Alexander Grothendieck et le concept d'espace
F. William Lawvere

Il y a 50 ans, la première réunion internationale sur la théorie des catégories a eu lieu à La Jolla, en Californie. En fait, une partie de cette réunion s'est déplacée sur la plage, où un discours inspirant par Jean-Louis Verdier a introduit pour beaucoup d'entre nous une nouvelle classe de catégories dues à Grothendieck, en écrivant sur un tableau noir qui avait été amené à la plage dans ce but. Jon Beck a commencé à dessiner des diagrammes dans le sable, et une discussion vivante et enthousiaste a commencé entre les participants. Jean-Louis Verdier a suggéré que ces catégories incarnent la théorie des ensembles, mais Erwin Engeler et moi avons exprimé des doutes, parce que la description semblait avoir besoin d'une théorie des ensembles donnée de l'extérieur pour paramétrer les familles pour les colimites requises.

Il y a plusieurs sujets importants qui sont sortis de cette réunion et qui sont toujours florissants, par exemple, la théorie des catégories enrichies présentée par Eilenberg et Kelly, et en particulier, le rôle des catégories "cartésiennes fermées" dans la géométrie et la logique. Le sujet que j'ai essayé de capturer à La Jolla, à savoir l'utilisation croissante des catégories et des foncteurs comme le langage pour les mathématiques abstraites, se poursuit depuis 50 ans.

La formulation explicite des principes de la théorie des catégories dans mon article a toujours besoin d'une axiomatisation améliorée. Je serai ravi quand une personne jeune réalisera cette tâche.

La disparition récente de tant de piliers de cette époque souligne la nécessité d'une histoire cohérente et correcte comme guide pour l'avenir. Je veux continuer la recherche d'une telle histoire, en me concentrant ici sur le concept d'espace.

Il n'y a pas qu'un seul concept d'espace, mais plusieurs classes de "régularité" [1]. (Pour éviter les malentendus, je ne me concentrerai pas sur l'espace riemannien ou l'espace-temps. Ces structures supplémentaires importantes nécessitent des espaces comme domaines de définition.) Une caractéristique commune des espaces dans ces catégories plus ou moins lisses que j'ai appelées COHÉSION, pour indiquer que les parties d'un espace "sont collées ensemble" et "hésitent" à se séparer (comme en argot américain "je resterai un peu, jusqu'à ce que je me sépare").

Le grand géomètre dialectique Hermann Grassmann a discerné les deux principales contradictions en mathématiques comme étant les oppositions "continues contre discrètes" et "égalité contre inégalité". Parce que le terme "continu" a eu une définition mathématique spécifique pendant plus d'un siècle, je vais plutôt utiliser "cohésif" pour ce concept philosophique, mais bien sûr, je vais immédiatement essayer de l'apprivoiser avec des définitions mathématiques. La dialectique de l'inégalité / égalité a été expliquée de manière assez approfondie par les mathématiciens, selon au moins deux niveaux :

Hurewicz (1935), Kan (1955) et Moore (1955), Quillen (1967), Gabriel et Zisman (1967), Heller (1988), Grothendieck (1983 et 1989), Kan et al. (2004), Maltsiniotis et Cisinski (de 1999 à ce jour), ont fourni quelques-unes des contributions majeures au niveau des espaces eux-mêmes.

Un autre niveau de transformation de l'égalité est codifié dans la notion de catégorie exacte introduite par Myles Tierney lors de notre séminaire à Halifax en 1969 ; il a prouvé que ces catégories sont une délinéarisation de la notion de catégorie abélienne de Grothendieck dans le sens où les groupes abéliens dans une catégorie exacte forment une catégorie abélienne. Cette théorie a été exposée dans le livre de Barr, van Osdol et Grillet, ainsi que dans l'exposé de Barr à l'ICM 1970. Les catégories exactes incarnent la propriété spéciale d'images en théorie des faisceaux qui peuvent être exprimées en termes "logiques" : définir l'image d'une application $X \to Y$ comme étant le plus petit sous-objet de Y à travers lequel l'application se factorise. Cette définition exprime précisément la règle d'inférence de la quantification existentielle ; mais alors dans quelle mesure exprime-t-elle "l'existence effective" ? En d'autres termes, étant donné une figure $Q \to Y$ de forme Q dans le codomaine Y, dans quelle mesure "provient-elle" d'une figure dans X via l'application, en supposant que $Q \to Y$ se trouve dans l'image ainsi définie ? Une partie de la propriété d'exactitude garantit qu'il existe un recouvrement $P \to Q$ de Q avec une figure effective $P \to X$ s'appliquant dans $P \to Q \to Y$, au pullback de la figure en question. L'autre caractéristique des catégories exactes est encore plus transparente sur la transformation de l'égalité : les co-égaliseurs viennent de leurs

Invited address CT Aveiro, juin 2015

1. smoothness = lissité ?

paires de noyaux et les relations d'équivalence émergent toutes de paires de noyaux. Il est clair que la théorie des catégories exactes s'applique largement. Le livre de Barr, Grillet et Van Osdol a beaucoup fait pour la populariser, et le travail de Carboni et d'autres a très efficacement utilisé "la complétion exacte" pour adjoindre les co-égaliseurs adéquats à des catégories non exactes. La plupart de ces travaux postulent les propriétés d'exactitude comme des conditions données sur une catégorie, tout comme le fait la caractérisation de Giraud des topos de Grothendieck ; une partie de la signification du fait de postuler des espaces fonctionnels et des objets puissance est que l'existence de foncteurs adjoints implique l'exactitude sans postulat supplémentaire.

L'idée d'une opposition entre une catégorie d'espaces cohésifs et une catégorie d'ensembles anti-cohésifs s'applique également en particulier à la description de Cantor de la relation entre une catégorie d'ordinaux et une sous-catégorie de cardinaux. En fait, il semble qu'en général, le discret est une sous-catégorie co-réflexive du cohésif, avec la co-réflexion extrayant, comme un arithmos aristotélicien, le "cardinal de X" Cantorien ou les "points de X" de Hausdorff. (Les ensembles des "plus forts" ont des isomorphismes, tout comme en ont les objets dans n'importe quelle catégorie ; la question ici, cependant, n'est pas de passer à des classes d'isomorphismes, mais simplement d'extraire l'aspect discret sous-jacent de chaque espace/ordinal donné). La dialectique Grassmannienne se développe davantage. La sous-catégorie discrète est la négation d'une sous-catégorie identique à l'extrémité opposée, avec le même foncteur pour réflexion. Autrement dit, la même catégorie a comme insertions deux sous-catégories opposées, celle qui illustre que les "plus forts" sont totalement distincts, mais l'autre démontrant qu'ils sont presque indiscernables. Plus précisément, un travail conjoint avec Matias Menni a montré que, selon des hypothèses très générales, l'inclusion co-discrète consiste en les faisceaux booléens que possède tout topos. Cependant, pour une catégorie d'espaces il y a un adjoint supplémentaire à la faisceautisation. Cela indique une restriction non triviale sur cette catégorie cohésive, à savoir l'existence de cet adjoint de Cantor additionnel. De telles restrictions servent d'axiomes pour la cohésion, ce qui est la caractérisation que nous proposons pour les "catégories d'espace".

Mon utilisation de concepts tels que la sous-catégorie booléenne révèle que je suis convaincu que les catégories d'espace sont le plus efficacement modélisées comme des topos appropriés. Un des deux axiomes pour les topos, notamment l'existence d'espaces fonctionnels (la caractéristique qui a été appelée "fermé cartésien" depuis la contribution d'Eilenberg et Kelly il y a 50 ans avait été reconnu comme fondamental par Hadamard et Volterra au moment de la ICM de 1897 à Zurich. Le fait que cette propriété soit essentielle a été souligné par Grothendieck en 1957 dans son article Tohoku. Ces raisons et bien d'autres indiquent que cette opération est centrale à toutes les branches des mathématiques. Afin d'obtenir la propriété d'espace de fonctions (dans les modèles de cohésion qui sont construits comme des catégories de structures dans une base discrète), la structure fondamentale doit avoir la nature des figures et les relations d'incidence plutôt que les algèbres de fonctions (qui peuvent être récupérées naturellement). Mon article de Palerme de 1997 a tenté d'expliquer cette nécessité. Ce papier, comme celui de 1965 d'Eilenberg et Kelly, et comme les publications de Steenrod, Kelly et Brown, mentionnait comme un exemple important les k-espaces basés sur l'utilisation d'espaces compacts comme types de figures. Cependant, aucun de nous n'a mentionné l'origine réelle des k-espaces, dont j'ai appris plus tard au téléphone par David Gale (lorsque j'ai lu sa publication de 1950 dans les Actes de l'AMS). Cette notion de k-espace avait été présentée par Witold Hurewicz dans ses conférences de Princeton à la fin des années 40. En fait, au début des années 40, Hurewicz avait souligné cette nécessité, qui a conduit à la solution partielle par Ralph Fox en 1945 pour le cas des séquences convergentes comme figures. Hurewicz n'avait pas parlé explicitement en termes de catégories, mais dans les lois exponentielles qu'il exigeait, on peut reconnaître immédiatement la caractéristique de l'adjonction.

Il est frappant qu'Hurewicz, qui en 1935 avait initié des avancées fondamentales dans l'étude de la transformation de Grassmann des inégalités en égalités, ait fourni également des contributions fondamentales au développement de l'autre transformation de Grassmann entre les caractères continu et discret. Ses contributions bien connues à la théorie des dimensions (qui utilisait déjà les espaces fonctionnels en 1941), mais aussi sa contribution moins citée à la reconnaissance du rôle fondamental des espaces fonctionnels en général. S'il n'y avait pas eu la tentation de la pyramide à Uxmal, il nous aurait montré davantage de la relation qui existe entre les deux principes de Grassmann.

De l'analyse fonctionnelle aux dérivateurs, le travail d'Alexander Grothendieck a immensément illuminé cette relation.

Le grand livre de Hausdorff "Mengenlehre" était en fait un livre sur la topologie (qui est un élément important de l'étude de la cohésion), illustrant à nouveau l'opposition et la transformation mutuelle entre cohésion et caractère discret, telle qu'elle est abordée dans son travail sur le chaos sous le pseudonyme de Paul Mongre.

Un aspect remarquable de la dialectique continu / discret est que les ensembles abstraits de "lauter Einsen", terme abstrait pour signifier la cohésion des espaces, peut réciproquement servir de base, via des schémas spécifiques dans leur catégorie, à des structures constituant des modèles pour toutes les sortes d'objets mathématiques, incluant en particulier les espaces eux-mêmes. Comme critères pour juger de l'adéquation de nos axiomes, Myles Tierney et moi avons insisté sur la preuve des constructions de sites et de faisceaux de Grothendieck. Cette preuve a été publiée par Radu Diaconescu en 1975 comme préalable nécessaire à sa preuve de changement de base pour les topos. Autrement dit, pour un morphisme géométrique $E \to U$ satisfaisant une condition-limite, E peut être reconstruit, par un zigzag de trois morphismes géométriques, à partir d'un site interne à U : la première jambe est l'homéomorphisme local donné par la tranche topos sur un objet de U qui paramètre les objets d'une catégorie interne, la seconde est donnée par la comonade exacte à gauche qui adjoint l'action de "pré-faisceaux" des applications de cette catégorie interne, et la troisième est la pleine inclusion des faisceaux pour un opérateur de localité. (Chacune des trois jambes est un cas particulier de la propriété importante de fermeture générale distincte de la classe des topos.) Pour un tel "U-Topos" E, le U lui-même peut être un topos élémentaire, renforçant l'observation de Grothendieck concernant l'ubiquité du principe puissant de relativisation ; il n'est pas nécessaire que ce soit un univers inaccessible, comme dans les exemples originaux de Grothendieck dans SGA4 ; il n'est pas non plus besoin que ce soit la partie discrète d'un topos cohésif, comme souligné ici. Pour chaque topos U, il y a la 2-catégorie Top/U des U-topos ; en effet, faire varier U peut simplifier le traitement de certains problèmes.

La conférence de Varsovie en 1959 par Saunders Mac Lane a en fait introduit l'idée de catégorie enrichie, dans son cas particulier de "catégorie localement petite". En reflet de la distinction de Bernays classe / ensemble, la croyance s'est développée que les catégories qui ne sont pas localement petites sont "illégitimes". Je suggère le point de vue alternatif suivant.

Dans la métacatégorie des catégories, il existe des catégories fermées monoïdales et donc d'autres catégories enrichies en elles. Cela montre la nécessité de l'existence d'un catégorie réelle appelée la catégorie des petits ensembles, dans la métacatégorie close cartésienne de toutes les catégories réelles. La catégorie foncteur de deux catégories réelles devrait aussi être réelle, même si bien sûr des propriétés comme la finitude locale ne sont pas conservées. Les catégories potentielles (correspondant aux sous-catégories de cette métacatégorie) peuvent ou non avoir des catégories réelles qui les représentent à équivalence près. L'un des principaux objectifs des mathématiques abstraites est d'illustrer et d'utiliser les transformations mutuelles entre espace et quantité. Les espaces et les quantités d'un intérêt majeur sont "petits", il est donc raisonnable de définir de petits ensembles satisfaisant la dualité Banach-Isbell et de postuler qu'il existe une catégorie réelle U représentant cette notion de petitesse. Ce postulat semble désormais être l'un des amendements raisonnables à ma tentative de La Jolla de 1965 de résumer en axiomes les caractéristiques-clé utiles d'une métacatégorie de catégories. Alors les catégories de foncteurs des catégories réelles peuvent ne pas avoir de petits ensembles de *hom*, mais elles sont réelles et donc soumises à toutes les propriétés des catégories réelles en général.

Ce que j'ai dit jusqu'à présent a été profondément influencé par le travail d'Alexander Grothendieck. Permettez-moi maintenant d'évoquer ses contributions spécifiques au problème de l'espace tel que je l'ai décrit. On dit souvent qu'il a inventé les topos comme domaines de cohomologie et qu'ils étaient une "généralisation" des espaces topologiques. Mais déjà en 1960, il définissait et utilisait des catégories en géométrie complexe, qui étaient des topos même s'ils n'étaient pas explicitement appelés ainsi. Son célèbre exercice Médaille en Chocolat (dans SGA4) est, comme je le lui ai dit, une clé pour toute la théorie et l'application des topos ; il a exprimé son accord, visiblement heureux que quelqu'un l'ait remarqué. Là, il explique une version (en termes de sites) de la relation entre le gros topos d'un espace et un petit topos du même espace ; les espaces en question sont pris dans une catégorie d'espaces qui pourrait seulement elle-même être le gros topos d'un point. Il s'agit toujours d'un exercice en cours que de clarifier la distinction qualitative entre ces sortes de topos qui apparaissent comme "gros" ou comme "petit" dans ce genre de situation, c'est-à-dire entre des catégories qui représentent une détermination générale de la cohésion et des catégories constituées d'ensembles de variables paramétrés par une sorte d'espace généralisé. Les espaces généralisés incluraient les espaces étales découverts par Grothendieck.

Quelle était la caractéristique indésirable des fondements initiaux des schémas de Dieudonné-Grothendieck, que Grothendieck a rejetés avec tant d'emphase dans sa conférence au colloque de Buffalo de 1973 ?

La structure contravariante avait déjà été considérée par Hurewicz et d'autres comme étant problématique, mais dans la notion d'espace local annelé, cette structure a été disséquée davantage en deux composants en interaction, des ensembles ouverts et des faisceaux d'anneaux locaux. Avec le recul, des problèmes auraient déjà pu être discernés à partir de 1960 lors de l'examen par Serge Lang des EGA. À ce moment-là, Lang est enthousiaste à propos du fait que tant de concepts classiques peuvent être inclus dans le changement de base ; il est également enthousiasmé par la preuve du virtuose Grothendieck que de tels produits fibrés existent réellement. En effet de notre point de vue de calculateurs moins capables, un virtuose était tenu de prendre les ingrédients séparés et de les réassembler en ingrédients similaires pour un schéma de produit ; en particulier, l'espace topologique sous-jacent ne sous-tend pas le schéma produit.

Quelle était la nature de la solution de Grothendieck ?

Dans un topos de foncteurs à valeurs définies sur des ensembles sur la catégorie des algèbres finiment représentables, chaque espace X a, grâce à Yoneda, un "intérieur" dont les objets sont les figures (en général singulières) de formes représentables, avec des relations d'incidence données par des triangles commutatifs. Cela peut être considéré comme une catégorie discrètement opfibrée, mais c'est équivalent à un foncteur à valeurs dans un ensemble. [Je ne suis pas d'accord avec le terme "foncteur de points" pour cela, car c'est un foncteur dont les valeurs réelles incluent toutes les figures de X. Bien sûr, les "points" d'un autre espace associé à X peuvent représenter des figures dans X, mais pour X lui-même, ses points sont juste la restriction de X à la catégorie des extensions de corps fini. Cette catégorie engendre la partie booléenne du grands topos. La définition habituelle de la notion de point est compliquée car elle revient à prendre la limite directe non exacte de ce foncteur restreint de points. En général, ce topos booléen est bien mieux adapté que la catégorie des ensembles abstraits pour servir de "topos de base" dans le cas d'un corps de base non fermé algébriquement. Faire confluer les "figures en X" avec les "points de X" a un air de science-fiction qu'il n'avait probablement pas l'intention d'avoir. Volterra les a appelés les "éléments".] Une meilleure version de "l'espace topologique sous-jacent" est interne au topos Barr-Boole-Galois où atterrit le foncteur de points réels ; ce choix est également nécessaire pour un produit préservant le foncteur des composants.

Entre le site de Galois pour la partie booléenne et le site pour la catégorie des espaces tout entière, il y a la catégorie des algèbres qui sont de dimension finie sur le corps de base ; parce que les espaces représentables correspondants sont les domaines des figures infinitésimales en X, on peut les appeler sites de Leibniz. L'importance de ces figures a été soulignée par Grothendieck et ses collègues en connexion avec les faisceaux tangents, les applications étales, etc. Deux propriétés fortes de cette catégorie par rapport à la catégorie beaucoup plus grande sont les suivantes : les formes de figure générale Y du grand site ont la propriété de Birkhoff relativement aux inclusions $L(X) \to X$ du noyau de Leibniz de tout X ; à savoir Y perçoit ces inclusions comme des épimorphismes au sens où une application infinitésimale $L(X) \to Y$ peut être intégrée d'une façon au plus à une application $X \to Y$. (Cela signifie que l'algèbre des fonctions à valeur Y sur X est une sous-algèbre d'un produit d'algèbres spéciales très petites.). L'autre propriété forte (dont on trouve des traces chez Euler) est que tout sous-topos de l'ensemble qui contient les objets de Leibniz contiendra tous les objets Y du grand site (affine) ; cela découle du fait qu'il y a suffisamment d'espaces de fonctions infinitésimaux pour engendrer ce grand site, par exemple, la ligne est une rétraction de l'auto-exponentielle du domaine des nombres duaux. On peut facilement extraire la sous-catégorie des espaces localement affines, c'est-à-dire les schémas algébriques.

La description ci-dessus d'un topos de Grothendieck d'espaces algébriques sur un corps de base semble fonctionner aussi bien pour un semi-anneau de base. Il a été démontré en détail que cela fonctionne pour les géométries lisses par Wraith, Kock, Reyes, Moerdijk, Bunge, Dubuc, Gago, Lavendhomme, et d'autres. Certaines versions sont susceptibles de fonctionner également pour la géométrie analytique.

En effet, le domaine de l'analyse / géométrie complexe est très avancé depuis 1960 et devrait avoir de nombreuses implications et clarifications des topos. Par exemple, la relation entre le théorème de l'image directe de Grauert comme relativisation de son cas particulier par Cartan-Serre devrait être clarifié par une topos-relativisation explicite. Quand j'ai proposé cela à Grothendieck, il a admis que c'était intéressant, mais a plaidé que son expertise en logique était insuffisante pour fournir une preuve. Plus récemment, l'étude des espaces Brady-hyperbolique a une très forte saveur de topos qui n'a pas encore été rendue explicite (pour autant que je le sache).

Grothendieck a apporté une contribution importante à ce qu'il a appelé la "topologie apprivoisée". Il n'a donné aucune définition générale, mais a insisté (comme je l'avais fait lors de mes exposés à Milan en 1977) sur la découverte de catégories adéquates qui ne contiendraient pas certaines anciennes pathologies qui avaient fait leur retour en cohomologie. À mon avis, les objets tels que les courbes qui remplissent l'espace auraient dû amener une "critique des fondements" plus centrale que les soi-disant paradoxes ; cependant, elles ont apparemment simplement été tolérées pendant de nombreuses décennies, avec une certaine résignation selon laquelle la complexité est inévitable. Mais Grothendieck a hardiment proposé d'utiliser les connaissances accumulées pour construire des catégories moins pathologiques qui suffiraient pour le travail mathématique. Il est arrivé à une proposition impliquant des fonctions réelles-analytiques par morceaux. Pendant ce temps, des logiciens, dont Wilkie, Pillay, MacIntyre et van den Dries, avaient étudié un problème connexe de Tarski, formulé en termes de décidabilité. Ils l'ont résolu en 1986, trouvant également que "l'analyse réelle par morceaux" était un ingrédient-clé, bien que n'étant pas le seul. Ces logiciens ont fini par reconnaître le travail de Grothendieck comme étant lié au leur. On doit attendre inversement le moment où le travail de leur école o-minimale éclairera l'étude plus profonde de l'espace cohésif.

Le travail de Grothendieck a illuminé et fait progresser le travail de Cantor, Grassmann, Volterra, Hausdorff, Hurewicz, Galois, Kan, Eilenberg et Mac Lane et inspiré notre communauté entière ; il continuera d'inspirer et d'orienter les travaux des générations futures.