

PIERRE HUMBERT

SERGE COLOMBO

Le calcul symbolique et ses applications à la physique mathématique

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 105 (1947)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1947__105__1_0

© Gauthier-Villars, 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

S Xt 973 a (105) ih + 8^{re}

41.4
HUM
472

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE
L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CV

**Le calcul symbolique
et ses applications à la physique mathématique**

PAR MM. PIERRE HUMBERT ET SERGE COLOMBO



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1947

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.**

LE CALCUL SYMBOLIQUE

ET SES

APPLICATIONS A LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Par MM. Pierre HUMBERT et Serge COLOMBO.

INTRODUCTION.

1. **Aperçu historique.** — Les méthodes opérationnelles imaginées par l'ingénieur télégraphiste Oliver Heaviside dans le dessein de résoudre certains problèmes posés par l'étude des phénomènes électriques transitoires [1], furent longtemps considérées par les mathématiciens comme de simples moyens mnémoniques pour retrouver les solutions d'équations ou de systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Cependant les physiciens s'attachèrent de plus en plus par la suite à la notion d'opérateur, et l'idée première d'Heaviside, présentée par lui sous forme intuitive, apparaissait comme de plus en plus profonde, en même temps que les résultats auxquels elle permettait d'aboutir la révélaient féconde. Aussi divers mathématiciens, parmi lesquels nous citerons, sans que cette liste soit le moins du monde exhaustive, Giorgi [2], Bromwich [3], Wagner [4], March [5], Wiener [6], et surtout Carson [7] et Van der Pol [8], se sont-ils attachés à la justifier et à la développer; leurs travaux ont ainsi donné naissance à une branche importante de l'analyse : le calcul opérationnel ou *calcul symbolique*, dont E. T. Whittaker a pu dire [9] qu'il constituait un des plus importants progrès mathématiques du dernier quart du XIX^e siècle.

Certains des auteurs cités plus haut furent conduits, dans ces

recherches, à développer la notion de transformée de Laplace et à rattacher ainsi à une fonction donnée son *image* : à certaines opérations (dérivations, intégrations, changements de variables, etc.) effectuées sur la fonction correspondent d'autres opérations, généralement plus simples, ou au moins plus accessibles, sur son image, et l'on conçoit que l'on puisse dans de nombreux cas, à partir des propriétés de la fonction image, retrouver celles que possède la fonction originale. C'est dans cette voie qu'ont travaillé Carson et Van der Pol, ainsi que N. W. Mc Lachlan [10], qui a tout spécialement étudié les applications de ce calcul symbolique à la physique mathématique.

En France, le calcul symbolique s'est répandu lentement, quoique ce soit P. Lévy [11] qui ait donné une des premières justifications mathématiques des méthodes intuitives d'Heaviside. On doit à Vogt [12], à J. B. Pomey [13], à Blondel [14], à Y. Rocard [15], à P. Janet [16], des exposés du calcul symbolique et de ses applications à l'électrotechnique; mais ces auteurs n'ont eu en vue que la détermination des régimes électriques transitoires: P. Humbert [17] et, à sa suite, L. Poli [18], V. Baranov [19], S. Colombo [20] ont montré que ce calcul constitue un outil précieux dans la recherche des propriétés de certaines fonctions, dans l'étude de divers types d'intégrales définies, dans la résolution de certaines équations intégrales ou intégréo-différentielles. Plus récemment, un exposé des règles symboliques a été donné par Ky Fan [21].

Nous commencerons par indiquer le principe de la méthode opérationnelle d'Heaviside, puis nous l'appliquerons à deux problèmes concrets : nous abandonnerons ensuite ces procédés opératoires pour ne plus parler que du calcul symbolique, tel que l'a défini Carson. Dans une première partie, nous en indiquerons les principales règles; une seconde partie traitera de son application à l'étude des fonctions les plus usitées en physique mathématique; enfin nous exposerons les ressources qu'il peut offrir pour la théorie du circuit électrique.

2. Principe de la méthode opérationnelle. — Soit y une fonction de la variable t . La méthode opérationnelle d'Heaviside consiste à écrire

$$p, p^2, \dots, p^n,$$

au lieu de

$$\frac{d}{dt}, \frac{d^2}{dt^2}, \dots, \frac{d^n}{dt^n},$$

et à traiter ensuite le symbole p comme une quantité algébrique ordinaire. De même qu'en algèbre, on aura

$$p^m(p^n y) = p^{m+n} y, \\ (p^m)^n y = p^{mn} y$$

avec, par convention,

$$p^0 y \equiv y.$$

On donne une signification au symbole $p^m y$ si m est un entier négatif en écrivant

$$p^{-1} y = \int_0^t y(t) dt,$$

c'est donc celle des primitives de y qui s'annule avec t . Par conséquent

$$p^{-m} y = \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t y(t) (dt)^m.$$

Ainsi

$$p^{-m} t = \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}.$$

3. Étude de deux régimes électriques transitoires par la méthode opérationnelle. — Envisageons un circuit constitué par une résistance R et une inductance L disposées en série. Soit $I(t)$ le courant qui parcourt ce circuit lorsqu'on maintient à ses bornes une différence de potentiel $E(t)$: on a l'équation différentielle

$$(1) \quad R I(t) + L \frac{dI}{dt} = E(t),$$

dont la solution opérationnelle sera, en remplaçant $\frac{dI}{dt}$ par pI ,

$$I(t) = \frac{E(t)}{R + pL}.$$

L'expression $\frac{1}{R + pL}$ est l'opérateur, et $E(t)$ est l'opérande. Le passage de l'expression purement symbolique écrite ci-dessus à l'expression donnant effectivement $I(t)$ est appelé par Heaviside *algébrisation de la solution opérationnelle*. Pour ce faire, il nous faudra connaître l'expression de $E(t)$.

Supposons d'abord que nous nous proposons de déterminer le régime transitoire du circuit lorsqu'on y introduit brusquement une

f. é. m. constante E_0 : nous écrirons alors

$$E(t) = E_0 U(t),$$

$U(t)$ désignant la *fonction brusque unité*, c'est-à-dire une fonction nulle pour $t < 0$, et égale à l'unité pour $t \geq 0$. Comme on a

$$\frac{1}{R + pL} = \frac{1}{L} \left(p + \frac{R}{L} \right)^{-1} = \frac{1}{L} p^{-1} \left(1 - \frac{R}{L} p^{-1} + \frac{R^2}{L^2} p^{-2} - \dots \right),$$

nous pourrions écrire

$$I(t) = \frac{1}{R + pL} E_0 U(t) = \frac{E_0}{L} p^{-1} \left(1 - \frac{R}{L} p^{-1} + \frac{R^2}{L^2} p^{-2} - \dots \right) U(t).$$

Mais, pour les valeurs positives de t , qui seules nous intéressent, on a

$$p^{-1} U(t) = t, \quad p^{-n} U(t) = \frac{t^n}{n!};$$

donc

$$\left(1 - \frac{R}{L} p^{-1} + \dots \right) U(t) = 1 - \frac{R}{L} \frac{t}{1!} + \frac{R^2}{L^2} \frac{t^2}{2!} - \dots = e^{-\frac{R}{L} t}$$

et

$$I(t) = \frac{E_0}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L} t'} dt' = \frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right).$$

Supposons ensuite que l'on introduise, à partir de l'instant $t = 0$, une f. é. m.

$$(2) \quad E(t) = E_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Nous écrirons

$$(3) \quad E(t) = E_0 e^{i(\omega t + \alpha)} U(t)$$

en convenant de ne retenir que la partie réelle de la solution. Une expression telle que (3) est souvent désignée sous le nom de *force électromotrice cissoïdale*. Il faudra donc algébriser la solution opératoire

$$(4) \quad I(t) = \frac{E_0}{R + pL} e^{i(\omega t + \alpha)} U(t),$$

et nous utiliserons pour cela la formule connue sous le nom de *principe de transposition*, applicable à tout opérande exponentiel.

