Commentaires sur le développement de la théorie des topos
F. William Lawvere

Présentation

Résumant quelques points dans le développement de la théorie élémentaire des topos dans ses 30 premières années 1970-2000, cet article historique prépare le lecteur à la publication ultérieure de l'Éléphant de Johnstone (2002) et aux propres avancées de l'auteur lui-même vers des fondements améliorés de la géométrie algébrique dans l'esprit de Grothendieck, mais en utilisant les outils de la logique catégorique et en prenant en compte le thème de la cohésion axiomatique.

Addendum

Un fait important devrait être noté. Il m'était inaccessible au moment d'écrire cet article historique. Il concerne l'origine du concept d'espace fonctionnel qui incarne maintenant l'exemple topologique basique d'une catégorie fermée cartésienne. J'ai cité sept contributeurs à ce sujet à la fin de la section 4. Plus tard, quand j'ai téléphoné à David Gale pour l'interroger au sujet de son article de 1950, il m'a informé qu'en effet, c'était lors de cours à Princeton à la fin des années 1940 que Witold Hurewicz définit et utilisa la notion des k-espaces pour présenter sa solution du problème qu'il avait posé à Fox (et que Fox avait résolu pour le cas séquentiel dans le travail cité ici). Il semble que c'est (directement ou indirectement) Hurewicz qui par cet exemple a inspiré les six autres travaux cités ici.

0. L'outil catégorique appliqué à la géométrie algébrique amène à la naissance des topos

L'unification et la simplification sont nécessaires non seulement pour la dissémination des résultats, mais également pour une avancée cohérente de la recherche dans les différentes branches des mathématiques. Le besoin d'unification et de simplification pour rendre cohérent quelques-unes des nombreuses avancées mathématiques des années 1930 ont amené Eilenberg et Mac Lane [23] à concevoir la théorie des catégories, les foncteurs et les transformations naturelles au début des années 1940. Il est utile de distinguer les catégories générales des catégories linéaires dont l'étude explicite a commencé avec Mac Lane en 1950 [78].

"Les catégories combinant linéarité et exactitude, connues sous le nom de catégories "abéliennes" ont été perfectionnées dans les années 1950 et au début des années 1960. Cette théorie continue de profiter à de nombreuses applications, par exemple à travers l'utilisation des catégories dérivées en analyse. Une étape fondamentale, à mi-chemin de ce développement, a été l'article Tohoku de Grothendieck [42], qui a montré que cette base conceptuelle pour l'algèbre homologique sur un anneau s'applique aussi aux objets linéaires variant comme des faisceaux sur un espace. Ensuite, le fait que les concepts d'exactitude s'appliquent aussi à de nombreuses catégories non-linéaires est devenu graduellement plus connu et utilisé. Le concept des foncteurs adjoints, découvert par Kan (au milieu des années 1950) fut rapidement incorporé comme un élément-clé dans les fondements par Grothendieck de la géométrie algébrique [1] et les nouveaux fondements catégoriques de la logique et de la théorie des ensembles [70, 71]. Grothendieck, et son cercle à l'Institut des Hautes Études Scientifiques près de Paris, a développé au début des années 1960 le concept de topos pour son utilisation en géométrie ; je proposai une simplification de ce concept et des usages supplémentaires à l'Istituto di Alta Matematica à Rome en 1969. Après ce développement initial en 1969-70 en collaboration avec le topologue algébriste Tierney (qui avait indépendamment donné des

Publié initialement dans Développements des mathématiques 1950 - 2000, édité par J-P Pier, pp 715-734, Birkhäuser, Bâle, 2000.
Reçu par les éditeurs le 15 janvier 2014.
Transmis par M. Barr, R. Rosebrugh, et R.J. Wood. Réimpression publiée le 22 mai 2014.
2010 Classification des sujets mathématiques : 03G30, 18B25.
Mots et groupes de mots clefs: topos, théorie des catégories, faisceaux.
Université de l'état de New York à Buffalo

cours sur le besoin de théorie axiomatique des faisceaux), cette théorie des topos simplifiée a été présentée au Congrès International des Mathématiciens à Nice [72]. Des développements plus avant de cette proposition ont amené de nombreux articles et livres mais malgré ces publications, beaucoup d'étudiants ont trouvé difficile de comprendre ce qu'est la théorie des topos, d'où elle vient et où elle va. L'espoir est que la description qui en est brossée ci-après aidera à surmonter cette difficulté.

L'axiome de puissance ensembliste, qui définit les topos parmi les catégories, est présenté en détail dans la section 4 ci-dessous.

Puisque je ne peux fournir ici une description pas à pas, je me concentrerai sur les idées mathématiques, à la fois comme guides pour ceux qui veulent apprendre et développer ces idées, et aussi comme une aide pour ceux qui veulent rechercher les dates et publications. Je souhaite être excusé pour les inévitables omissions. Des versions préalables de cet article ont été lues par Barr, Gabriel, Freyd, Johnstone, Kock, Mac Lane, Ramachandran, Schanuel, et Street, dont les commentaires sont très appréciés.

1. L'analyse fonctionnelle et la topologie algébrique ont besoin d'une maison commune avec un cadre flexible

Le cœur des théories mathématiques est dans la variation de quantités dans l'espace et dans l'émergence de qualité à l'intérieur de ce phénomène. Les branches fondamentales (comme la géométrie différentielle et la théorie de la mesure géométrique) ont donné naissance à (et ont utilisé intensivement) ces deux grandes disciplines que sont la topologie algébrique et l'analyse fonctionnelle. Un grand élan à leur cristallisation a été la théorie électromagnétique de Maxwell-Hertz-Heaviside et les matériaux scientifiques de Maxwell-Boltzmann. Ces deux disciplines ainsi que ces applications ont été rendues explicites très tôt dans le travail de Volterra. Comme cela a été souligné par de Rham à l'attention de Narasimhan [88], c'est Volterra qui, dans les années 1880, non seulement démontra que l'opérateur extérieur de dérivée satisfait $d^2 = 0$, mais prouva également le théorème d'existence locale auquel il est habituellement fait référence de manière erronée en l'appelant le lemme de Poincaré ; ces résultats restent le cœur de la topologie algébrique comme cela est exprimé dans le théorème de de Rham et dans la cohomologie des faisceaux. La théorie de Volterra des fonctions de lignes, présentée lors de ses exposés à Paris en 1912 et ensuite appelée analyse "fonctionnelle", a été développée assez effectivement par ses étudiants et par Silva et Zorn (comme souligné par Fichera dans [26]), en prenant des ensembles ouverts et des ensembles fermés non comme primitives, mais comme dérivées d'une structure plus fondamentale. Dans la période 1950-1985, cette forme de l'analyse fonctionnelle a été largement négligée, mais elle a été revivifiée dans les années 1980 lorsque quelques-uns de ses problèmes-clefs ont été résolus et ses applications à la physique en dimension infinie ont été réactivées par le travail explicitement catégorique de Kriegl et de ses collaborateurs Frölicher, Nel, et Michor [32], [65], [67], et dans le travail explicitement topos-théorique de Penon, Dubuc, et Bruno [92], [22], [6]

En effet, dans un certain sens, le travail récent en théorie des topos réunit finalement organiquement ces deux brins de Volterra (la topologie algébrique et l'analyse fonctionnelle covariante expliquées ci-après), brins qui avaient longtemps été entremêlés dans :

- le travail de Grothendieck sur les espaces nucléaires [41] et sur les duaux holomorphiques [40] ;

- les résultats de Grauert-Cartan-Serre [38], [13] sur les faisceaux analytiques cohérents (dans lesquels, comme Houzel et Douady l'ont exprimé plus explicitement dans les années 1970 [50], [20], l'analyse fonctionnelle nucléaire bornologique joue un rôle pour établir la finitude de certains nombres de Betti "algebrico-topologiques") ;

- l'approche micro-fonctionnelle de Sato-Kashiwara [59] de la théorie des ondes.

