M. **Jean Chazy**, ayant réuni la majorité absolue des suffrages, est proclamé élu.

Son élection sera soumise à l'approbation de M. le Président de la République.

M. **Erich Tschermak** est élu Correspondant pour la Section d'Économie rurale par 43 suffrages contre 3 à M. *Costantino Gorini* et 1 à M. *Nicola Parravano*, en remplacement de M. *Theobald Smith* décédé.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Jean Torlais. *Un esprit encyclopédique en dehors de l'encyclopédie. Réaumur* (présenté par M. M. d'Ocagne).

ALGÈBRE. — *Sur une propriété des polynomes de la division du cercle.* Note de M. **Marc Krasner** et de M^{lle} **Britt Ranulac**, présentée par M. Jacques Hadamard.

M. Paul Lévy nous a posé la question suivante suggérée par des recherches sur le calcul des probabilités : le polynome

$$P(x) = \frac{x^{k\lambda} - 1}{x^{\lambda} - 1} = \sum_{u=0}^{u=k-1} x^{\lambda u}$$

est-il décomposable en un produit $Q(x)R(x)$ de deux polynomes à coefficients *réels non négatifs*, termes constants normés à 1, d'une autre manière que la suivante : *k étant non premier*, $k, k', k'', \ldots, k^{(N-1)}, k^{(N)}, 1$ une de ses chaînes de diviseurs, on répartit en deux groupes les facteurs de l'identité évidente

$$P(x) \equiv \frac{x^{k\lambda} - 1}{x^{k'\lambda} - 1} \, \frac{x^{k'\lambda} - 1}{x^{k''\lambda} - 1} \cdots \frac{x^{k^{(N-1)}\lambda} - 1}{x^{k^{(N)}\lambda} - 1} \, \frac{x^{k^{(N)}\lambda} - 1}{x^{\lambda} - 1}. \tag{1}$$

La réponse est négative. En effet Q ou R est produit d'un polynome à coefficients positifs par $(x^{h\lambda} - 1)/(x^{\lambda} - 1)$, h diviseur de k.

1° Lemme. — *Tout coefficient de* Q *ou* R *est* o *ou* 1.

Toute racine ζ de P (donc de Q ou R) est racine de l'unité : $\bar{\zeta}\zeta = 1$. Q, étant à coefficients réels, admet $\bar{\zeta}$ pour racine avec ζ, donc est réciproque, donc est symétrique direct puisque sans coefficient négatif. De même R. Posons :

$$(2_a)\qquad Q = 1 + a_1 x + \ldots + a_i x^i + \ldots + x^{m_1},$$

$$(2_b)\qquad R = 1 + b_1 x + \ldots + b_i x_i + \ldots + x^{m_2},$$

$$(3)\qquad m_1 + m_2 = (k-1)\lambda,\qquad a_i \geqq 0,\qquad b_j \geqq 0,\qquad a_i = a_{m_1 - i},\qquad b_j = b_{m_2 - j}.$$

Identifions terme à terme QR et P. Si on avait $m_1 = m_2$, le coefficient de x^{m_1} serait au moins 2. Supposons donc $m_1 > m_2$; on a entre autres

$$(4_i)\qquad a_i + a_{i-1} b_1 + a_{i-2} b_2 + \ldots + a_1 b_{i-1} + b_i = 1 \text{ ou } 0 \qquad (i \leqq m_2 - 1),$$

$$(5)\qquad a_{m_2} + a_{m_2-1} b_1 + a_{m_2-2} b_2 + \ldots + a_1 b_{m_2-1} + 1 = [1 \text{ ou } 0, \text{ donc}]\ 1,$$

$$(6_i)\qquad a_i + a_{i-1} b_1 + a_{i-2} b_2 + \ldots + a_{i-m_2+1} b_{m_2-1} + a_{i-m_2} = 1 \text{ ou } 0 \qquad (m_2 \leqq i \leqq m_1).$$

Tous les termes écrits sont non négatifs. Donc (5) entraîne

$$(7_i)\qquad a_i b_i = a_{m_2-i} b_i = 0 \qquad (i < m_2),$$

(4_1) et (7_1) entraînent successivement

$$a_1 + b_1 = 1 \text{ ou } 0,\qquad a_1 b_1 = 0,\qquad a_1 = 1 \text{ ou } 0,\qquad b_1 = 1 \text{ ou } 0.$$