Considérons l'expression symbolique

$$f(p)[e^{at} \varphi(t)].$$

On a

$$p e^{at} \varphi(t) = a e^{at} \varphi(t) + e^{at} p \varphi(t) = (p + a) e^{at} \varphi(t)$$

et, plus généralement,

$$p^n e^{at} \varphi(t) = (p + a)^n e^{at} \varphi(t).$$

Supposons l'opérateur $f(p)$ développé en série

$$f(p) = \sum_0^{\infty} A_n p^n,$$

on aura

$$\begin{aligned} f(p)[e^{at} \varphi(t)] &= e^{at} \sum A_n (p + a)^n \varphi(t) \\ &= e^{at} f(p + a) \varphi(t). \end{aligned}$$

On peut donc *transposer* l'exponentielle e^{at} à gauche de l'opérateur, à condition de remplacer dans celui-ci p par $p + a$.

Appliquons ceci à (4) : on obtient

$$I(t) = \frac{E_0}{L} e^{i(\omega t + \alpha)} \frac{U(t)}{p + i\omega + \frac{R}{L}},$$

et, en opérant comme précédemment, on écrira

$$\frac{U(t)}{p + i\omega + \frac{R}{L}} = p^{-1} e^{-\frac{R}{L}t - i\omega t} = \frac{1 - e^{-\frac{R}{L}t - i\omega t}}{\frac{R}{L} + i\omega},$$

d'où

$$I(t) = \frac{E_0 e^{i(\omega t + \alpha)}}{R + Li\omega} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t - i\omega t} \right).$$

Posons

$$z^2 = R^2 + L^2 \omega^2,$$

$$\varphi = \text{arc tang} \frac{L\omega}{R} = \text{arc cos} \frac{R}{z};$$

alors

$$I(t) = \frac{E_0}{z} e^{i(\omega t + \alpha)} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t - i\omega t} \right) e^{-i\varphi}$$

et, en ne retenant que la partie réelle,

$$I(t) = \frac{E_0}{z} \left[\cos(\omega t + \alpha - \varphi) - e^{-\frac{R}{L}t} \cos(\alpha - \varphi) \right].$$

Les exemples que nous venons de traiter montreront suffisamment quel est l'esprit de la méthode opérationnelle d'Heaviside : nous allons passer à présent au calcul symbolique proprement dit, moins mystérieux, plus solide, et infiniment plus fécond.

PREMIÈRE PARTIE.

LES RÈGLES DU CALCUL SYMBOLIQUE.

1. L'intégrale de Carson. — Faisons correspondre à toute fonction $f(t)$ de la variable réelle t une fonction $\varphi(p)$ définie par l'intégrale dite de Carson,

$$(1) \quad \varphi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

supposée, bien entendu, convergente.

Par définition, $\varphi(p)$ est l'image de $f(t)$; et $f(t)$ est l'original de $\varphi(p)$. La relation (1) entre image et original s'écrit, sous forme symbolique,

$$\varphi(p) \doteq f(t),$$

ou, suivant une notation plus récente et qui semble plus commode,

$$\begin{aligned} \varphi(p) &\subset f(t), \\ f(t) &\supset \varphi(p). \end{aligned}$$

Cette notation, introduite par N. W. Mc Lachlan, a l'avantage de préciser la correspondance symbolique sans confusion possible entre l'image et l'original. C'est celle que nous suivrons dans ce travail.

2. Dictionnaire opératoire. — On constitue un dictionnaire opératoire en établissant des égalités symboliques montrant les correspondances entre opérations faites sur $f(t)$ et sur $\varphi(p)$. Nous allons en indiquer quelques-unes, choisies parmi les plus importantes,

dans les applications : on en trouvera un grand nombre d'autres dans le Formulaire pour le calcul symbolique [22], auquel nous renvoyons le lecteur.

a. Si

$$\varphi_1(p) \subset f_1(t) \quad \text{et} \quad \varphi_2(p) \subset f_2(t),$$

on a évidemment

$$(A) \quad \varphi_1(p) + \varphi_2(p) \subset \dot{f}_1(t) + f_2(t).$$

b. Soit K une constante : nous pouvons écrire l'intégrale de Carson

$$(2) \quad \varphi(Kp) = Kp \int_0^\infty e^{-\nu t} f(t) dt = p \int_0^\infty e^{-\nu t} f\left(\frac{t}{K}\right) dt,$$

d'où

$$(B) \quad \varphi(Kp) \subset f\left(\frac{t}{K}\right).$$

c. Dérivons par rapport à K les deux membres de (2)

$$p \varphi'(Kp) = -p \int_0^\infty e^{-\nu t} \frac{t}{K} f'\left(\frac{t}{K}\right) dt;$$

donc

$$p \varphi'(Kp) \subset -\frac{t}{K} f'\left(\frac{t}{K}\right)$$

et, en faisant $K = 1$,

$$(C) \quad p \varphi'(p) \subset -t f'(t),$$

plus généralement

$$(C') \quad \left(p \frac{d}{dp}\right)^m \varphi(p) \subset (-1)^m \left(t \frac{d}{dt}\right)^m f(t).$$

d. De

$$p \varphi(\dot{p}) = p^2 \int_0^\infty e^{-\nu t} f(t) dt$$

on tire, en intégrant par parties,

$$p \varphi(p) = [-p e^{-\nu t} f(t)]_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-\nu t} f'(t) dt,$$

d'où

$$p \varphi(p) - p f(0) \subset f'(t);$$

donc, si $f(0) = 0$,

$$(D) \quad p \varphi(p) \subset f'(t)$$

et l'on aurait, plus généralement,

$$(D') \quad p^n \varphi(p) \subset f^{(n)}(t),$$

à condition que l'on ait

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

e. Par définition, l'expression

$$p \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(x) dx$$

est l'original de

$$\int_0^t f(x) dx.$$

L'intégration par parties donne

$$p \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(x) dx = \left[-e^{-pt} \int_0^t f(x) dx \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

Le terme tout intégré étant nul, il reste

$$(E) \quad \frac{\varphi(p)}{p} \subset \int_0^t f(x) dx$$

et, plus généralement,

$$(E') \quad p^{-m} \varphi(p) \subset \int_0^t \dots \int_0^t f(x) (dx)^m.$$

Ainsi la correspondance établie par l'intégrale de Carson ramène les dérivations et intégrations à des multiplications et divisions par la variable p : on voit apparaître l'analogie avec le calcul d'Heaviside, sans toutefois que soit intervenue la notion d'opérateur.

f. Soit λ un nombre positif quelconque, et supposons

$$f(t) = 0, \quad \text{pour } t < 0.$$

On pourra écrire

$$e^{-\lambda p} \varphi(p) = p \int_0^\infty e^{-p(t+\lambda)} f(t) dt = p \int_\lambda^\infty e^{-px} f(x - \lambda) dx.$$

d'où, en vertu de l'hypothèse, les deux égalités symboliques

$$(F) \quad \begin{cases} e^{-\lambda p} \varphi(p) \subset 0 & (t < \lambda), \\ e^{-\lambda p} \varphi(p) \subset f(t - \lambda) \cdot & (t > \lambda), \end{cases}$$

qui sont importantes dans l'étude des fonctions périodiques.

g. λ étant toujours un nombre *positif*, supposons que $f(t)$ s'annule pour toutes les valeurs de t de l'intervalle $0, \lambda$. Nous écrirons

$$e^{\lambda p} \varphi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-p(t-\lambda)} f(t) dt = p \int_{-\lambda}^{\infty} e^{-px} f(x + \lambda) dx.$$

Mais, d'après l'hypothèse,

$$\int_{-\lambda}^{\infty} e^{-px} f(x + \lambda) dx = \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u + \lambda) du,$$

d'où

$$(G) \quad e^{\lambda p} \varphi(p) \subset f(t + \lambda),$$

égalité symbolique valable quand $f(t) = 0$ pour $0 < t < \lambda$.

h. Soit à présent λ un nombre *quelconque* : remplaçons dans l'intégrale de Carson p par $p + \lambda$

$$\varphi(p + \lambda) = (p + \lambda) \int_0^{\infty} e^{-(p+\lambda)t} f(t) dt;$$

donc

$$\frac{p}{p + \lambda} \varphi(p + \lambda) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\lambda t} f(t) dt,$$

d'où l'égalité symbolique très importante

$$(H) \quad \frac{p}{p + \lambda} \varphi(p + \lambda) \subset e^{-\lambda t} f(t)$$

qui correspond au principe de transposition d'Heaviside,

i. De l'égalité symbolique

$$\varphi(Kp) \subset f\left(\frac{t}{K}\right)$$

on tirera, en intégrant par rapport à K ,

$$\int_a^b \frac{\varphi(Kp)}{K} dK \subset \int_a^b f\left(\frac{t}{K}\right) \frac{dK}{K}.$$

Posons, dans la première intégrale, $Kp = \varpi$, et, dans la seconde, $t = K\theta$: il vient, en faisant d'abord $a = 0$, $b = 1$,

$$(I) \quad \int_0^p \frac{\varphi(\varpi)}{\varpi} d\varpi \subset \int_1^\infty \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta,$$

puis, en faisant $a = 1$, $b = \infty$,

$$(I') \quad \int_p^\infty \frac{\varphi(\varpi)}{\varpi} d\varpi \subset \int_0^1 \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta,$$

et enfin la relation

$$(I'') \quad \int_0^\infty \frac{\varphi(\varpi)}{\varpi} d\varpi = \int_0^\infty \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta,$$

qui est une véritable égalité, puisque chaque membre se réduit à une constante, et qui permet l'évaluation rapide d'un grand nombre d'intégrales définies.

j. Dans les calculs qui vont suivre, nous utiliserons un résultat classique en analyse, qu'exprime la relation suivante

$$(3) \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{h}} e^{-\frac{x^2}{h}} = \int_0^\infty e^{-hu^2 - \frac{x^2}{u^2}} du.$$

Cherchons alors à obtenir l'original de $\varphi(\sqrt{p})$, en fonction de l'original $f(t)$ de $\varphi(p)$. Nous aurons, par définition,

$$\varphi(\sqrt{p}) = \sqrt{p} \int_0^\infty e^{-x\sqrt{p}} f(x) dx.$$

Or, faisons, dans la relation (3), $h = p$, $K = \frac{x^2}{4}$, et remplaçons en même temps la variable d'intégration u par \sqrt{t} : il vient

$$\sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-x\sqrt{p}} = \int_0^\infty e^{-pt - \frac{x^2}{4t}} \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \varphi(\sqrt{p}) &= \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(x) dx \int_0^\infty e^{-pt - \frac{x^2}{4t}} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-pt} \frac{dt}{\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} f(x) dx \end{aligned}$$

et conduit par conséquent à la formule cherchée,

$$(J) \quad \varphi(\sqrt{p}) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} f(x) dx.$$

k. Cherchons à présent l'image de $f(t^2)$. On aura identiquement

$$f(t^2) \supset p \int_0^{\infty} e^{-p^2 v} f(v^2) dv$$

ou, en faisant $v^2 = \theta$,

$$f(t^2) \supset \frac{p}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-p\sqrt{\theta}}}{\sqrt{\theta}} f(\theta) d\theta.$$

Mais, d'après la relation (3),

$$\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{-p\sqrt{\theta}} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\theta u^2}{4} - \frac{p^2}{u^2}} du$$

ou, en posant $u \doteq \frac{2}{x}$,

$$\frac{e^{-p\sqrt{\theta}}}{\sqrt{\theta}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\theta}{x^2} - \frac{p^2 x^2}{4}} \frac{dx}{x^2}.$$

Par conséquent

$$f(t^2) \supset \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\theta}{x^2} - \frac{p^2 x^2}{4}} f(\theta) \frac{d\theta dx}{x^2},$$

ce qu'on peut écrire

$$f(t^2) \supset \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p^2 x^2}{4}} \frac{dx}{x^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\theta}{x^2}} f(\theta) d\theta.$$

Mais d'autre part

$$\varphi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-p\theta} f(\theta) d\theta,$$

de sorte qu'en écrivant $\frac{1}{x^2}$ à la place de p , on trouve

$$\frac{1}{x^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\theta}{x^2}} f(\theta) d\theta = \varphi\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ce qui conduit enfin à la formule cherchée

$$(K) \quad f(t^2) \supset \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p^2 x^2}{4}} \varphi\left(\frac{1}{x^2}\right) dx.$$

l. Le résultat que nous allons établir à présent, et qui est de la plus grande importance dans toute la théorie du Calcul symbolique, est connu sous le nom de *Théorème du produit*. Soient deux correspondances symboliques

$$\begin{aligned}\varphi_1(p) &\subset f_1(t), \\ \varphi_2(p) &\subset f_2(t).\end{aligned}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}\varphi_1(p) \varphi_2(p) &= p \int_0^\infty e^{-pu} \varphi_2(p) f_1(u) du \\ &= p \int_0^\infty e^{-pu} \varphi_1(p) f_2(u) du.\end{aligned}$$

Supposons $t > u$, multiplions par $f_1(u)$ les deux membres de l'égalité symbolique (F)

$$e^{-pu} \varphi_2(p) \subset f_2(t-u)$$

et intégrons ensuite par rapport à u entre 0 et ∞ , ce qui est licite, puisque dans cette égalité u joue le rôle d'un simple paramètre : il vient

$$\int_0^\infty e^{-pu} \varphi_2(p) f_1(u) du \subset \int_0^\infty f_2(t-u) f_1(u) du$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{p} \varphi_1(p) \varphi_2(p) \subset \int_0^\infty f_2(t-u) f_1(u) du.$$

Mais comme d'autre part (d'après F)

$$e^{-pu} \varphi_2(p) \subset 0 \quad \text{pour } t < u,$$

l'intégrale du second membre est nulle lorsque u est supérieur à t , de sorte que la formule se réduit à

$$(L) \quad \frac{1}{p} \varphi_1(p) \varphi_2(p) \subset \int_0^t f_2(t-u) f_1(u) du,$$

ce qui peut s'écrire, comme le montrerait un calcul semblable,

$$(L') \quad \frac{1}{p} \varphi_1(p) \varphi_2(p) \subset \int_0^t f_1(t-u) f_2(u) du.$$

Ces deux égalités symboliques constituent le Théorème du produit :

elles se rattachent aux résultats de Volterra sur les produits de composition [23].

m. Les formules que nous allons établir à présent ont trait à des séquences symboliques, c'est-à-dire à des relations entre fonctions liées par une suite d'égalités, symboliques ou ordinaires. En voici un premier exemple simple, mais important [17a].

Supposons que $f(t)$ soit l'original de $\varphi(p)$, mais que $f(p)$ soit l'image d'une fonction $g(t)$: on a donc

$$\begin{aligned} \varphi(p) &\subset f(t), \\ f(p) &\subset g(t). \end{aligned}$$

Cherchons la relation liant $\varphi(p)$ à $g(t)$. Il suffit d'écrire

$$\varphi(p) = p \int_0^\infty e^{-ps} ds \left[s \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt \right];$$

donc

$$\varphi(p) = p \int_0^\infty g(t) dt \int_0^\infty e^{-s(p+t)} s ds,$$

d'où, en calculant la seconde intégrale, la relation cherchée

$$(M) \quad \varphi(p) = p \int_0^\infty \frac{g(t) dt}{(p+t)^2},$$

qui est une égalité véritable.

n. Voici un second exemple de séquence, plus compliquée : supposons que l'on ait, comme toujours,

$$\varphi(p) \subset f(t).$$

et supposons à présent que la fonction

$$\sqrt{p} f\left(\frac{1}{p}\right)$$

soit l'image d'une fonction $h(t)$. En remplaçant la variable d'intégration par son inverse dans l'intégrale de Carson, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(p)}{p} &= \int_0^\infty e^{-\frac{p}{x}} \sqrt{x} f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{p}{x} - xt} \frac{dx dt}{x \sqrt{x}} h(t). \end{aligned}$$

Mais on tire de la relation (3)

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{x}-xt} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2\sqrt{pt}}$$

et par conséquent

$$\varphi(p) = \sqrt{\pi p} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{pt}} h(t) dt.$$

Remplaçons alors p par p^2 et t par $\frac{t^2}{4}$: il vient

$$\varphi(p^2) = p\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-pt} h\left(\frac{t^2}{4}\right) \frac{t}{2} dt,$$

d'où la séquence cherchée [17b]

$$(N) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(p) \subset f(t), \\ \sqrt{p} f\left(\frac{1}{p}\right) \subset h(t), \\ \varphi(p^2) \subset \frac{\sqrt{\pi}}{2} t h\left(\frac{t^2}{4}\right). \end{array} \right.$$

o. Sans insister davantage, indiquons encore une autre séquence symbolique, dont la démonstration est immédiate à partir des formules (J) et (K), et qui s'exprime par la suite des égalités symboliques

$$(O) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(p) \subset f(t), \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi\left(\frac{1}{4t}\right) \supset K(p), \\ f(t^2) \supset \frac{K(p^2)}{p\sqrt{\pi}}. \end{array} \right.$$

Ces diverses séquences sont très utiles pour la recherche de relations nouvelles entre fonctions dont on connaît les images, ou les originaux.

3. Dictionnaire d'images. — A côté du dictionnaire opératoire, et tout aussi important que lui, doit se placer le dictionnaire d'images, donnant les images qui correspondent à des originaux connus. Il suffira d'ailleurs d'étudier un petit nombre de fonctions et de trouver leurs images : l'application des formules opératoires permettra d'étendre à l'infini les rubriques de ce nouveau dictionnaire.

Nous verrons, dans notre seconde partie, un très grand nombre d'images de fonctions, particulièrement de celles qui intéressent la physique mathématique : contentons-nous, pour le moment, de donner quelques exemples très simples, mais très importants, qui constituent la base solide de tout le calcul symbolique, et que l'on doit constamment avoir présents à l'esprit.

α . Partons de l'intégrale eulérienne de seconde espèce

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt,$$

qui s'écrira, en remplaçant t par pt ,

$$\frac{\Gamma(n+1)}{p^n} = p \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt :$$

on en tire immédiatement la relation

$$\frac{1}{p^n} \subset \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$$

qui donne l'image de toute puissance positive de t . On étendra cette relation aux puissances négatives de t (à l'exception des puissances entières) en prenant pour la fonction gamma la définition de Weierstrass.

β . Cherchons l'image de l'exponentielle e^t : il s'agit de calculer l'intégrale

$$p \int_0^{\infty} e^{-pt} e^t dt = p \int_0^{\infty} e^{t(1-p)} dt,$$

ce qui est égal à $\frac{p}{p-1}$. D'où la formule

$$\frac{p}{p-1} \subset e^t$$

que l'on transformera, par application de la formule (B), en

$$\frac{p}{p-a} \subset e^{at}.$$

γ . Faisons dans cette dernière correspondance $a = i$, il vient

$$\frac{p}{p-i} \subset \cos t + i \sin t,$$

d'où l'image des fonctions circulaires,

$$\frac{p}{p^2+1} \subset \sin t, \quad \frac{p^2}{p^2+1} \subset \cos t$$

et, de la même façon, celle des fonctions hyperboliques,

$$\frac{p}{p^2-1} \subset \operatorname{sh} t, \quad \frac{p^2}{p^2-1} \subset \operatorname{ch} t$$

ou encore

$$\frac{p\omega}{p^2+\omega^2} \subset \sin \omega t, \quad \frac{p^2}{p^2+\omega^2} \subset \cos \omega t;$$

$$\frac{p\omega}{p^2-\omega^2} \subset \operatorname{sh} \omega t, \quad \frac{p^2}{p^2-\omega^2} \subset \operatorname{ch} \omega t.$$

La formule (H) permettra alors d'écrire, α , ω et φ étant des constantes,

$$\frac{p\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2} \subset e^{-\alpha t} \sin \omega t,$$

$$\frac{p^2}{(p+\alpha)^2+\omega^2} \subset e^{-\alpha t} \cos \omega t,$$

d'où

$$\frac{p\omega \cos \varphi + p^2 \sin \varphi}{(p+\alpha)^2+\omega^2} \subset e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$$

δ. Pour trouver l'image de $\log t$, nous dériverons par rapport au paramètre n les deux membres de l'égalité symbolique

$$\frac{\Gamma(n+1)}{p^n} \subset t^n$$

on obtiendra ainsi, en désignant, suivant l'usage, par $\Psi(x)$ la dérivée logarithmique de $\Gamma(x)$, la formule

$$\frac{\Gamma(n+1)}{p^n} \left[\Psi(n+1) + \log \frac{1}{p} \right] \subset t^n \log t,$$

d'où, en faisant $n=0$, et se souvenant que $\Psi(1) = -\gamma$, constante d'Euler,

$$-\gamma - \log p \subset \log t.$$

4. **Intégrale de Bromwich-Wagner.** — Supposons $\varphi(p)$ connue : nous nous proposons d'en déduire $f(t)$. Nous démontrerons que,

dans le cas où $\varphi(p)$ est holomorphe dans un demi-plan contenant l'ensemble des affixes des nombres complexes dont les parties réelles admettent une borne inférieure α , ce qui a lieu pour la plupart des images usuelles [24], la relation

$$\varphi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

entraîne

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \frac{\varphi(p)}{p} dp,$$

c étant un nombre réel quelconque, supérieur à α .

Il résulte du théorème de Cauchy que, si l'on pose

$$F(p) = \frac{\varphi(p)}{p},$$

on aura, γ désignant un contour fermé entourant l'affixe de p :

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(z)}{z-p} dz.$$

Soit C l'affixe de c . Prenons pour contour γ une demi-circonférence de centre C et de rayon R , avec son diamètre vertical AB . On a

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{F(z) dz}{z-p} + \frac{1}{2\pi i} \int_{BA} \frac{F(z) dz}{z-p}.$$

La première intégrale étant prise le long de l'arc AB , la seconde le long du segment BA .

Supposons que R croisse indéfiniment. Envisageons la première intégrale : par hypothèse, pour $c > \alpha$, et, pour $|z|$ très grand,

$$\left| \frac{z F(z)}{z-p} \right|$$

est de l'ordre de $\left| \frac{A}{R} \right|$, et tend par conséquent vers zéro quand R croît indéfiniment. Donc l'intégrale est nulle, et l'on a

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(z)}{p-z} dz.$$

Mais

$$\frac{1}{p-z} = \int_0^{+\infty} e^{-t(p-z)} dt,$$

relation toujours valable le long de la droite AB puisque alors la partie réelle de $p - z$ est positive, et l'on pourra écrire

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z) dz \int_0^{+\infty} e^{-t(p-z)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} F(c+iy) dy \int_0^{+\infty} e^{-t(p-z)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} F(z) dz, \end{aligned}$$

d'où, finalement, en identifiant avec l'intégrale de Carson,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} F(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} \frac{\varphi(z)}{z} dz.$$

On donne à cette dernière intégrale le nom d'*intégrale de Bromwich-Wagner*.

Il est évident que l'on pourrait fonder le calcul symbolique sur cette dernière intégrale, plutôt que sur l'intégrale (réelle) de Carson : mais ce point de vue exige une connaissance sérieuse de la théorie des fonctions analytiques, et de l'adresse dans le maniement des intégrales complexes [10a].

A titre d'exemple, vérifions que l'on a bien, a étant une quantité réelle quelconque, et t étant positif,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p-a} dp = e^{at}.$$

Posons $p = a + Z$

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p-a} dp = e^{at} \int_{c-i\infty-a}^{c+i\infty-a} \frac{e^{Zt}}{Z} dZ.$$

Posons encore : $c - a = b$, et $Z = X + iY$. On a $b > 0$

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{e^{Zt}}{Z} dZ = i e^{bt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{Xt}}{b+iY} dY.$$

Envisageons cette dernière intégrale dans le plan complexe

$$Y = x + iy = \rho e^{i\alpha}.$$

Pour tout point situé sur la demi-circonférence de centre O et de rayon $R > b$, dont le diamètre coïncide avec l'axe réel, on a

$$Y = R e^{i\alpha} = R(\cos \alpha + i \sin \alpha);$$

donc

$$e^{iYt} = e^{-iR \sin \alpha} e^{iR \cos \alpha}$$

et

$$|e^{iYt}| = e^{-iR \sin \alpha};$$

il en résulte que, si $|Y| \rightarrow \infty$, la quantité

$$\left| \frac{Y e^{iYt}}{b + iY} \right|$$

tend vers zéro, puisque, sur la demi-circonférence envisagée, $\sin \alpha > 0$.

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iYt} dY}{b + iY} = 2\pi i \rho_1,$$

ρ_1 étant le résidu relatif au pôle simple $Y = bi$. On voit aussitôt que $\rho_1 = -ie^{-bt}$, et finalement

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{e^{tZ} dZ}{Z} = 2\pi i,$$

ce qui justifie la formule considérée.

SECONDE PARTIE.

LE CALCUL SYMBOLIQUE ET L'ÉTUDE DES FONCTIONS.

Nous allons à présent, comme nous l'avons annoncé, montrer que le calcul symbolique permet de trouver aisément les principales propriétés d'un grand nombre de fonctions.

1. Fonctions de Bessel. — La fonction $J_n(t)$ de Bessel est définie par la série

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{2^m m! (n+1, m)},$$

où n est quelconque, et où, pour simplifier, on pose

$$(n+1, m) = (n+1)(n+2)\dots(n+m).$$

Pour trouver son image symbolique, modifions légèrement cette définition en remplaçant t par $2\sqrt{t}$,

$$J_n(2\sqrt{t}) = \frac{t^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^m}{m! (n+1, m)},$$

d'où

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{m+\frac{n}{2}}}{m! (n+1, m) \Gamma(n+1)}$$

et, en prenant les images de chacun des termes de la série,

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \supset \sum \frac{(-1)^m \Gamma(m+n+1)}{m! (n+1, m) \Gamma(n+1) p^{m+\frac{n}{2}}}.$$

Mais on a visiblement

$$\Gamma(m+n+1) = (n+1)(n+2)\dots(n+m) \Gamma(n+1),$$

de sorte que le second membre se réduit à

$$\frac{1}{p^n} \sum_m \frac{(-1)^m}{m! p^m} = \frac{1}{p^n} e^{-\frac{1}{p}},$$

d'où finalement l'image fondamentale

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \supset p^{-n} e^{-\frac{1}{p}}.$$

Démontrons alors quelques-unes des propriétés des fonctions de Bessel, à partir de cette relation symbolique. Appliquons d'abord la formule (D), en supposant n différent de zéro : au premier membre, on aura la dérivée

$$\frac{d}{dt} \left[t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \right] = \frac{n}{2} t^{\frac{n-1}{2}} J_n(2\sqrt{t}) + t^{\frac{n-1}{2}} J_n'(2\sqrt{t}),$$

et au second membre,

$$p^{-n+1} e^{-\frac{1}{p}},$$

qui est l'image de

$$t^{\frac{n-1}{2}} J_{n-1}(2\sqrt{t}),$$

d'où, en remplaçant $2\sqrt{t}$ par t , et en simplifiant, la *formule de récurrence* entre fonctions J et J',

$$t J_{n-1}(t) = n J_n(t) - t J'_n(t).$$

De même, l'application de la formule (G) donnerait la *formule de récurrence* entre fonctions J contiguës

$$J_{n+1}(t) + J_{n-1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t).$$

Enfin on obtiendra aisément l'*équation différentielle* des fonctions de Bessel. Si nous posons

$$y = t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \supset p^{-n} e^{-\frac{1}{p}},$$

on aura

$$y' \supset p^{-n+1} e^{-\frac{1}{p}},$$

$$y'' \supset p^{-n+2} e^{-\frac{1}{p}}$$

et

$$t y'' \supset -p \frac{d}{dp} \left[p^{-n+1} e^{-\frac{1}{p}} \right] = (n-1) p^{-n+1} e^{-\frac{1}{p}} - p^{-n} e^{-\frac{1}{p}},$$

d'où

$$t y'' = (n-1) y' - y.$$

On déduira aussi de la représentation symbolique indiquée la valeur de $J_{-\frac{1}{2}}(t)$. Considérons en effet la séquence (N) : on aura, en partant

de

$$\varphi(p) = \frac{p}{p+1} \subset e^{-t}, \quad f(t) = e^{-t}$$

$$\sqrt{p} f\left(\frac{1}{p}\right) = \sqrt{p} e^{-\frac{1}{p}} \subset t^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(2\sqrt{t}) = h(t)$$

et

$$\frac{p^2}{p^2+1} \subset \frac{\sqrt{\pi}}{2} t \left[\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(t) \right];$$

donc

$$\cos t = \sqrt{\frac{\pi t}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(t)$$

et la valeur de $J_{\frac{1}{2}}(t)$ s'obtiendrait d'une manière analogue.

Établissons à présent la *représentation intégrale* d'une fonction de Bessel. Considérons les deux correspondances

$$\varphi_1(p) = p^{m-n} \subset \frac{t^{n-m}}{\Gamma(n-m+1)}$$

avec $n - m > 1$, et

$$\varphi_2(p) = p^{1-m} e^{-\frac{1}{p}} \subset t^{\frac{m-1}{2}} J_{m-1}(2\sqrt{t}).$$

Appliquons la *formule du produit* (L) : on a

$$\frac{1}{p} \varphi_1(p) \varphi_2(p) = p^{-n} e^{-\frac{1}{p}} \subset t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t});$$

donc

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) = \frac{1}{\Gamma(n-m+1)} \int_0^t (t-u)^{n-m} u^{\frac{m-1}{2}} J_{m-1}(2\sqrt{u}) du,$$

Remplaçons $2\sqrt{t}$ par t , et $2\sqrt{u}$ par u

$$t^n J_n(t) = \frac{2^{m-n}}{\Gamma(n-m+1)} \int_0^t (t^2 - u^2)^{n-m} u^m J_{m-1}(u) du.$$

Faisons à présent $m = \frac{1}{2}$: au second membre apparaît la fonction de Bessel d'indice $-\frac{1}{2}$: d'où, après réductions,

$$t^n J_n(t) = \frac{2^{1-n}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}} \int_0^t (t^2 - u^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos u du.$$

Posons enfin dans l'intégrale $u = t \sin \theta$: on obtient la formule cherchée

$$J_n(t) = \frac{2^{1-n} t^n}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \theta \cos(t \sin \theta) d\theta.$$

Demandons-nous maintenant quelle est l'image d'une fonction

de Bessel d'argument t , et non plus d'argument $2\sqrt{t}$. Il suffira d'appliquer la formule (K) : on a

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \supset p^{-n} e^{-\frac{1}{p}};$$

donc

$$t^n J_n(\sqrt{t}) \supset \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{p^2 x^2}{t}} x^{2n} e^{-x^2} dx.$$

Divisons t par 2 , ce qui revient (formule B) à multiplier p par 2 , et remplaçons en même temps dans l'intégrale x par $\frac{s}{2}$

$$\supset t^n J_n(t) \supset \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4}} (p^2+1)^{n^2} s^{2n} ds$$

et, en posant

$$s = \frac{2u}{\sqrt{p^2+1}},$$

$$\supset t^n J_n(t) \supset \frac{2^{2n+1} p}{\sqrt{\pi} (p^2+1)^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2n} du.$$

Supposons maintenant n entier > 0 ; l'intégrale du second membre est alors classique, et égale à

$$\frac{1.3 \dots (2n-1) \sqrt{\pi}}{2^{n+1}};$$

d'où enfin

$$t^n J_n(t) \supset 1.3 \dots (2n-1) \frac{p}{(p^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

En particulier,

$$J_0(t) \supset \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

On en déduira, en appliquant les formules de récurrence,

$$J_n(t) \supset \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} (\sqrt{p^2+1} - p)^n;$$

on peut démontrer que cette relation reste valable même pour n non entier.

Enfin diverses propriétés, plus difficiles à démontrer par le calcul ordinaire : voici par exemple deux formules établies par Van der Pol [8 a].

1° Appliquons la formule du produit aux deux fonctions

$$\varphi_1(p) = \varphi_0(p) = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \subset J_0(t),$$

on aura

$$\frac{1}{p} \frac{p^2}{p^2+1} \subset \int_0^t J_0(t-u) J_0(u) du,$$

d'où la relation

$$\int_0^t J_0(t-u) J_0(u) du = \sin t.$$

2° Dérivée de J_n par rapport à l'indice n : écrivons encore

$$p^{-n} e^{-\frac{1}{p}} \subset \frac{n}{t^2} J_n(2\sqrt{t})$$

et dérivons les deux membres par rapport à n

$$-p^{-n} e^{-\frac{1}{p}} \log p \subset \frac{1}{2} \frac{n}{t^2} \log t J_n(2\sqrt{t}) + t^{\frac{n}{2}} \frac{\partial}{\partial n} J_n(2\sqrt{t}).$$

Mais le premier membre peut s'écrire

$$\frac{1}{p} \varphi_1(p) \varphi_0(p)$$

avec

$$\varphi_1(p) = -\log p \subset \log t + \gamma,$$

$$\varphi_2(p) = p^{-n+1} e^{-\frac{1}{p}} \subset t^{\frac{n-1}{2}} J_{n-1}(2\sqrt{t})$$

et son image, d'après le théorème du produit, sera donc

$$\int_0^t [\log(t-u) + \gamma] u^{\frac{n-1}{2}} J_{n-1}(2\sqrt{u}) du,$$

ce qui conduit, après un changement de variables, à la formule très remarquable

$$\frac{\partial J_n(t)}{\partial n} = \left[\log \frac{t}{2} + \gamma \right] J_n(t) + \int_0^t \log \left(1 - \frac{y^2}{t^2} \right) \left(\frac{y}{t} \right)^n J_{n-1}(y) dy.$$

2. Fonctions de Kelvin. — La physique mathématique utilise souvent les fonctions *ber* et *bei* de Kelvin, définies par

$$J_0(ti\sqrt{v}) = bert + i beit.$$

Leur image est aisée à écrire : comme l'on a

$$J_0(2\sqrt{t}) \supset e^{-\frac{1}{p}},$$

il suffira de multiplier \sqrt{t} par $t^{\frac{3}{2}}$, donc t par $-i$, et par conséquent de diviser p par $-i$ au second membre, pour obtenir, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$ber(2\sqrt{t}) \supset \cos \frac{1}{p},$$

$$bei(2\sqrt{t}) \supset \sin \frac{1}{p},$$

formules signalées pour la première fois par Van der Pol [8].

De la même manière, en partant de la représentation

$$J_0(t) \supset \frac{p}{\sqrt{p^2+1}},$$

on sera conduit à [17 c]

$$ber t \supset \frac{p}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{p^4+1}} + \frac{p^2}{p^4+1} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$bei t \supset \frac{p}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{p^4+1}} - \frac{p^2}{p^4+1} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

En appliquant la formule du produit, on aura

$$2 \int_0^t ber(t-u) bei u du \supset \frac{p}{p^4+1}.$$

Comme on a

$$\sin \lambda t \supset \frac{\lambda p}{p^2 + \lambda^2},$$

$$\text{sh } \lambda t \supset \frac{\lambda p}{p^2 - \lambda^2},$$

on pourra écrire

$$\text{sh } \lambda t - \sin \lambda t \supset \frac{2p\lambda^3}{p^4 - \lambda^4},$$

d'où le résultat

$$\int_0^t ber(t-u) bei u du = \frac{\text{sh } t \sqrt{i} - \sin t \sqrt{i}}{4i \sqrt{i}}.$$

3. Logarithme intégral et fonctions connexes. — Très importantes

dans de nombreux problèmes sont les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \frac{e^u}{u} du &= Ei(t) \quad (\text{logarithme intégral}), \\ - \int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u} du &= ci(t) \quad (\text{cosinus intégral}), \\ - \int_t^{\infty} \frac{\sin u}{u} du &= si(t) \quad (\text{sinus intégral}), \end{aligned}$$

qui satisfont à la relation

$$Ei(it) = ci(t) + i si(t).$$

Leurs images s'obtiennent immédiatement à partir de celles de l'exponentielle, du sinus et du cosinus, en appliquant la relation (1) : on trouvera

$$\begin{aligned} Ei(t) &\supset -\log(p-1), \\ ci(t) &\supset -\log \sqrt{p^2+1}, \\ si(t) &\supset -\text{arc tang } p. \end{aligned}$$

On peut aussi considérer la fonction Ei comme image, et non comme original : on connaît en effet le développement

$$Ei(p) = \frac{e^p}{p} \sum_0^{\infty} \frac{m!}{p^m},$$

qu'on peut écrire

$$-p e^p Ei(-p) = \sum_0^{\infty} \frac{m!}{(-p)^m}.$$

Mais

$$\sum_0^{\infty} \frac{m!}{(-p)^m} < \sum_0^{\infty} (-t)^m = \frac{1}{1+t},$$

d'où

$$-p e^p Ei(-p) < \frac{1}{1+t}.$$

Appliquons la formule du produit à cette fonction et à la fonction

$$p e^{-p} Ei(p) < \frac{1}{1-t},$$

nous trouvons

$$-p Ei(p) Ei(-p) < \int_0^t \frac{du}{(1-t-u)(1-u)} = -\frac{\log(1-t^2)}{t},$$

où encore

$$p \operatorname{Ei}(ip) \operatorname{Ei}(-ip) \subset \frac{\log(1+t^2)}{t}.$$

Mais le premier membre est

$$p[ci^2(p) + si^2(p)],$$

ce qui conduit à la formule, établie par Enneper,

$$ci^2(p) + si^2(p) = \int_0^\infty \frac{e^{-pt} \log(1+t^2)}{t} dt.$$

Ainsi l'image de $\frac{\log(1+t^2)}{t}$ est $p[ci^2(p) + si^2(p)]$. D'autre part l'original de $\frac{\log(1+p^2)}{p}$ se calculera aisément : on a, en effet,

$$\log \sqrt{1+p^2} \subset -ci(t),$$

d'où (formulé E)

$$\frac{\log(1+p^2)}{p} \subset -2 \int_0^t ci(u) du = -2[t ci(t) - \sin t].$$

Appliquons alors la séquence (M) : il vient la relation

$$ci^2(p) + si^2(p) = -2 \int_0^\infty \frac{t ci(t) - \sin t}{(p+t)^2} dt$$

qui, après une intégration par parties, en se souvenant que $ci(t)$ s'annule à l'infini, conduit à une formule beaucoup plus simple que celle d'Enneper [47 a]

$$ci^2(p) + si^2(p) = -2 \int_0^\infty \frac{ci(t)}{p+t} dt.$$

4. Intégrales de Fresnel et de Gilbert. — L'optique mathématique utilise les intégrales de Fresnel, définies par

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_0^t J_{\frac{1}{2}}(u) du,$$

$$C(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_0^t J_{-\frac{1}{2}}(u) du,$$

ainsi que les intégrales de Gilbert,

$$P_\lambda(p) = \int_0^{\infty} e^{-p \cdot x} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x^2} dx.$$

Plusieurs propriétés de ces fonctions peuvent être obtenues symboliquement. On a, en se reportant aux images symboliques des fonctions de Bessel,

$$S(t) \supset \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{p^2+1}},$$

$$C(t) \supset \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{p^2+1}}.$$

Pour ne donner qu'un exemple, calculons, par la formule

$$t f(t) \supset -p \varphi'(p),$$

l'image de $tS(t)$: nous trouverons

$$tS(t) \supset \frac{1}{p} \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{p^2+1}} \left[\frac{p}{2\sqrt{p^2+1}} + \frac{p^3}{p^2+1} + 1 \right].$$

Au second membre apparait le produit

$$\frac{1}{p} \varphi_1(p) [\varphi_2(p) + \varphi_3(p) + \varphi_4(p)],$$

où

$$\varphi_1(p) \subset S(t),$$

$$\varphi_2(p) \subset \frac{J_0(t)}{t^2},$$

$$\varphi_3(p) \subset \cos t,$$

$$\varphi_4(p) \subset 1,$$

d'où, par application de la formule du produit, la relation

$$tS(t) = \int_0^t \left[\frac{J_0(t-u)}{2} + \cos(t-u) + 1 \right] S(u) du,$$

qu'une dérivation transformera en équation intégrale vérifiée par la fonction S [17 d]

$$S(t) = t J_{\frac{1}{2}}(t) + \int_0^t [J_1(t-u) + 2 \sin(t-u)] S(u) du.$$

Quant aux intégrales de Gilbert, on a, par leur définition même

$$P P_\lambda(p) \subset \frac{t^{\lambda-1}}{1+t^2}$$

et

$$P_\lambda(p) \subset \int_0^t \frac{x^{\lambda-1}}{1+x^2} dx;$$

eu particulier,

$$P_1(p) \subset \text{arc tang } t,$$

$$P_2(p) \subset \log \sqrt{1+t^2},$$

d'où, par application de la séquence (M),

$$P_1(p) = -p \int_0^\infty \frac{si(x)}{(p+x)^2} dx,$$

$$P_2(p) = -p \int_0^\infty \frac{ci(x)}{(p+x)^2} dx$$

et, comme on a la relation facile à vérifier

$$P_{\lambda+1} + P_\lambda = \Gamma(\lambda)p^{-\lambda},$$

on voit que les intégrales de Gilbert s'exprimeront, pour toutes les valeurs entières de λ , et suivant sa parité, par le sinus intégral ou par le cosinus intégral [20].

§. La fonction $\nu(t)$ et ses applications. — Dans l'intégrale de Carson, remplaçons p par $\log p$; il vient

$$\frac{\varphi(\log p)}{\log p} = \int_0^\infty p^{-s} f(s) ds;$$

or

$$p^{-s} \subset \frac{t^s}{\Gamma(s+1)},$$

d'où la formule [17 a]

$$\frac{\varphi(\log p)}{\log p} \subset \int_0^\infty \frac{t^s f(s) ds}{\Gamma(s+1)}.$$

En particulier, avec $\varphi = 1$,

$$\frac{1}{\log p} \subset \int_0^\infty \frac{t^s ds}{\Gamma(s+1)}.$$

Désignons par $\nu(t)$ l'intégrale qui figure au second membre [20];

cette fonction jouit de propriétés remarquables : ainsi, en appliquant la relation (J), on trouve

$$\varphi(\sqrt{p}) = \frac{2}{\log p} \subset \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} v(x) dx,$$

d'où l'équation intégrale

$$2\sqrt{\pi t} v(t) = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} v(x) dx.$$

D'autre part, si nous appliquons la séquence (N), on aura,

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \frac{1}{\log p} \subset v(t) = f(t), \\ \sqrt{p} v\left(\frac{1}{p}\right) &\subset h(t), \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} t h\left(\frac{t^2}{4}\right) &\supset \varphi(p^2) = \frac{1}{2 \log p} \subset \frac{v(t)}{2}, \end{aligned}$$

d'où

$$h(t) = \frac{v(2\sqrt{t})}{2\sqrt{\pi t}},$$

et la correspondance

$$\sqrt{p} v\left(\frac{1}{p}\right) \subset \frac{v(2\sqrt{t})}{2\sqrt{\pi t}}.$$

Enfin, dans l'intégrale définissant $v(t)$, remplaçons t par e^{-p} , et multiplions les deux membres par p

$$p v(e^{-p}) = p \int_0^\infty \frac{e^{-ps} ds}{\Gamma(s+1)},$$

d'où la très remarquable correspondance symbolique

$$p v(e^{-p}) \subset \frac{1}{\Gamma(t+1)}.$$

6. Fonctions périodiques. — Si λ est un nombre positif quelconque, et si $f(t)$ est nul pour $t < 0$, nous avons démontré les formules (F)

$$\begin{aligned} e^{-\lambda p} \varphi(p) &\subset 0 & (t < \lambda), \\ e^{-\lambda p} \varphi(p) &\subset f(t - \lambda) & (t > \lambda). \end{aligned}$$

Interprétons graphiquement ces correspondances.