2. Un cadre logique est d'abord développé pour la logique et la théorie des ensembles

Malgré son origine géométrique, la théorie des topos a dans les dernières années parfois été perçue comme une branche de la logique, en partie à cause de ses contributions à la clarification qu'elle avait permise de la logique et de la théorie des ensembles. Pourtant, l'orientation de nombreux théoriciens des topos pourrait peut-être être résumée plus précisément par l'observation que ce qui est habituellement appelé logique mathématique peut être vu comme une branche de la géométrie algébrique, et qu'il est utile de rendre cette branche explicite en elle-même. Les exemples centraux étudiés par les premiers théoriciens des modèles Birkhoff [5], Tarski [100] et Robinson [94] montrent que la géométrie algébrique en est plutôt l'origine historique, et les avancées faites dans les 15 dernières années par leurs successeurs van den Dries [21], Macintyre [77], et d'autres montrent de façon flagrante la valeur persistante de la géométrie. La logique catégorique montre simplement de façon systématique qu'il n'y a pas besoin d'une terminologie et d'une notation logique séparées, spéciales, puisque l'implication et les quantificateurs sont des foncteurs adjoints de sortes que l'on trouve plus généralement dans les catégories d'ensembles non pré-ordonnés. (Spécifiquement, l'implication est le cas poset de la transformation de l'espace de fonctions qui est fondamental en analyse fonctionnelle, comme cela a été observé par Curry; et la quantification est l'application particulière, aux foncteurs de valeurs de vérité, de l'extension générale de Kan induite par le changement de domaine ([60]). De plus, les modèles eux-mêmes sont des foncteurs [69], puisque ce que les "théories" syntaxiques présentent est plus efficacement vu comme une certaine sorte de petite catégorie. Cette observation a été faite par Makkai et Reyes [83], après des contributions cruciales par Barr concernant les catégories régulières [2] et l'existence de points à valeurs booléennes [31]. Le travail de Joyal [56] et Freyd [30], tournant autour de la découverte, vers 1972, du fait que le théorème de complétude de la logique du premier ordre est une conséquence du théorème de Deligne [17] qui affirme l'existence de points pour les topos cohérents, a également joué un rôle important.

Mais il y a un raffinement clef, par rapport à la logique mathématique booléenne "classique", qui est forcé par la reconnaissance explicite (que la théorie des topos décrit) de la nature cohésive et variable des ensembles. Pour les personnes travaillant en géométrie algébrique et en analyse, il peut apparaître quelque peu excessif de faire un détour par le langage élaboré de Mitchell-Bénabou qui à son tour nécessite la sémantique de Kripke-Joyal pour obtenir en retour le contenu mathématique d'un topos spécifique. (Cette procédure parfois recommandée est strictement analogue au fait de définir un groupe comme étant le quotient du groupe libre qu'il a engendré lui-même, ce qui de façon analogue peut parfois être utile.). La clause-clef, dans cette sémantique, était présupposée dans le titre "*Quantificateurs et faisceaux*" [72], mais le cas linéaire était un théorème dans Godement 1958 [37], et exprimait par exemple, juste en termes de concepts du 20$^{\text{ème}}$ siècle, le contenu du théorème d'existence locale de Volterra. Brièvement,

a) la règle d'inférence pour la quantification existentielle est juste une expression symbolique de la propriété universelle de l'image géométrique d'une application (pas seulement dans la catégorie des ensembles où l'axiome du choix tient, mais également dans n'importe quel topos) tandis qu'

b) une figure dans une telle image vient en fait seulement localement des images dans le domaine de l'application.

Par exemple, l'image de l'application exponentielle complexe est le plan entier privé d'un point, mais les logarithmes complexes n'existent que localement. Ce théorème d'existence locale serait trivial si tous les objets étaient projectifs, comme l'axiome du choix le nécessiterait. Longtemps avant ce cadre logique, l'expérience mathématique d'utiliser les faisceaux en géométrie et analyse avait produit de nombreuses définitions correctes qui étendaient les concepts des constantes aux variables réelles (et Bénabou [4] et Joyal [56] avaient formalisé cette idée). Par exemple, le concept d'anneau local (Hakim [48]), le concept d'algèbre bornologique convexe multiplicativement (Houzel [49]) et de nombreux autres exemples ont été faisceautisés en insérant la phrase "il existe un recouvrement sur lequel..." juste au bon endroit dans la définition. De la même façon, Grothendieck et d'autres reconnaissaient de façon infaillible quelles sortes de structures étaient "préservées par tous les foncteurs qui préservent les limites finies et les colimites arbitraires". (Une liste très impressionnante fut produite par Grothendieck [47] durant son séjour en 1973 à Buffalo; durant cette même visite, il plaida pour l'abandon de sa définition précédente compliquée de "schéma", mais malheureusement, l'alternative plus simple qu'il proposa ne semble pas avoir trouvé son chemin dans les livres). Pourtant, les mathématiciens moins expérimentés ont trouvé utile une présentation explicite de la logique positive qui formalise ces définitions et ces classes de structures.

Le rôle fondamental de la logique positive (aussi connue sous le nom de logique cohérente ou logique géométrique) suggère un raffinement de la présentation standard de la logique des prédicats. Les prédicats sont des cadres pour les sous-objets, et la possibilité basique, pour deux sous-objets d'un même objet (ou l'univers du discours), que le premier soit inclus dans le second, est logiquement l'assertion qu'un prédicat en implique un autre. Dans un topos, les sous-objets d'un domaine donné forment un treillis distributif, reflétant logiquement en termes de conjonction et disjonction les opérations sur les prédicats, satisfaisant des relations d'adjonction adéquates (les règles d'inférence) relatives à l'implication. L'implication, la conjonction finie, et la disjonction sont préservées par la substitution selon une application de changement de (nom de) domaine arbitraire. La substitution signifie l'image inverse de sous-objets, une opération qui a l'"image" comme adjoint à gauche ; la dernière est connue logiquement comme quantification existentielle le long de l'application. La logique positive n'exclut pas explicitement la plus haute opération de quantification universelle (ni ses cas particuliers d'implication ou de négation) même si les adjoints à droite à la substitution interne sont aussi présents dans tout topos, parce que ces adjoints à droite ne sont typiquement pas préservés par la substitution plus générale dans une application arbitraire continue entre topos. En effet, ces applications continues bénéficiant d'une telle préservation additionnelle (de la logique du premier ordre avec quantificateurs alternés) sont juste les applications continues. Ainsi, bien que dans la logique du premier ordre, l'implication entre deux prédicats puisse être affirmée de façon équivalente en disant que leur implication quantifiée universellement a la propriété d'être "nulle part vraie", en logique positive, les relations fondamentales restent les implications binaires, une pour chaque domaine (incluant les produits cartésiens des domaines de base). D'un point de vue positif, l'élimination des quantificateurs est liée à la définissabilité des quantificateurs, au sens où quelques théories favorisées ont des axiomes suffisamment forts pour permettre carrément la définition de la quantification universelle (e.g. l'implication et la négation) en fonction des opérations positives. Pourtant, si nous nous restreignons aux topos booléens, la logique positive est juste aussi expressive que la logique du premier ordre, en autorisant des prédicats additionnels ; notamment, chaque occurrence d'une formule négative dans un axiome peut être vue comme un nouveau prédicat primitif, caractérisé par deux axiomes du treillis comme complémentaire approprié.

L'expression "topos élémentaire" est un reliquat, qui porte à confusion, de la relation à la logique, le terme "élémentaire" ayant été utilisé par certains logiciens comme synonyme de "premier ordre". L'origine de cette expression réside dans le fait utile que le concept de topos au sens de Lawvere-Tierney est définissable dans un langage logique bien plus profondément que dans le langage infini du premier ordre utilisé à l'origine par Grothendieck et ses étudiants. (De façon interne, tout topos permet l'interprétation de concepts du premier ordre, comme expliqué ci-dessous, mais c'est un autre sujet). Mais en fait, ce langage externe nécessaire est vraiment très éloigné de celui du premier ordre, étant essentiellement équationnel, même les opérateurs logiques nécessaires à ce niveau seulement pour définir les classes spéciales de topos (comme les topos à deux valeurs ou les topos satisfaisant l'axiome du choix).

3. Espaces à paramètres et topos de Grothendieck relatifs au topos de base

Les topos originaux de Grothendieck peuvent être situés [18] dans la classe plus large (des topos au sens "élémentaire") en utilisant un cas particulier du concept de relativisation de Grothendieck, de la façon suivante : une application continue (ou un morphisme géométrique) d'un topos à un autre est un foncteur avec un adjoint exact à gauche. Pour un topos fixé S, un S-topos est un topos équipé d'une application continue vers S et présenté de façon liée comme une catégorie S-cocomplete ; une application de S-topos est un triangle adéquat quasi-commutatif d'applications continues de sommet inférieur S (ce qui implique que l'adjonction, dans l'application entre les deux topos, est elle-même définie sur S). Alors si S s'avère être un univers d'ensembles abstraits, la catégorie des S-topos est équivalente à celle des S-topos au sens de Grothendieck. Dire qu'un topos est un univers d'ensembles abstraits consiste à dire que, pour des objectifs mathématiques, il satisfait des propriétés supplémentaires de 2-valuations et l'axiome du choix (ce qui implique que tous ses treillis de sous-objets sont booléens) ; des axiomes de forte infinité peuvent aussi être imposés à S si besoin, parce qu'ils sont aussi des invariants catégoriques. Pourtant, le programme persiste de refonder les mathématiques relativement à un topos de base arbitraire qui satisfait des contraintes plus faibles. Les théorèmes dans une telle refonte des mathématiques (en plus d'avoir des preuves plus explicites) ont souvent un contenu d'effet plus général que les théorèmes classiques et sont stables sous des variations adéquates continues des paramètres, quand S est un topos de faisceaux sur l'espace des paramètres. De plus, des assertions plus simples peuvent être fournies si le matériau intervenant dans la définition de ce S particulier peut être supprimé. En d'autres termes, une référence à des classes "petites" peut souvent être interprétée dans un sens plus large que seulement dans un sens simplement quantitatif, puisqu'être paramétrable par un objet de la base S peut être en fait une qualité riche.

Existe un théorème [18] selon lequel tout S-topos peut être reconstruit de S par un zigzag à trois étapes.

D'abord, des paramètres additionnels sont ajoutés d'un S-objet choisi, amenant un homéomorphisme local $S' \to S$, i.e. une application continue dont le foncteur inverse préserve effectivement la construction des puissances d'ensembles ; deuxièmement, une "surjection" localement connexe $S' \to S''$, i.e. une application continue dont le foncteur d'image inverse a un S-adjoint sur la gauche et est fidèle, ajoute l'action (parmi les niveaux de paramètres) d'une S-catégorie interne ; et finalement, une "inclusion" $S''' \to S''$, i.e. une application continue dont le foncteur en arrière est plein et fidèle, est restreinte aux objets de S'' qui sont compatibles avec une forme spécifique de recouvrement. La dernière étape consiste à exiger que les objets de S''' satisfassent des axiomes particuliers disjontifs et existentiels selon la forme qu'ils héritent de S''. Ce théorème élémentaire inclut comme cas particulier le théorème caractérisant les topos de Grothendieck via des faisceaux d'ensembles sur les petits sites généraux. L'importance de faire de la théorie des topos sur un topos de base général S (même si S est restreint à être un topos de Grothendieck, c'est-à-dire même si l'on n'est pas concerné par l'analyse non-standard, les résultats d'indépendance en théorie des ensembles, ou la théorie de la récursion d'ordre plus élevé), est assez analogue à l'importance, déjà soulignée par Grothendieck, de faire de l'algèbre commutative sur un anneau de base arbitraire ; la comparaison des ensembles à plus de variables avec ceux à moins de variables émerge et est similaire à la comparaison analogue sur les quantités variables.

Une autre caractérisation conceptuelle des S-topos est que ce sont des objets lex-total dans le domaine de grandes catégories S-paramétrées [98], [99]. Ici, une telle catégorie est dite totalement cocomplète si son plongement de Yoneda a un adjoint à gauche. Cette notion, due à Street et Walters [99], a des applications, décrites par Kelly [62].

"La notion d'une famille d'espaces paramétrée par un espace est plus efficacement traitée par les géomètres via une application unique vers l'espace des paramètres : les espaces dans la famille sont les fibres de l'application ; la relativisation par changement de base de Grothendieck s'applique dans tout topos donné pour amener, pour un objet donné, un nouveau topos de familles paramétré par cette base donnée. L'opération de somme (ou total) d'une famille peut seulement signifier l'adjoint à gauche de l'inclusion des familles constantes, i.e. au changement de base près ; dans ce cas, l'adjoint à gauche est simplement le foncteur qui oublie l'application qui dit comment le tout est distribué sur la base. Cette signification tautologique des sommes est assez efficace habituellement en mathématiques puisque les familles que l'on obtient ne sont pas arbitraires, mais sont habituellement a priori bornées. La même idée s'applique en théorie des ensembles, excepté que cette quête d'ordinaux encore plus grands amène la question de l'existence de familles arbitraires de petits ensembles indexés par un petit ensemble. Il y a deux sortes de réponses à cette question sous la forme d'axiomes de grands cardinaux : si par familles, on entend les familles définissables dans le langage du premier ordre dont les quantificateurs alternés parcourent la catégorie des ensembles que nous sommes en train de décrire, alors l'affirmation de leur existence est essentiellement équivalente au schéma de remplacement, de telle façon que la catégorie est équivalente à une catégorie dérivée d'un modèle de théorie des ensembles complète de Zermelo-Fraenkel. (L'inverse de l'équivalence est l'interprétation classique de Specker des "ensembles" ZF comme structures ressemblant à des arbres, également décrite dans l'appendice à certaines éditions des SGA4.). D'un autre côté, si par familles, on entend familles "arbitraires" (on peut donner à cela une interprétation rationnelle en imaginant notre topos comme étant un objet d'une catégorie spéciale dans un autre topos "plus grand"), alors l'affirmation qu'ils sont chacun dérivables comme fibres d'une application unique dans notre topos est équivalente à la propriété d'"univers de Grothendieck" : notre topos est équivalent à un objet catégorie qui a une cardinalité fortement inaccessible au sens du topos plus grand. L'inaccessibilité forte est habituellement définie en termes d'existence de produits de petites familles de petits ensembles, mais cela découle du fait que notre topos a des espaces d'application parce que le "produit" des familles de fibres d'une application est juste l'ensemble des sections de l'application. Bien sûr, le foncteur produit est défini comme étant l'adjoint à droite de l'inclusion des familles constantes, i.e. à changement de base près. Puisque l'adjoint à droite existe pour tout topos (où, pourtant, il consiste en les sections qui sont lisses au sens où elles sont elles-mêmes les applications dans le topos), on continue à l'appeler le produit infini et même à le noter Π ; il ne fait aucun doute qu'il n'est pas fortuit que Weil ait utilisé plus tôt Π pour noter un cas particulier de cette construction qui émerge en géométrie algébrique.

4. Espaces de fonctions et ensembles de puissance cohésive

L'avancée majeure dans la formulation du concept de topos par Lawvere-Tierney après celle de Grothendieck-Giraud est la reconnaissance explicite de la représentabilité interne des ensembles de puissances (même dans les catégories d'ensembles non abstraits comme les ensembles cohésifs ou les ensembles de variables). Ainsi la puissance exploitée par Cantor, Dedekind, et Hausdorff et d'autres pionniers dans le cas des ensembles abstraits est devenue disponible également pour une utilisation directe en géométrie et analyse. Les applications continues (ou les morphismes géométriques) dans la 2-catégorie des topos ne préserve pas nécessairement sa structure centrale modulo un isomorphisme, mais seulement modulo une application naturelle. (Ce phénomène de "relâchement" serait étrange pour des catégories ordinaires, mais il est commun pour les autres 2-catégories, telles que les catégories fermées). Parce que les ensembles de puissances sont des objets injectifs, leur algèbre peut fidèlement refléter la géométrie (comme cela a été montré en détail dans la thèse de Mikkelsen [84]) ; inversement, la plupart des topos n'ont pas assez d'objets projectifs, ce qui implique que la règle de commutation pour la quantification existentielle interne, comme souligné en (a) et (b) à la section 2, est vraiment nécessaire pour faire avancer les calculs. La manière dont la simple existence du foncteur de puissance ensembliste implique les propriétés nécessaires des topos a été montrée de manière élégante par Paré [91]. Depuis, la définition plus simple des "topos" a été "categorie avec ensemble de puissances".

La construction d'ensemble de puissances peut être utilement vue comme divisée en deux parties : d'abord, il y a une construction d'un espace d'application (discuté ci-dessous) qui est essentielle pour le calcul des variations et pour l'analyse fonctionnelle en générale (et pour la physique continue), mais qui lorsqu'elle est appliquée à un codomaine spéciale amène l'espace de l'ensemble des puissances de l'espace du domaine. (En géométrie différentielle synthétique [64], avec son application projetée dans la dynamique continue [73,74], l'application de la construction de l'espace de fonctions aux domaines spéciaux, infinitésimaux, amène le foncteur fibré tangent et le foncteur fibré supérieur[1] qui est d'une forme très facile à manipuler.).

Deuxièmement, le domaine spécial, spécifiquement un espace de valeur de vérité ou un classifieur de sous-objets, est supposé. Cela "objectifie le subjectif" dans le sens où cela postule l'existence d'un objet qui paramètre parfaitement les valeurs de vérité des jugements de la forme "telle et telle figure appartient à tel et tel sous-objet de son codomaine". Par une méthode bien comprise par les pionniers de la théorie des ensembles et formalisée pour les topos généraux par Freyd en 1972 [31], cela implique en retour (si le topos contient au moins un objet qui n'est pas Dedekind-fini) que le processus subjectif d'itération peut aussi être parfaitement paramétré (par une algèbre de Peano absolument libre ; la méthode utilise le fait que la classe de toutes les sous-algèbres contenant un point donné est paramétrable et que toute classe paramétrable de sous-objets d'un objet donné a une intersection, ces deux faits découlant aisément de la propriété universelle des ensembles de puissances). Mais en retour, la paramétrabilité de l'itération complète implique quelques conséquences physiquement contre-intuitives comme la courbe remplissant l'espace de Peano et des conséquences méthodologiquement gênantes comme le théorème d'incomplétude de Gödel. Grâce à un travail détaillé récent de van den Dries [21] et d'autres, une sorte de travail qui avait été en partie prévu par Grothendieck dans une discussion que nous avions eue en janvier 1982), il est maintenant connu que de telles conséquences peuvent être dérivées de cette manière : un topos adéquat peut être engendré par une sous-catégorie qui contient suffisamment d'espaces et d'applications raisonnablement géométriques, mais qui ne contient pas les algèbres infinies discrètes de Peano ; bien que ces dernières apparaissent comme sous-objets (des espaces géométriques) définis par les équations de vérité, elles ne peuvent pas être définies par des équations valuées dans des espaces dans la catégorie géométrique elle-même.

La première partie de la construction de l'ensemble de puissances, la notion d'espace d'applications, a semblé objectivement inévitable depuis que Bernoulli et d'autres ont développé le calcul des variations. Notamment, si un intervalle de temps, un corps, et un espace ordinaire peuvent être modélisés comme objets d'une catégorie, alors l'espace de tous les chemins dans l'espace, paramétré par l'intervalle de temps dans les chemins autorisés par la catégorie, devrait aussi être un objet, comme devrait l'être l'espace de tous les déplacements autorisés du corps dans l'espace. Alors la quantité qui dépend de la position, comme l'énergie potentielle, ou bien une quantité qui dépend du chemin, comme la vitesse au carré, pourraient être traitées comme une autre application dans la catégorie. Ainsi les trois descriptions d'un mouvement comme un chemin dans l'espace des positions, une position dans l'espace des chemins, ou simplement une application sur l'espace ordinaire d'un espace de couples (particule, instant) sont toutes équivalentes et en effet, l'équivalence (pour tous ces trois objets dans le topos) est l'axiome définissant l'espace des applications comme foncteur adjoint. Typiquement, il y a une notion adéquate de "chemin" généralisé, de telle façon qu'une fonction admissible est juste une fonction qui envoie les chemins sur les chemins de

[1] higher jet bundle

façon covariante ; ceci était un concept-clé de l'école de Volterra en analyse fonctionnelle [24]. Le fait que les espaces d'applications respectant ce simple axiome d'adjonction ne soient pas généralement présents dans la catégorie habituelle des espaces topologiques avait déjà été remarqué par Fox [27], Kelley [61], Brown [8], Spanier [96], Steenrod [97], et Day [16] et plus tard par Frölicher [32], tous ayant proposé des catégories plus ou moins orientées chemins pour réaliser cette construction fondamentale.

