1) *Du calcul à la programmation*, Magnard, 1981 ($X =$ TI 57); (2) *Mathématiques et calculatrice programmable au lycée et au baccalauréat*, Magnard, 1983. ($X =$ TI 57 LCD)

[**JL**] D. Jakubowicz et H. Lehning, *Mathématiques par l'informatique individuelle* (I et II), Masson, Paris, 1982. ($X =$ Basic)

[**Se**] R. Sedgewick, *Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1983. ($X =$ Pascal)

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, MATHÉMATIQUE, 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE