QUELQUES REMARQUES SUR LA CROISSANCE DE LA FONCTION $\zeta(s)$

PAR M. ERNST LINDELÖF

1. Nous commençons par rappeler quelques propriétés connues de la fonction

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots,$$

dont nous aurons à nous servir dans la suite.

En posant

$$s = \sigma + it,$$

on conclut d'abord de l'expression donnée par Euler :

$$\zeta(s) = \prod \left(\frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^s}} \right),$$

que les inégalités

$$\prod \left(\frac{1}{1 + \dfrac{1}{p^\sigma}} \right) < |\zeta(\sigma + it)| \leq \prod \left(\frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^\sigma}} \right)$$

sont vérifiées pour $\sigma > 1$, d'où cette première propriété :

L'expression $|\zeta(\sigma + it)|$ reste comprise entre des limites finies et positives dans le domaine $\sigma \geq 1 + \varepsilon$, le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on voudra.

En se servant de la relation fonctionnelle

(1) $$\chi(s) = \chi(1 - s),$$

où

$$\chi(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

on peut en conclure comment se comporte $|\zeta(\sigma + it)|$ pour $\sigma < 0$.

Référence : *Bulletin des Sciences mathématiques*, Série 2, Tome 32, décembre 1908, p.341-356.
Transcription en Latex : Denise Vella-Chemla, juillet 2022.

En effet, la formule de Stirling fournit l'égalité asymptotique

$$|\Gamma(\sigma+it)| = e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}[1+\varepsilon(\sigma,t)],$$

l'expression $\varepsilon(\sigma,t)$ tendant vers zéro lorsque $|t|$ augmente indéfiniment, et cela *uniformément* pour les valeurs σ comprises dans un intervalle fini quelconque. À l'aide de cette égalité on conclut de (1), en observant que

$$|\zeta(\sigma+it)| = |\zeta(\sigma-it)|$$

(2)
$$|\zeta(\sigma+it)| = \left|\frac{t}{2\pi}\right|^{\frac{1}{2}-\sigma} |\zeta(1-\sigma+it)|[1+\varepsilon(\sigma,t)],$$

$\varepsilon(\sigma,t)$ jouissant de la même propriété que ci-dessus. Or nous venons de voir que, si

$$1-\sigma \geq 1+\varepsilon$$

d'où

$$\sigma \leq -\varepsilon$$

l'expression

$$|\zeta(1-\sigma+it)|$$

reste comprise entre deux limites finies et positives, quel que soit t, et nous arrivons donc au résultat suivant :

L'expression

(3)
$$\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{t^{\frac{1}{2}-\sigma}}\right|$$

reste comprise entre des limites finies et positives pour

$$-\sigma_0 \leq \sigma \leq -\varepsilon, \qquad |t| \geq t_0(>0),$$

les nombres positifs ε et σ_0 étant donnés respectivement aussi petit et aussi grand qu'on voudra.

Quant à l'*intervalle critique*,

$$0 \leq \sigma \leq 1$$

il nous suffira provisoirement de savoir que $|\zeta(\sigma+it)|$ *croît moins vite qu'une puissance finie de $|t|$ pour les valeurs σ faisant partie de cet intervalle.* Ce résultat s'obtient le plus facilement par la formule sommatoire d'Euler, qui, sous sa forme la plus simple, nous donne[1]

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau^{s+1}}d\tau, \tag{4}$$

ou encore, en intégrant par parties,

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - \frac{s(s+1)}{1.2}\int_1^\infty \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau^{s+2}}d\tau, \tag{5}$$

$\varphi_1(\tau)$ et $\varphi_2(\tau)$ désignant les fonctions périodiques de période 1 qui, dans l'intervalle $0 < \tau < 1$, se réduisent respectivement aux polynomes $\tau - \dfrac{1}{2}$ et $\tau^2 - \tau + \dfrac{1}{6}$. En effet, la formule (4) nous montre tout de suite que l'expression

$$\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{t}\right|$$

reste au-dessous d'une limite finie pour $\sigma \geq \varepsilon, |t| \geq t_0 (> 0)$, et la formule (5), qu'il en est de même de l'expression

$$\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{t^2}\right|$$

pour $\sigma \geq -1+\varepsilon, |t| \geq t_0 (> 0)$, le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on voudra.

Pour les valeurs particulières $\sigma = 1$ et $\sigma = 0$, nous aurons toutefois besoin d'un résultat plus précis, dû à M. Mellin[2], suivant lequel *les expressions*

$$\frac{|\zeta(1+it)|}{\log|t|} \quad \text{et} \quad \frac{|\zeta(it)|}{|t|^{\frac{1}{2}}\log|t|} \tag{6}$$

restent au-dessous d'une limite finie pour $|t| \geq t_1 (> 1)$. Ce résultat se déduit le plus aisément de la formule (4), en l'écrivant sous la forme

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} - s\int_n^\infty \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau^{s+1}}d\tau.$$

En effet, il en résulte immédiatement, pour $s = 1+it$,

$$|\zeta(1+it)| < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{|t|} + \sqrt{1+t^2}\int_n^\infty \frac{|\varphi_1(\tau)|}{\tau^2}d\tau.$$

1. Voir par exemple notre Ouvrage : *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*, p. 80-83.

2. *Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXIX, n° 4, 1900, p. 48-49)

En observant qu'on a

$$|\varphi_1(\tau)| \leq \frac{1}{2},$$

d'où

$$\int_n^\infty \frac{|\varphi_1(\tau)|}{\tau^2} d\tau < \frac{1}{2n},$$

et, d'autre part,

$$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} < \int_1^n \frac{d\tau}{\tau} = \log n,$$

on en conclut l'inégalité plus simple

$$|\zeta(1+it)| < 1 + \log n + \frac{1}{|t|} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{2n}.$$

Pour $|n| = [t]$, cette inégalité nous montre que la première des expressions (6) reste au-dessous d'une limite finie pour $|t| \geq t_1$, et, d'après l'égalité (2), il en est de même de la seconde de ces expressions.

2. Voici maintenant le lemme très simple sur lequel nous aurons à nous appuyer, et qui n'est d'ailleurs qu'un cas très particulier d'un théorème établi par M. Phragmén et par nous dans un Mémoire récent [3] :

Soit $f(s)$ une fonction monogène de la variable $s \equiv \sigma + it$ jouissant des propriétés suivantes :

1° *Elle est régulière pour tout point à distance finie faisant partie du domaine*

(7) $$\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, \qquad t \geq t_0 (> 0).$$

2° *Sur le contour de ce domaine, on a*

(8) $$|f(s)| \leq C,$$

C étant une constante finie.

3° *Il existe un nombre fini μ tel que l'expression*

$$\frac{|f(\sigma + it)|}{t^\mu}$$

reste dans le domaine (7) au-dessous d'une limite finie.

3. E. Phragmén et Ernst Lindelöf, *Sur l'extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* (*Acta mathematica*, t. XXXI, 1908).

Dans ces conditions, on peut affirmer que l'inégalité (8) subsiste pour tout point du domaine (7).

Nous indiquerons brièvement la démonstration de ce lemme, en renvoyant pour plus de développements au Mémoire cité.

Considérons la fonction

$$F(s) = e^{i\varepsilon s} f(s) \qquad (\varepsilon > 0),$$

qui est évidemment régulière dans le domaine (7). Le module

$$|e^{i\varepsilon s}| = e^{-\varepsilon t}$$

étant inférieur à 1 pour $t > 0$, on aura, d'après la condition 2°,

$$|F(s)| < C$$

sur le contour de ce domaine. D'autre part, comme $e^{-\varepsilon t} t^{\mu}$ tend vers zéro lorsque t augmente indéfiniment, quelque petit qu'on se donne le nombre ε, il résulte de la condition 3° que $F(\sigma + it)$ tend également vers zéro, et cela uniformément pour $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$.

Ayant pris arbitrairement un point $s' = \sigma' + it'$ à l'intérieur du domaine (7), on pourra donc choisir un nombre T, supérieur à t', tel qu'on ait

$$|F(s)| < C$$

pour

$$\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, \qquad\qquad t = T.$$

D'après ce qui précède, l'inégalité $|F(s)| < C$ sera alors vérifiée sur tout le contour du rectangle retranché du domaine (7) par la droite $t = T$, et il en résulte, en vertu d'un principe bien connu, que cette inégalité subsiste aussi à l'intérieur de ce rectangle et, en particulier, au point s', en sorte qu'on aura

$$|F(s')| < C,$$

ou bien

$$|f(s')| < C\, e^{\varepsilon t'}.$$

Ce résultat étant démontré quelque petit que soit ε, il faut bien qu'on ait

$$|f(s')| \leq C,$$

et notre lemme se trouve ainsi démontré.

3. Le lemme qui précède nous permet d'établir, relativement à la croissance de la fonction $\zeta(s)$ dans l'intervalle critique, le résultat suivant, qui comporte une plus grande précision que ceux qu'on avait obtenus jusqu'à présent [4].

L'expression

$$\frac{|\zeta(\sigma + it)|}{|t|^{\frac{1-\sigma}{2}} \log |t|}$$

reste au-dessous d'une limite finie dans le domaine

$$0 \leq \sigma \leq 1, \qquad |t| \geq t_1(> 1). \tag{9}$$

Pour faciliter le langage, nous conviendrons de désigner indistinctement par h toute fonction réelle des variables σ et t qui, pour les valeurs σ faisant partie d'un intervalle donné, reste comprise entre des limites finies et *positives* à partir d'une certaine valeur de $|t|$. La lettre h ne désignera donc pas la même fonction dans les différentes formules où elle figure.

En adoptant cette notation, on peut écrire le résultat relatif à l'expression (3) établi plus haut, sous la forme

$$|\zeta(s)| = h|t|^{\frac{1}{2}-\sigma} \qquad \text{pour} \qquad -\sigma_0 \leq \sigma \leq -\varepsilon.$$

En désignant par μ un nombre réel, il en résulte

$$|\zeta^{\mu}(s)| = h|t|^{\mu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}.$$

On a d'ailleurs, σ restant dans un intervalle fini quelconque,

$$|s^{\nu}| = h|t|^{\nu},$$

4. Dans le Mémoire cité plus haut, M. Mellin avait démontré qu'on a

$$|\zeta(\sigma + it)| < M_\sigma |t|^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour} \quad 0 < \sigma \leq \frac{1}{2}, \qquad |t| \geq t_0(> 0),$$
$$|\zeta(\sigma + it)| < M_\sigma |t|^{1-\sigma} \quad \textit{pour} \quad \frac{1}{2} \leq \sigma < 1, \qquad |t| \geq t_0(> 0),$$

M_σ ayant une valeur finie pour chaque valeur σ comprise dans l'intervalle en question.

D'autre part, dans une Note intitulée : *Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann* (*Bulletin de la Societé mathématique de France*, t. XXXIII, 1905), M. Landau a remplacé les inégalités de M. Mellin par les suivantes qui sont plus précises :

$$|\zeta(\sigma + it)| < M_\sigma |t|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sigma} \sqrt{\log|t|} \quad \text{pour} \quad 0 < \sigma \leq \frac{1}{2}, \qquad |t| \geq t_1(> 1),$$
$$|\zeta(\sigma + it)| < M_\sigma |t|^{\frac{3}{4}(1-\sigma)} \sqrt{\log|t|} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leq \sigma < 1, \qquad |t| \geq t_1(> 1),$$

M_σ ayant la même signification que ci-dessus.

ν étant un nombre réel, et, d'autre part,

$$|\log s| = h \log |t|.$$

Si l'on pose

$$F_1(s) = s^{\nu}\zeta^{\mu}(s) \log s,$$

on trouve donc

$$|F_1(s)| = h|t|^{\mu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)+\nu} \log |t|,$$

σ restant compris entre deux limites finies et négatives.

Prenons maintenant un intervalle de longueur 1 faisant partie de l'axe réel négatif, par exemple l'intervalle

$$-2 \leq \sigma \leq -1,$$

et déterminons les nombres μ et ν de telle sorte que l'exposant

$$\mu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)+\nu$$

de $|t|$ dans l'égalité ci-dessus se réduise à zéro pour $\sigma = -1$ et à $\frac{1}{2}$ pour $\sigma = -2$. On trouve

$$\mu = \frac{1}{2}, \qquad \nu = -\frac{3}{4},$$

et, par suite,

$$F_1(s) = s^{-\frac{3}{4}}\zeta^{\frac{1}{2}}(s) \log s,$$

$$|F_1(s)| = h|t|^{-\frac{1+\sigma}{2}} \log|t| \qquad (-2 \leq \sigma \leq -1).$$

Posons enfin [5]

$$F(s) = F_1(s-2) \equiv (s-2)^{\frac{3}{4}}\zeta^{\frac{1}{2}}(s-2)\log(s-2).$$

Cette fonction $F(s)$ est régulière et différente de zéro pour

$$0 \leq \sigma \leq 1, \qquad |t| > 0,$$

5. Au lieu de F(s), on pourrait employer, par exemple, la fonction

$$\frac{s^{\frac{1-s}{2}} \log s}{\sin \dfrac{\pi s}{4}}$$

et vérifie pour

$$0 \leq \sigma \leq 1$$

l'égalité asymptotique

(10) $$|F(s)| = h|t|^{\frac{1-\sigma}{2}} \log |t|,$$

d'où il résulte, en particulier,

(11) $$|F(1+it)| = h \log |t|, \qquad |F(it) = h|t|^{\frac{1}{2} \log |t|}.$$

Après ces préliminaires, nous allons étudier la fonction

$$f(s) = \frac{\zeta(s)}{F(s)}$$

dans le domaine $0 \leq \sigma \leq 1$. On voit d'abord qu'elle y est régulière dès que $|t| > 0$, puisque la fonction $F(s)$ est alors différente de zéro. D'autre part, il résulte des égalités (11) et de la proposition établie relativement aux expressions (6), que $|f(s)|$ reste au-dessous d'une limite finie pour $\sigma = 0$ et pour $\sigma = 1$, à partir d'une certaine valeur de $|t|$. Enfin on pourra trouver un nombre fini μ tel que l'expression

$$\left| \frac{f(s)}{t^\mu} \right|$$

reste au-dessous d'une limite finie pour

$$0 \leq \sigma \leq 1, \qquad |t| \geq t_0 (> 0).$$

En effet, de l'égalité (10) et de ce que nous avons dit au n° 1 sur la croissance de $\zeta(s)$, il résulte que cette condition est certainement vérifiée si l'on prend $\mu > 2$.

Le lemme du n° 2 est donc applicable à la fonction $f(s)$ dans chacun des domaines

$$0 \leq \sigma \leq 1, \qquad t \geq t_0 (> 0)$$

et

$$0 \leq \sigma \leq 1, \qquad t \leq -t_0 (< 0),$$

et nous apprend que $|f(s)|$ y reste au-dessous d'une limite finie, en sorte qu'on aura

$$|\zeta(s)| < \text{const.} |F(s)|.$$

En remontant à l'égalité (10), on en conclut bien l'exactitude du théorème énoncé plus haut.

4. Par un raisonnement analogue à celui qu'on vient de lire, on peut établir encore quelques autres résultats généraux relatifs à la croissance de $\zeta(s)$, que nous nous permettrons de signaler ici sans démonstration [6].

À toute valeur donnée σ correspond un nombre déterminé $\mu(\sigma)$ tel que, $|t|$ tendant vers l'infini, le rapport

$$\frac{|\zeta(\sigma + it)|}{|t|^{\mu(\sigma)+\varepsilon}}$$

reste au-dessous d'une limite finie ou non, suivant que ε est plus grand ou plus petit que zéro.

Considérons la courbe dont l'équation est

$$t = \mu(\sigma). \tag{12}$$

On démontre facilement qu'elle jouit de la propriété suivante :

Si $\mu(\sigma_1) \leq t_1$ et $\mu(\sigma_2) \leq t_2$, l'ordonnée de la courbe (12) n'est en aucun point de l'intervalle (σ_1, σ_2) supérieure à celle de la droite qui joint les points (σ_1, t_1) et (σ_2, t_2).

En tenant compte des résultats rappelés au n° 1, on en conclut la proposition qui suit :

La courbe (12) est continue pour toute valeur de σ et n'est en aucun point convexe vers le haut. Son ordonnée vérifie la relation

$$\mu(\sigma) = \mu(1 - \sigma) + \frac{1}{2} - \sigma.$$

Pour $\sigma \geq 1$, cette courbe se réduit à l'axe réel et, pour $\sigma \leq 0$, elle se confond avec la droite

$$t = \frac{1}{2} - \sigma.$$

Dans l'intervalle $0 < \sigma < 1$, elle fait partie du triangle formé par les points

$$\left(\sigma = 0, t = \frac{1}{2}\right), \qquad \left(\sigma = \frac{1}{2}, t = 0\right), \qquad (\sigma = 1, t = 0).$$

5. En tant qu'il s'agit d'une limite inférieure de la croissance de $\zeta(s)$ pour les valeurs σ comprises dans l'intervalle critique, la proposition ci-dessus nous permet d'énoncer le résultat suivant :

6. Une question analogue se trouve traitée en détail dans la dernière partie du Mémoire que nous avons publié avec M. Phragmén.

Si $\varepsilon > 0$, l'expression

$$t^{\varepsilon}\zeta(\sigma + it),$$

lorsque $|t|$ augmente indéfiniment, ne tend vers zéro pour aucune valeur σ comprise dans l'intervalle

$$\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1,$$

et l'expression

$$t^{\varepsilon}\frac{\zeta(\sigma + it)}{t^{\frac{1}{2}-\sigma}}$$

ne tend vers zéro pour aucune valeur σ de l'intervalle

$$0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}.$$

Mais on peut aller plus loin, en démontrant que *ce résultat subsiste encore pour $\varepsilon = 0$.* D'une manière plus précise, si l'on pose

$$\zeta(\sigma + it) = \xi(\sigma, t) + i\eta(\sigma, t),$$

on peut à l'égard des fonctions ξ et η établir la proposition que voici :

Lorsque $|t|$ augmente indéfiniment, σ ayant une valeur donnée quelconque, les expressions

$$\xi(\sigma, t) - 1 \quad \text{et} \quad \eta(\sigma, t) \tag{13}$$

changent de signe une infinité de fois et, pour chacune d'elles, les limites inférieures et supérieures pour $t = \pm\infty$ sont différentes de zéro.

6. Pour démontrer cette proposition, nous aurons à nous servir de la *formule de Poisson*[7].

Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique qui est régulière dans le cercle

$$x^2 + y^2 < R^2,$$

et désignons par r, φ les coordonnées polaires du point (x, y) par rapport à l'origine, par x_0, y_0 les coordonnées d'un point pris à l'intérieur du cercle, et par r_0, φ_0 les valeurs de r, φ en ce point.

7. On aurait pu se servir aussi de cette formule pour établir le lemme du n° 2.

Si l'on admet d'abord que la fonction $u(x, y)$ soit continue pour

$$x^2 + y^2 \leq R^2,$$

la formule de Poisson nous donne

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2} \overline{u}(R, \varphi) d\varphi, \tag{14}$$

en posant

$$u(x, y) = \overline{u}(r, \varphi).$$

Supposons maintenant qu'il existe sur la circonférence du cercle envisagé un certain point, soit le point

$$x = R, \qquad y = 0,$$

où la fonction $u(x, y)$ cesse d'être continue, tout en restant continue pour les autres points de ce cercle et de sa circonférence, et admettons en outre qu'on peut trouver un nombre réel μ *inférieur à l'unité*, tel que l'expression

$$\rho^\mu \, |u(x, y)|, \tag{15}$$

où ρ désigne la distance du point (x, y) au point $x = R, y = 0$, reste au-dessous d'une limite finie pour

$$x^2 + y^2 \leq R^2,$$

Dans ces conditions, la formule (14) reste encore valable.

En effet, on a évidemment pour $r_0 < R' < R$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R'^2 - r_0^2}{R'^2 - 2R'r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2} \overline{u}(R', \varphi) d\varphi, \tag{14'}$$

Or il résulte de la condition admise relativement à l'expression (15), d'une part, que l'intégrale figurant dans la formule (14) garde dans l'hypothèse actuelle une valeur finie, et, d'autre part, que la différence entre cette intégrale et celle qui figure dans la formule (14') tend vers zéro lorsque R' tend vers R. Cette dernière formule restant vraie, quelque petite que soit la différence $R - R'$, on en conclut bien l'égalité (14).

Les conditions restant les mêmes que ci-dessus, admettons que

$$u(x, y) \geq C$$

sur un certain arc de la circonférence

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

comprenant intérieurement le point

$$x = R, \qquad y = 0$$

D'après les propriétés bien connues de l'intégrale de Poisson[8], on peut en conclure que, le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on voudra, l'inégalité

$$u(x, y) > C - \varepsilon$$

est vérifiée pour tout point (x, y) du domaine

$$x^2 + y^2 \leq R^2,$$

dont la distance ρ du point

$$x = R, \quad y = 0$$

est inférieure à une certaine limite positive. On en déduit le lemme suivant, dont nous aurons à nous servir :

En désignant par r, φ les coordonnées polaires du point (x, y) par rapport à un point fixe, admettons que la fonction harmonique $u(x, y)$ soit finie et continue pour tout point (x, y) à distance finie faisant partie du domaine

$$\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \frac{\pi}{\alpha}, \qquad r \geq r_0, \tag{16}$$

et régulière à l'intérieur de ce domaine, et qu'il existe un nombre ν inférieur à α, tel que le produit

$$r^{-\nu}|u(x, y)|$$

reste au-dessous d'une limite finie dans ce même domaine.

Cela étant, si, sur chacun des rayons $\varphi = \varphi_0$ et $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{\alpha}$ la limite supérieure de $u(x, y)$ pour $r = \infty$ est égale à ou plus petite que zéro, ou respectivement la limite inférieure de $u(x, y)$ pour $r = \infty$ égale à ou plus grande que zéro, on aura dans le domaine (16), à partir d'une certaine valeur de r,

$$u(x, y) < \varepsilon,$$

respectivement

$$u(x, y) > -\varepsilon,$$

le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on voudra.

8. Voir H.-A. Schwarz, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, t. II, p. 175-210 et 360-361.

Pour la démonstration de ce lemme, il suffit d'effectuer un changement de variable réalisant la représentation conforme du domaine (16) sur l'aire d'un cercle. En effet, ce changement transformera $u(x, y)$ en une fonction harmonique qui est finie et continue dans le cercle en question et sur sa circonférence, excepté peut-être le seul point qui correspond au point à l'infini du domaine (16) ; mais en ce point l'ordre d'infinitude de la fonction transformée est au plus égal à $\frac{\nu}{\alpha}$ et, par suite, inférieur à l'unité. L'exactitude de notre lemme résulte dès lors immédiatement de la remarque faite ci-dessus.

7. Après ces préliminaires, revenons à la proposition énoncée à la fin du n° 5.

σ_0 étant une valeur réelle quelconque, posons

$$s - \sigma_0 = re^{i\varphi}$$

et étudions la fonction $\zeta(s)$ dans l'angle d'étendue $\frac{\pi}{\alpha}$ défini par les inégalités

$$\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \tag{17}$$

en supposant α supérieur à chacun des nombres 2 et $\mu(\sigma_0)$, $\mu(\sigma)$ désignant la fonction dont il était question au n° 4.

La fonction $\zeta(s)$ est régulière pour tout point à distance finie faisant partie de cet angle (excepté son sommet dans le cas où $\sigma_0 = 1$), et, si l'on choisit le nombre ν de telle sorte que

$$\mu(\sigma_0) < \nu < \alpha,$$

il résulte du n° 4 que le produit

$$r^{-\nu}|\zeta(s)|$$

et, par suite, aussi les produits

$$r^{-\nu}|\xi(\sigma, t) - 1| \qquad \text{et} \qquad r^{-\nu}|\eta(\sigma, t)|$$

restent au-dessous d'une limite finie dans le domaine (17), à partir d'une certaine valeur de r.

Or $\zeta(s)$ tend vers 1 sur le rayon

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)$$

lorsque r augmente indéfiniment et, par suite, les expressions (13) tendront dans les mêmes conditions vers zéro, Si sur l'autre côté de l'angle (17), c'est-à-dire sur la droite

$\sigma = \sigma_0$, la limite supérieure pour $t = \infty$ de l'une des expressions (13) était égale à ou plus petite que zéro, cette expression devrait donc, d'après le lemme démontré au n° 6, rester inférieure à ε dans l'angle (17), à partir d'une certaine valeur de r, et si, sur la même droite, la limite inférieure pour $t = \infty$ de l'une des expressions dont il s'agit était égale à ou plus grande que zéro, cette expression serait dans les mêmes conditions supérieure à $-\varepsilon$, et cela quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε.

Or, ces conclusions ne sont ni l'une ni l'autre conformes à la réalité et, pour s'en assurer, il suffit d'examiner comment se comportent les expressions (13) par exemple sur la droite $\sigma = 4$ (en admettant qu'on ait $\sigma_0 < 4$). En effet, on a, sur cette droite,

$$\left|\frac{1}{2^s}\right| = \frac{1}{16},$$

et, d'autre part,

$$\left|\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots\right| \leq \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots < \int_2^\infty \frac{d\tau}{\tau^4} = \frac{1}{24}\ ;$$

on en conclut que chacune des expressions (13) prend, sur la droite en question, au delà d'un quelconque de ses points, aussi bien des valeurs supérieures à $\frac{1}{16} - \frac{1}{24} = \frac{1}{48}$ que des valeurs inférieures à $-\frac{1}{48}$.

Donc, pour chacune des expressions (13), la limite supérieure pour $t = \infty$ est positive et la limite inférieure pour $t = \infty$ négative, et de même pour $t = -\infty$, d'où résulte notre proposition.

8. Le lemme du n° 6 conduit encore à certains résultats relatifs à la croissance du module $|\zeta(s)|$ que nous signalerons en terminant.

L'expression log $|\zeta(s)|$ définit évidemment une fonction harmonique régulière pour $\sigma \geq 1$, en exceptant le seul point $s = 1$. Cette fonction tend vers zéro lorsque le point s s'éloigne indéfiniment suivant une droite quelconque qui forme avec l'axe réel positif un angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$; d'autre part, on peut démontrer [9] qu'elle reste, pour

$$\sigma \geq 1, \qquad |t| \geq t_0 (> 0),$$

numériquement inférieure à une certaine puissance finie de t. Le lemme cité permet d'en conclure, par un raisonnement identique à celui du n° 7, que la limite inférieure pour $|t| = \infty$ de l'expression log $|\zeta(s)|$ est négative sur l'une quelconque des droites

9. Voir, par exemple, le paragraphe 11 du Mémoire de M. Landau, *Beiträge zur analytischen Zahlentheorie* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXVI, 1908), où se trouvent d'ailleurs établis des résultats bien plus précis que celui dont nous avons besoin ici.

$\sigma = \sigma_0$, où $\sigma_0 \geq 1$. En d'autres termes, *le module* $|\zeta(s)|$ *prendra sur chacune de ces droites, à une distance aussi grande qu'on voudra de l'axe réel, des valeurs inférieures à une certaine quantité finie plus petite que l'unité.*

En admettant que $\zeta(s) \neq 0$ pour

$$\sigma > \vartheta, \qquad \frac{1}{2} \leq \vartheta < 1,$$

on peut démontrer[10] que la fonction $\log|\zeta(s)|$ reste, pour

$$\sigma \geq \vartheta + \varepsilon, \qquad |t| \geq t_0(> 0), \qquad \varepsilon > 0,$$

numériquement inférieure à une certaine puissance finie de $|t|$; d'où il résulte que, dans cette hypothèse, la conclusion ci-dessus sera vraie dès que $\sigma_0 > \vartheta$.

D'ailleurs, le module $|\zeta(s)|$ ne resterait-il pas inférieur à une limite finie pour

$$\sigma \geq \frac{1}{2} + \varepsilon, \qquad |t| > t_0(> 0),$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε ?

S'il en est ainsi, on aura des résultats relativement simples concernant la croissance de $\zeta(s)$. Ainsi, la fonction $\mu(\sigma)$ définie au n° 4 se réduira à zéro pour $\sigma > \frac{1}{2}$ et à $\frac{1}{2} - \sigma$ pour $\sigma < \frac{1}{2}$ et, de plus, si l'on admet avec Riemann que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\sigma > \frac{1}{2}$, on peut démontrer que, pour $\sigma > \frac{1}{2}$, l'expression $|\zeta(\sigma + it)|$ et, pour $\sigma < \frac{1}{2}$, l'expression $\left|\frac{\zeta(\sigma + it)}{t^{\frac{1}{2}-\sigma}}\right|$ restent comprises entre des limites finies et positives à partir d'une certaine valeur de $|t|$.

Si la supposition émise ci-dessus n'est pas vraie, on arrive au contraire à des conclusions assez curieuses. Il existe alors un nombre bien déterminé σ', faisant partie de l'intervalle

$$\frac{1}{2} < \sigma \leq 1,$$

tel que, si $\varepsilon > 0$, le module $|\zeta(\sigma + it)|$ reste inférieur à une limite finie pour

$$\sigma \geq \sigma' + \varepsilon, \qquad |t| \geq t_0(> 0),$$

10. Cf. le paragraphe 13 du Mémoire cité dans la Note précédente.

tandis que ceci n'a pas lieu pour $\varepsilon < 0$, et l'on peut en conclure[11] que l'équation

$$\zeta(s) = C,$$

pour toute valeur finie de C, excepté peut-être *une seule* valeur, admet une infinité de racines dont les parties réelles tendent vers σ' en même temps que leurs modules augmentent indéfiniment.

11. Voir notre travail : *Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes, et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXV, nº 7, 1908). On trouve des tirages à part de ce Mémoire à la librairie A. Hermann.