5. Quelques classes d'exemples

Comment construire des exemples de topos ? Bien sûr, les faisceaux d'ensembles sont nécessaires comme base pour les catégories de faisceaux abéliens sur des espaces analytiques ou algébriques particuliers comme ont pu les traiter Leray, Oka, Cartan et Serre. En effet, c'est un axe de développement intensivement poursuivi aujourd'hui dans les équations différentielles partielles, mais pour connaître l'histoire de ce domaine, je renvoie à Gray [39] et Houzel [51]. Classiquement, un faisceau sur un espace est un foncteur contravariant (avec condition de recollement) sur un ensemble partiellement ordonné de régions de l'espace. Mais les topos de foncteurs à valeurs sur des ensembles qui ne sont pas partiellement ordonnés sont plus typiques. Considérons par exemple le topos des ensembles simpliciaux qui a été utilisé de manière très répandue en topologie algébrique depuis 1950, et dont le rôle classifiant particulier est expliqué dans Mac Lane et Moerdijk [81] ou bien le topos des foncteurs des anneaux vers les ensembles qui a été la base de la définition simplifiée par Cartier [14] des groupes algébriques et qui a été le précurseur de presque toutes les constructions de modèles particuliers de la géométrie différentielle synthétique [73, 87]. Un traitement détaillé d'un topos de cette sorte qui contient tous les espaces analytiques comme sous-catégorie pleine a été fourni par Grothendieck dans le séminaire de Cartan sur les familles d'espaces analytiques de 1960 [43], même avant que la définition générale par Grothendieck des topos n'ait été cristallisée par Giraud en 1963 [36].

A une position de généralité intermédiaire entre le topos d'espaces généraux et le topos de faisceaux sur un espace classique particulier, on trouve l'idée de topos de faisceaux sur un espace généralisé ; on connaît mieux le fait que les faisceaux sur une sorte particulière d'espace, sur lequel le théorème de fonction implicite ne s'applique pas, ne sont pas complètement déterminés par leur restriction à des sous-régions. Le fait que le théorème de fonction implicite ne s'applique pas en géométrie algébrique est devenu une vertu par la construction brillante de Grothendieck du topos étale d'un espace algébrique, basé sur un site particulier qui n'est pas un espace partiellement ordonné bien qu'il soit encore assez spécial. L'idée est encore plus ancienne d'un espace généralisé équipé non seulement d'un ensemble partiellement ordonné de régions ouvertes, mais également d'une action par les homéomorphismes d'un groupe. Cette catégorie amène à une 2-sous-catégorie de topos qui unifie très efficacement le développement complet qui a commencé avec la découverte par Hurewicz-Hopf de l'effet du groupe fondamental d'un espace sur son homologie [79], en fournissant un univers dans lequel l'espace, ses espaces couvrant, et le groupe fondamental lui-même sont sur un pied d'égalité et sont connectés par des applications, et pour lesquels la cohomologie de l'espace et du groupe sont strictement les instances de la même construction, notamment celle de la catégorie dérivée de l'abélianisation d'un topos. (Les actions d'un groupe sur les ensembles constituent les objets du genre le plus simples des topos booléens.) Les résultats de Joyal et Tierney [58] et de Joyal et Moerdijk [57] étendent ces idées pour donner un groupoide localique : la présentation du groupoide du topos général, un peu comme l'espace général, devrait classiquement être présentée comme le quotient d'un espace de dimension nulle ; comme Mac Lane et Moerdijk l'ont montré dans leur résumé utile du domaine [82], cette présentation étendue n'a pas encore été analysée ni non plus appliquée. Johnstone [54] en démontrant quelques théorèmes de représentation puissants concernant ces extensions de la notion d'espace généralisé, a en effet montré que le récit philosophique commun dans les années 1970 aux topos (basés sur la variation paramétrée et la logique interne) est trop restrictif, ce qui m'a amené dans cet article à baser mon récit sur les relations dialectiques entre la cohésion et la variation et entre la logique interne à un topos et interne à une catégorie de topos.

6. Quelques développements récents

Bien que le $25^{\text{ème}}$ anniversaire de la théorie "élémentaire" des topos (ainsi que le $50^{\text{ème}}$ anniversaire de la théorie des catégories elle-même) ait été célébré à Halifax en 1995, et bien que les fondamentaux en semblent bien établis dans de nombreux articles et livres précédemment mentionnés, de nouvelles avancées qualitatives continuent de voir le jour. Un tel exemple est le travail de Funk, et de Bunge-Funk et Bunge-

Carboni [33], [12], [11].

À la suite d'un exposé à Oberwolfach en 1966 dans lequel j'avais proposé une théorie des distributions (pas seulement dans mais également) sur les topos de préfaisceaux, en 1983 à Aarhus, j'ai posé quelques questions concernant les distributions sur les S-topos. La base de la définition et des questions est une paire d'analogies avec des théories connues (l'algèbre commutative et la théorie de la mesure) pour les quantités variables, couplée avec le fait qu'il y a d'importants exemples de "quantités" variables S-valuées dont les domaines de variation sont les S-topos. On prend les faisceaux sur le topos pour les quantités variant intensivement, i.e. simplement les objets de la catégorie. (Bien sûr, le terme topos signifie "lieu" ou "situation", mais Grothendieck traite la situation générale en traitant plutôt la catégorie des quantités S-valuées qui varient continument sur elle, de la même façon qu'un K-schéma affine est décrit en traitant la K-algèbre des fonctions sur lui. Peut-être que pour éviter la confusion, une notion différente aurait dû être utilisée, E pour la situation et $C(E)$ pour la catégorie des faisceaux sur E, mais la pratique notationnelle a utilisé le même symbole pour les deux, même si fonctoriellement, elles sont opposées de la même façon que X et $C(X)$ le sont en topologie classique. En topologie classique, il n'y a pas d'analogue strict, pour les fonctions continues réelles ou complexes $C(X)$, à l'opération spatial en avant adjoint à droite de l'homomorphisme f^* qui ramènent en arrière les fonctions continues le long d'une fonction continue générale f.). Ces quantités à valeurs sur des ensembles peuvent être ajoutées via des colimites S-paramétrées dans le topos, et elles peuvent être multipliées via les limites finies des faisceaux. Un point est juste une application continue vers le S-topos donné depuis S lui-même (qui est bien sûr l'objet terminal dans la 2-catégorie des S-topos); la partie image inverse du point (ou l'évaluation en le point) est un foncteur qui préserve à la fois l'"addition" et la "multiplication".

Ainsi nous poursuivons le début de l'analyse et définissons une distribution ou une quantité extensivement variable sur un S-topos comme étant une fonction continue linéaire ou un point généralisé, i.e. un foncteur vers S qui préserve les S-colimites, mais pas nécessairement les limites finies. Par exemple, étant donnée une petite catégorie C dans S, les actions à gauche de C sur les objets de S est un S-topos de fonctions dont la catégorie de distributions correspondante ou les processus d'intégration est juste la catégorie S-cocomplète des actions à droite de C sur les objets de S (par un cas particulier du théorème de Kan [60], [35]). Il est facile de voir que dans cet exemple particulier, où aucun recouvrement de Grothendieck n'intervient, la réponse à la question suivante est affirmative. Y a-t-il, pour tout S-topos donné E un autre topos $M(E)$ dont les points sont juste les distributions sur E ? Cette idée géométrique de l'espace de toutes les mesures sur un espace donné peut être décrite selon l'analogie de l'algèbre commutative comme algèbre symétrique, c'est à dire, pour une catégorie S-cocomplète adéquate, est-il toujours possible de lui adjoindre des produits finis (et plus généralement des produits fibrés) d'une manière libre compatible avec la distributivité pour obtenir une catégorie qui est la (catégorie des faisceaux sur) un S-topos ? Cette formulation relativise et renforce l'idée de $M(E)$, de telle façon que comme tous 2-adjoints, M est unique à équivalence près s'il existe.

La question de l'existence semblait sérieuse, puisqu'il est connu qu'il n'y a en général pas d'espace correspondant $F(E)$ des quantités intensives : alors qu'il y a un topos facile à décrire [104] $F(1) = S(X)$ sur S qui est l'"algèbre des polynômes" ou la "ligne affine" dans lequel les S-morphismes vers lui depuis tout S-topos E classifient précisément tous les faisceaux sur (les objets dans) E, des espaces de fonctions existent dans Top$/S$ seulement pour les exposants "localement compacts" E (i.e. seulement [55] pour les rétractions de topos cohérents). En 1995, Bunge a montré que $M(E)$ existe comme S-topos pour tout S-topos E, une preuve plus élégante ayant été donnée par Bunge et Carboni dans [11]

Quels exemples de distributions pouvons-nous nous attendre à trouver ? Pour tout S-topos localement connexe A, il y a par définition un adjoint à gauche de l'adjoint à gauche de l'application structurelle vers S ; cet adjoint à gauche supplémentaire ou foncteur d'"ensemble de composants reliés" est alors automatiquement une distribution sur A qui pourrait peut-être être pensée comme étant la mesure de comptage puisqu'elle est invariante sous tous les automorphismes de A (et même sous tous les endomorphismes essentiels de A). Maintenant, comme avec toute doctrine de quantité extensive, les distributions peuvent être envoyées en avant selon n'importe quelle application continue entre topos, en composant simplement ici le processus d'intégration avec la partie image inverse de l'application. Les résultats remarquables de Funk incluent le fait que toute distribution sur n'importe quel E est le push forward selon une application, pour un certain A localement connexe, de la mesure de comptage des composants sur A. Parmi tous ces A localement reliés sur E qui représentent ainsi une distribution donnée sur E, il y en a un unique le plus proche de E ; la relation de celui-ci en particulier vers E s'avère être, selon le travail de Bunge et

Funk, topos-théoriquement identique à celui de la propagation complète sur E, une notion découverte par Fox [28] dans son investigation topologique des recouvrements ramifiés. D'autres relations avec la topologie classique continuent d'être découvertes, par exemple la description par Plewe d'une large classe d'applications de descente comme triquotients au sens de Michael [93], [85], également présentée lors de la célébration à Halifax.

7. Depuis et vers la physique continue

Quel a été l'élan qui a nécessité la simplification et la généralisation du concept de topos de Grothendieck, si en effet l'application à la logique et à la théorie des ensembles n'étaient pas décisives ? Tierney avait souhaité que la théorie des faisceaux soit axiomatisée pour être utilisée de manière efficace en topologie algébrique. Ma propre motivation venait de mon étude initiale de la physique. Les fondements de la physique continue des matériaux, dans l'esprit de Truesdell, Noll, et d'autres, nécessitaient des idées physiques puissantes et claires qui avaient malheureusement été submergées par un appareil mathématique incluant non seulement les séquences de Cauchy et les mesures additives dénombrables, mais également des choix ad hoc de graphiques pour les variétés et de limites inverses des espaces de Hilbert Sobolev, pour obtenir pour atteindre les espaces nucléaires simples de quantités variant intensivement et extensivement. Mais, comme le regrettait Fichera [25], tout cet appareil fournissait souvent un ajustement très incertain aux phénomènes. Cet appareil pouvait s'avérer utile dans la solution de certains problèmes mais ne nécessitait-il pas que les problèmes eux-mêmes et les axiomes nécessaires soient exprimés d'une manière directe et claire ? Et cela ne pouvait-il pas mener à une solution plus simple et tout aussi rigoureuse ? Ce sont à ces questions auxquelles j'ai commencé d'appliquer la méthode des topos dans mes exposés en 1967 à Chicago [73], [74]. Il était clair qu'un travail sur la notion de topos elle-même serait nécessaire pour parvenir à ce but. J'ai passé l'année 1961-62 avec les logiciens de Berkeley, croyant qu'en écoutant les experts des fondements pourrait être le chemin à emprunter pour clarifier les questions des fondements. (Peut-être que mon premier professeur Truesdell avait eu une conviction similaire 20 ans plus tôt quand il avait passé une année [15] avec les logiciens de Princeton logicians.). Bien que ma croyance se tempère au fur et à mesure, j'ai acquis des connaissances à propos de constructions telles que le forcing de Cohen qui semblait également nécessiter une simplication pour qu'un plus grand nombre de personnes puissent la comprendre suffisamment pour la faire avancer davantage. Ainsi la théorie (comme je l'avais proposé à Rome en 1969, et expliqué à l'ICM de 1970) a été d'abord appliquée par Tierney [101] et Bunge [9] à des questions comme l'indépendance de l'hypothèse du continu et la conjecture de Souslin.

En effet, le rôle-clef de l'ensemble de puissance (et la non importance relative pour les mathématiques de l'espace et de la quantité du schéma de remplacement) avait clairement émergé d'une étude des nombreuses reformulations par Scott de la théorie des ensembles du milieu du siècle. Mais la découverte clef rapportée lors de l'exposé à Rome (après avoir été travaillé au Forschungsinstitut Eckmann à Zurich) a été que non seulement un foncteur de puissance ensembliste P existe de manière non ambigue dans un grand nombre de catégories émergeant mathématiquement, mais que toute topologie de Grothendieck, i.e. toute notion raisonnable de “recouvrement” préféré permettant une restriction aux objets “faisceaux” satisfaisant une disjonction supplémentaire ou des conditions “existentielles”, est exprimable comme une seule application dans une telle catégorie, en effet comme un endomorphisme de l'objet-vérité $P1$ qui peut être considéré subjectivement comme un opérateur modal du type “il est localement vrai que...”.

Cette observation, avec l'axiomatisation précédente de l'adjoint des espaces de fonctions, a rendu clair le fait qu'en travaillant au niveau des topos, presque toutes les constructions et assertions nécessitent seulement un langage équationnel algébrique essentiellement finitaire pour la formalisation, les langages d'ordres supérieurs infinitaires avec alternances de quantificateurs de Frege externes n'étant pas nécessaires, non seulement pour les axiomes de la théorie générale d'un topos, mais également pour particulariser de nombreuses sortes très spéciales de topos, comme celles qu'on trouve en combinatoire et en géométrie différentielle.

L'opérateur de négation-de-la-négation dans la logique de Heyting a été facilement vu comme satisfaisant l'axiome de Lawvere-Tierney et est ainsi un exemple particulier de topologie de Grothendieck valable dans tout topos, il n'est pas seulement central à des constructions qui “forcent” des résultats d'indépendance en théorie des ensembles et qui extraient la partie minimale dense [52] d'un espace en topologie qui consiste en les sous-corps substantiels [89], [74] en physique continue (tous ceux-ci intervenant juste dans le cas d'un topos avec site partiellement ordonné), mais il permet une formulation très succincte de la condition qu'un topos satisfait le Nullstellensatz de Hilbert, exprimant le rôle important de la théorie de Galois en dimension zéro dans la géométrie algébrique comme un tout. Notamment, les faisceaux pour la double négation, qui dans un certain sens forment la partie booléenne d'un topos arbitraire, constituent, dans le cas d'un topos engendré tous les espaces algébriques définis sur un corps de base donné, le topos classifiant des corps d'extension algébrique de la base (ce sous-topos est peut-être une entité plus traitable que la fermeture algébrique qui existe seulement comme condensation rigidifiée non canonique). Le Nullstellensatz concerne ces quelques topos dans lesquels tous les objets non vides ont des figures zéro-dimensionnelles, i.e. ces points dont les domaines sont les compagnons dialectiques de tels faisceaux booléens [75].