Par récurrence, si a_i et b_j sont 1 ou 0 pour i et j inférieurs à t, il en est de même de a_t et b_t. Pour t inférieur à m_2, on compare (7_t) et la forme suivante de (4_t) :

$$a_t + b_t + \text{entier non négatif} = 1 \text{ ou } 0.$$

(5) montre a_{m_2} nul. Pour $t > m_2$, (6_t) permet la récurrence par

$$a_t + \text{entier non négatif} = 1 \text{ ou } 0.$$

2° Soient alors $\{q_i\}$ et $\{r_j\}$ les suites, à construire, des degrés des termes non nuls de Q et R. Chaque somme $q_i + r_j$ est exposant de terme non nul de P. Donc chaque $u\lambda$ admet une décomposition unique

$$(9_u)\qquad u\lambda = q_i^{(u)} + r_j^{(u)} \qquad (0 \leqq u \leqq k),$$

(9_0) montre que o est commun aux deux suites. Un élément non nul ne peut leur être commun, il s'ajouterait à o de deux manières. $q_i = 0$ dans (9_u) montre que tout r_j est multiple de λ ; de même tout q_i. (9_1) n'est donc soluble que si l'une des suites, $\{q_i\}$ par exemple, contient λ ; soit alors $h\lambda$

le plus petit multiple de λ qui n'est pas un $q_i(h > 1)$; dans (9_h) le q_i sera donc nul : $h\lambda$ est un r_j, le plus petit r_j non nul.

Les q_i se groupent en séries de multiples consécutifs de λ, séparées par des intervalles. Elles ont toutes même nombre h de termes que la première, car, s'il y en a une plus longue, en ajoutant o puis $h\lambda$ à ses q_i certains $u\lambda$ paraîtront deux fois; et s'il y en a de plus courtes, prenons celle de plus petit premier terme $h_2\lambda$; il existe donc un exposant $(h_2 + h_3)\lambda$ avec $h_3 < h$ qui n'est pas un q_i. Dans sa décomposition, $r_j \neq 0$; donc $r_j^{(h_2+h_3)} \geqq h\lambda$; par suite $q_i^{(h_2+h_3)}$ est inférieur à $(h_2 + h_3 - h + 1)\lambda$, donc à $h_2\lambda$, donc appartient à une série de longueur h; par addition de $r_j^{h_2+h_3}$ aux q_i de cette série on obtient h termes consécutifs dont $h_2 + h_3$, donc entre autres soit $h_2\lambda$, soit $(h_2 + h)\lambda$. Mais ceux-ci sont déjà décomposables avec $h_2\lambda$ pour q_i et o ou $h\lambda$ pour r_j. Il y contradiction.

Soient q'_i les premiers termes de ces séries de q_i. On a visiblement

$$Q = \left(\frac{x^{h\lambda} - 1}{x^{\lambda} - 1}\right) \Sigma x^{q'_i}. \tag{10}$$

En faisant $x = 1$ dans (10) et dans $P = QR$, on obtient :

$$(\text{nombre des } q_i) = h\ (\text{nombre des } q'_i),$$
$$k = (\text{nombre des } q_i)\ (\text{nombre des } r_j),$$

h est donc diviseur de k; les résultats annoncés sont ainsi tous obtenus.

Observations sur la Note précédente par M. **Jacques Hadamard.**

La Note qui précède répond à une question qui avait été posée par M. Paul Lévy au cours d'une conférence faite le 12 janvier au Collège de France; il avait, par lettre du 7 janvier, posé la même question à M. Khintchine.

La solution de M. Krasner nous est parvenue le 15 janvier. M. Paul Lévy a reçu depuis une lettre de M. A Liénard, datée du 23 janvier, lui exposant, pour le cas où p est premier, une solution identique à celle qui est exposée ci-dessus, et une lettre de M. Khintchine, écrite à Moscou, le 18 janvier, lui indiquant, sans donner d'indication sur la méthode, que M. Raikoff a de son côté résolu le même problème.

L'indépendance de ces trois solutions ne peut pas être mise en doute.