Quelques aspects géométriques du programme de 1967, tels que le rôle des espaces d'applications des objets infinitésimaux, furent travaillés sous le nom de géométrie différentielle synthétique par Wraith [104], Kock [64], Reyes [87], Bunge et Gago [10], Dubuc [22], Yetter 105], Penon [92], Bruno [7], Moerdijk [87] et d'autres. Quelques livres traitant de la théorie des topos simplifiés (Mac Lane et Moerdijk étant le texte le plus récent et le plus lisible) avec les trois excellents livres de géométrie différentielle synthétique [64], [87], [68] fournissent une base solide sur laquelle un traitement plus avancé de l'analyse fonctionnelle et le développement nécessaire de la physique continue peuvent être construits.

Bibliographie

[1] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des Topos, SGA 4*, Seconde édition, Springer Lecture Notes in Math. **269** et **270**, 1972.

[2] M. Barr, *Non-abelian full embedding: outline.* Actes, Congrès International, **1** (1970) 309-312.

[3] M. Barr, *Toposes without points*, J. Pure Appl. Algebra **5** (1974) 265-280.

[4] J. Bénabou, *On a formal language for topos theory*, cours non publié, Université de Montréal, avril 1973.

[5] G. Birkhoff, *Subdirect Unions in Universal Algebra*, Bull. Amer Math. Soc. **50** (1944) 764-768.

[6] O. Bruno, *Logical opens of exponential objects*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **26** (1985) 311-323.

[7] O. Bruno, *Vector fields on function spaces in well-adapted models of synthetic differential geometry*, J. Pure Appl. Algebra **45** (1987) 1-14.

[8] R. Brown, *Function Spaces and Product Topologies*, Quart. J. Math. Oxford (2) **15** (1964) 238-250.

[9] M. Bunge, *Topos theory and Souslin's hypothesis*, J. Pure Appl. Algebra **4** (1974) 159-187.

[10] M. Bunge et F. Gago, *Synthetic aspects of C^∞-mappings, II: Mather's theorem for infinitesimally represented germs*, J. Pure Appl. Algebra **55** (1988) 213-250.

[11] M. Bunge et A. Carboni, *The symmetric topos*, J. Pure Appl. Algebra, **105** (1995) 233-249.

[12] M. Bunge et J. Funk, *Spreads and the symmetric topos*, J. Pure Appl. Algebra **113** (1996) 1-38.

[13] H. Cartan et J.-P. Serre, *Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes*, C. R. Acad. Sci. Paris **237** (1953) 128-130.

[14] P. Cartier, *Groupes algébriques et groupes formels*, Colloq. Théorie des groupes algébriques, Bruxelles, Librairie Universitaire, Louvain, Gauthier-Villars, Paris (1962) 87-111.

[15] A. Church, *Introduction to mathematical logic* (notes by Truesdell) Princeton, 1956.

[16] B. Day, *On the relationship of Spanier's quasitopological spaces to k-spaces*, M.Sc. thesis, University of Sydney, 1968.

[17] P. Deligne, *Limites inductives locales*, Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas, Tome 2, SGA 4, Second Edition, *Springer Lecture Notes in Math.* **270** (1972) 62-82.

[18] R. Diaconescu, *Change of base for toposes with generators*, J. Pure Appl. Algebra **6** (1975) 191-218.

[19] R. Diaconescu, *Axiom of choice and complementation*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975) 176-178.

[20] A. Douady, *Le théorème des images directes de Grauert (d'aprés Kiehl-Verdier)*, Astérisque **16** (1974) 49-62.

[21] L. van den Dries, *A generalization of the Tarski-Seidenberg theorem and some nondefinability results*, Bull. Amer. Math. Soc. **15** (1986) 189-193.

[22] E. J. Dubuc, *C^∞-schemes*, Amer. J. Math. **102** (1981) 683-690.

[23] S. Eilenberg et S. Mac Lane, *General Theory of Natural Equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945) 231-294.

[24] L. Fantappiè, *I funzionali analitici*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. (11) **3** (1930) 453-683.

[25] G. Fichera, *I difficili rapporti fra l'Analisi funzionale e la Fisica matematica*, Rendiconti (9) Accademia Nazionale dei Lincei, Roma (1990) 161-170.

[26] G. Fichera, *Vito Volterra and the birth of functional analysis*, Development of Mathematics 1900-1950 (éd. Jean-Paul Pier) Birkhäuser Basel, 1994, 171-183.

[27] R. Fox, *On topologies for function spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945) 429-432.

[28] R. Fox, *Covering spaces with singularities, Algebraic Geometry and Topology: a Symposium in Honor of S. Lefschetz*, Princeton University Press (1957) 243-257.

[29] P. Freyd, *Abelian Categories*, 1963.

[30] P. Freyd, A. Scedrov, *Categories, Allegories*, North Holland, Amsterdam, 1990.

[31] P. Freyd, *Aspects of topoi*, Bull. Austral, Math. Soc. **7** (1972), 1-76.

[32] A. Frölicher, A. Kriegl, *Linear Spaces and Differentiation Theory*, Wiley-Interscience, 1988.

[33] J. Funk, *The display locale of a cosheaf*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **36** (1995) 53-93.

[34] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math, France **90** (1962) 323-448.

[35] P. Gabriel et M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Ergebnisse der Math. **35**, Springer-Verlag Berlin, 1967.

[36] J. Giraud, *Analysis situs*, Séminaire Bourbaki, Années 1962/63-1963/64, 189-199. Société Mathématique de France, 1995.

[37] R. Godement, *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.

[38] H. Grauert, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, Publ. Math. IHES, Bures-sur-Yvette, 1960.

[39] J. Gray, *Fragments of the history of sheaf theory*, in Applications of Sheaves (éds. M.P. Fourman et al.) Springer Lecture Notes in Math. **753**, Springer-Verlag, Berlin (1979) 1-79.

[40] A. Grothendieck, *Sur certains espaces des fonctions holomorphes*, J. Reine Angew. Math., **192** (1953) 35-64 et 77-95.

[41] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of the AMS **16**, 1955.

[42] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J. **9** (1957) 119-221.

[43] A. Grothendieck, *Techniques des constructions en géométrie analytique*, Séminaire Henri Cartan, 1960-61 **11**, 1-28.

[44] A. Grothendieck, *Séminaire de géométrie algébrique*, **1-7**, Publ. Math. IHES 1960-69.

[45] A. Grothendieck, *Revêtements étales et Groupe Fondamental ("SGA 1")*, Springer Lecture Notes in Math.**224**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[46] A. Grothendieck, *Algebraic groups*, Buffalo Lecture Notes F. Gaeta, 1973.

[47] A. Grothendieck, *List of classes of structures*, 1973 (maintenant dans le fichier de J. Duskin).

[48] M. Hakim, *Topos Annelés et Schémas Relatifs*, Ergebnisse der Mathematik **64** Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[49] A. Hirschowitz, C. Houzel, *Un spectre pour les algèbres bornologiques complètes*, C. R. Acad. Sci. Paris **274** (1972) 401-404.

[50] C. Houzel, *Espaces analytiques relatifs et théorème de finitude*, Math. Ann. **205** (1973) 13-54.

[51] C. Houzel, (Historical Introduction) in M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag, 1990.

[52] J. Isbell, *Atomless parts of spaces*, Math. Scand. **31** (1972) 5-32.

[53] P. Johnstone, *Topos Theory*, Academic Press, New York, 1977.

[54] P. Johnstone, *How general is a generalized space*, Dowker Memorial Volume, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **93** (1985) 77-111.

[55] P. Johnstone et A. Joyal, *Continuous categories and exponentiable toposes*, J. Pure Appl. Algebra **25** (1982) 255-296.

[56] A. Joyal (with A. Boileau) *La logique des topos*, J. Symbolic Logic **46** (1981) 6-16.

[57] A. Joyal et I. Moerdijk, *Toposes are cohomologically equivalent to spaces*, Amer. J. Math, **112** (1990) 87-96.

[58] A. Joyal et M. Tierney, *An extension of the Galois theory of Grothendieck*, Mem. Amer. Math. Soc. **309**, 1984.

[59] M. Kashiwara, P, Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag 1990.

[60] D. Kan, *Adjoint Functors*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958) 294-329.

[61] J. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, 1955.

[62] M. Kelly, *A survey of totality*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **27** (1986) 109-132.

[63] M. Kelly, *Basic Concepts of Enriched Category Theory*, London Math, Soc. Lecture Note Ser. **64**, Cambridge University Press, 1982.

[64] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **51**, Cambridge University Press, 1981.

[65] A. Kriegl, L. D. Nel, *A convenient setting for holomorphy*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **26** (1985) 273-309.

[66] A. Krieg, L. D. Nel, *Convenient vector spaces of smooth functions*, Math. Nachr. **147** (1990) 39-45.

[67] A. Kriegl, P. Michor, *Aspects of the theory of infnite-dimensional manifolds*, Differential Geometry and Appl. **1** (1991) 159-176.

[68] R. Lavendhomme, *Basic concepts of Synthetic Differential Geometry*, Kluwer, 1996.

[69] F. W. Lawvere, *Functorial Semantics of Algebraic Theories*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, **50** (1963) 869-872.

[70] F. W. Lawvere, *An elementary theory of the category of sets*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, **52** (1964) 1506-1511.

[71] F. W. Lawvere, *Adjointness in Foundations*, Dialectica **23** (1969) 281-296.

[72] F. W. Lawvere, *Quantifiers and Sheaves*, Proc. Intern. Congress on Math., Gauthier-Villars, Nice (1971) 329-334.

[73] F. W, Lawvere, *Categorical Dynamics*, (1967 Chicago Lectures) Topos-Theoretic Methods in Geometry, Aarhus 1979. (See also Historical Remarks in [64] 288-294.

[74] F. W. Lawvere, *Introduction to Categories in Continuum Physics*, Springer Lecture Notes in Math. **1174**, 1986.

[75] F. W. Lawvere, *Categories of Space and of Quantity*, The Space of Mathematics. Philosophical, Epistemological and Historical Explorations. De Gruyter, Berlin (1992) 14-30.

[76] J. Leray, *Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations*, J. Math. Pures Appl. **9** (1945) 95-248.

[77] A. Macintyre, K. McKenna, et L. van den Dries, *Elimination of quantifiers in algebraic structures*, Adv. in Math. **47** (1983) 74-87.

[78] S. Mac Lane, *Duality for groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950) 485-516.

[79] S. Mac Lane, *The origins of the cohomology of groups*, Enseign. Math, **24** (1978) 1-29.

[80] S. Mac Lane, *Concepts and categories in perspective*, in A Century of Mathematics in America (Part I), American Mathematics Society, Providence, RI (1988) 323-366.

[81] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag, New York Inc. 1992.

[82] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Topos theory, Handbook of Algebra* **1**, (ed. M. Hazewinkel) Elsevier, Amsterdam (1996) 501-528.

[83] M. Makkai, G.E. Reyes, *First-Order Categorical Logic*, Springer Lecture Notes in Math. **611**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[84] C. Mikkelsen, *Lattice theoretic and logical aspects of elementary topoi*, Various Publications Series, **25** Matematisk Institut, Aarhus 1976.

[85] E. Michael, *Inductively perfect maps and triquotient maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981) 115-119.

[86] W. Mitchell, *Boolean topoi and the theory of sets*, J. Pure Appl. Algebra **2** (1972) 261-274.

[87] I. Moerdijk, G.E. Reyes, *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[88] R. Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds*, 3rd edition North Holland, Amsterdam, 1985.

[89] W. Noll, *The geometry of contact, separation, and reformation of continuous bodies*, Arch, Rational Mech. Anal, **122** (1993) 197-212.

[90] G. Osius, *Logical and set-theoretical tools in elementary topoi*, Model Theory and Topoi, Springer Lecture Notes in Math. **445** (1975) 297-346.

[91] R. Paré, *Colimits in topoi*, Bull. Amer Math, Soc. **80** (1974) 556-561.

[92] J. Penon, *Infinitésimaux et intuitionnisme*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **22** (1981) 67-72.

[93] T. Plewe, *Localic triquotient maps are effective descent maps*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **122** (1997) n°1, 17-43.

[94] A. Robinson, *A theorem on algebraically closed fields*, J. Symbolic Logic **14** (1949) 686-694.

[95] J. Sebastião e Silva, *Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, Portugal Math. **12** (1953) 1-46.

[96] E. Spanier, *Quasitopologies*, Duke Math. J. **30** (1963) 1-14.

[97] N. Steenrod, *A convenient category of topological spaces*, Michigan Math. J. **14** (1967) 133-152.

[98] R. Street, *Notions of topos*, Bull. Austral. Math. Soc. **23** (1981) 199-208.

[99] R. Street, R. Walters, *Yoneda structures on 2-categories*, J. Algebra **50** (1978) 350-379.

[100] A. Tarski, *Some topics on the borderline between algebra and logic*, Proc. Int. Congress of Mathematicians, Harvard University Press (1950) 718-719.

[101] M. Tierney, *Sheaf theory and the continuum hypothesis*, Toposes, Alg. Geom. and Logic, Springer Lecture Notes in Math. **274**, Springer-Verlag, Berlin (1972) 13-42.

[102] V. Volterra, *Opere matematiche*, Acad. Naz. dei Lincei, 1954-1962.

[103] G. Wraith, *Categorical dynamics and the Lie algebra of a group object*, (unpublished) 1972.

[104] G. Wraith, *Lectures on elementary topoi*, Model theory and topoi, Springer Lecture Notes in Math. **445** (1975) 114-206.

[105] D. Yetter, *On right adjoints to exponential functors*, J. Pure Appl. Algebra **45**, 1987, 287-304, Corrections: J. Pure Appl. Algebra **58** (1989) 103-105.

[106] M. Zorn, *Derivatives and Fréchet differentials*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946) 133-137.

Bâtiment de Mathématique
Université de Buffalo
Université d'État de New York
Buffalo, N.Y. 14260
États-Unis
wlawvere@buffalo.edu