Soit X'OAB la courbe représentative des variations de $f(t)$: l'original de $e^{-p\lambda} \varphi(p)$ aura pour courbe représentative de ses varia-

tions la courbe $X'CA'B'$, déduite de la précédente par une translation parallèle à $X'X$, d'amplitude λ .

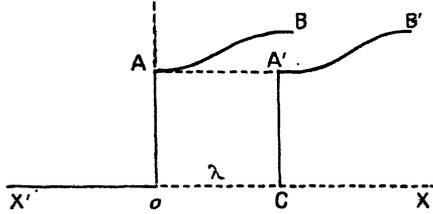


Fig. A.

Il est alors possible de trouver les images de diverses fonctions périodiques : ainsi l'égalité symbolique

$$e^{-kp} \subset U(t - K)$$

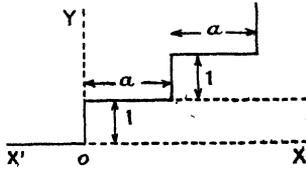


Fig. B.

montrera que l'image de la *fonction gradins*,

$$U(t) + U(t - a) + U(t - 2a) + \dots$$

est

$$1 + e^{-ap} + e^{-2ap} + \dots = (1 - e^{-ap})^{-1}.$$

De même, la *fonction créneaux*

$$U(t) - U(t - a) + U(t - 2a) - \dots$$

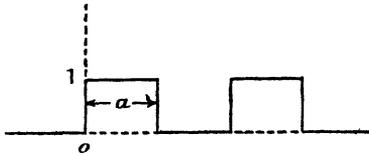


Fig. C.

a pour image

$$1 - e^{-ap} + e^{-2ap} - e^{-3ap} + \dots = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{ap}{2}.$$

Soit encore la *fonction dents de scie*, qui est

$$f(t) = t - [t],$$

où $[t]$ représente le plus grand nombre entier contenu dans t , et qui est liée à la théorie des oscillations de relaxation : d'après ce qu'on vient de dire sur la fonction gradins, on pourra écrire

$$\frac{1}{1 - e^{-p}} - 1 = \frac{1}{e^p - 1} \subset [t]$$

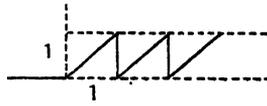


Fig. D.

et par conséquent l'image de cette fonction dents de scie sera

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{e^p - 1}.$$

Ces résultats ont permis à Van der Pol [86] d'obtenir l'original de la fonction ζ de Riemann, définie par

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

On peut, en effet, l'écrire

$$\zeta(p) = e^{-p \log 1} + e^{-p \log 2} + \dots$$

Mais

$$e^{-p \log n} \subset U(t - \log n),$$

le second membre passant brusquement de 0 à 1 pour $t = \log n$.

L'original de $\zeta(p)$ est donc la fonction passant de 0 à 1 pour $t = \log 1$, de 1 à 2 pour $t = \log 2$, ... ; donc évidemment

$$\zeta(p) \subset [e^t].$$

A partir de cette représentation, Van der Pol a démontré plusieurs théorèmes connus relatifs aux nombres premiers.

Si nous revenons aux fonction périodiques, considérons une telle fonction $f(t)$ et soit T sa période. Désignons par $f_1(t)$ une fonction auxiliaire définie comme il suit : $f_1(t) = f(t)$ dans l'intervalle $(0, T)$;

$f_1(t) = 0$ pour toute valeur de t extérieure à cet intervalle. L'image de $f_1(t)$ sera

$$\varphi_1(p) = p \int_0^T e^{-p \cdot x} f_1(x) dx.$$

Développons f en série de Fourier,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{ni\omega t} F(ni\omega),$$

où

$$F(ni\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ni\omega x} f(x) dx,$$

relation qui s'écrira

$$F(ni\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\varphi_1(ni\omega)}{ni\omega} = \frac{\varphi_1(ni\omega)}{2\pi in},$$

d'où les coefficients de la série de Fourier à partir de l'expression symbolique de la fonction auxiliaire $f_1(t)$.

Ainsi, cherchons le développement en série de Fourier à partir de la fonction périodique représentée par une sinusoïde dont on aurait supprimé toutes les alternances négatives

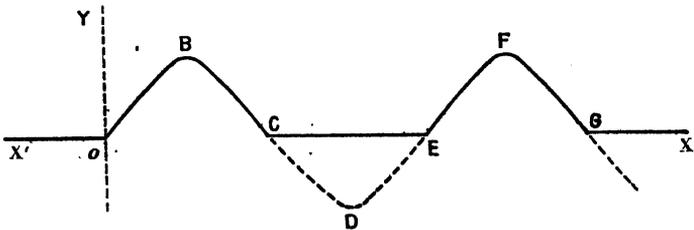


Fig. E.

La courbe X'OBCDEFG... représente la fonction dont l'image est

$$\frac{p\omega}{p^2 + \omega^2},$$

tandis que la courbe constituée par la demi-droite X'C et la sinusoïde CDEFG... représente une fonction ayant pour image

$$\frac{-p\omega}{p^2 + \omega^2} e^{-\frac{\pi}{\omega} p},$$

de sorte que la fonction auxiliaire, représentée ici par la demi-droite X'O, l'arche OBC et la demi-droite CX, a pour image

$$\frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi}{\omega} p} \right).$$

Il en résulte, tous calculs faits,

$$F(ni\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-ni\pi}}{1 - n^2},$$

d'où le développement en série de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 + e^{-ni\pi}}{1 - n^2} e^{ni\omega t},$$

qui s'écrit

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{2}{3\pi} \cos 2\omega t - \dots - \frac{2}{(4n^2 - 1)\pi} \cos 2n\omega t + \dots,$$

le coefficient de $\sin \omega t$ s'obtenant en appliquant la règle de L'Hospital à l'expression

$$\frac{1 + e^{-n\pi i}}{1 - n^2},$$

qui est indéterminée pour $r = \pm 1$.

TROISIÈME PARTIE.

LE CALCUL SYMBOLIQUE ET LA THÉORIE DU CIRCUIT ÉLECTRIQUE.

Dans ce chapitre, nous étudierons à l'aide du calcul symbolique les régimes transitoires des circuits électriques. Nous envisagerons principalement ceux à caractéristiques concentrées.

Les ingénieurs électriciens utilisent de plus en plus les méthodes opérationnelles : aux travaux déjà cités plus haut ajoutons ceux de Jeffreys [25], de L. Cohen [26], de Berg [27], et, pour divers autres problèmes de physique mathématique, ceux de Deutsch [28] et de Cagniard [29].

Dans le cas particulier où

$$(4) \quad \begin{cases} y_1(0) = y_2(0) = \dots = y_n(0) = 0, \\ y'_1(0) = y'_2(0) = \dots = y'_n(0) = 0, \\ f_1(t) = f_2(t) = \dots = f_{n-1}(t) = 0, \end{cases}$$

on obtient, en désignant par Δ , le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11}p + \gamma_{11}p^2 & \dots & \alpha_{1n} + \beta_{1n}p + \gamma_{1n}p^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} + \beta_{n1}p + \gamma_{n1}p^2 & \dots & \alpha_{nn} + \beta_{nn}p + \gamma_{nn}p^2 \end{vmatrix}.$$

et par δ_{nv} son mineur relatif à sa $n^{\text{ième}}$ ligne et sa $v^{\text{ième}}$ colonne,

$$Y_v(p) = \frac{\delta_{nv}}{\Delta} F(p),$$

et si de plus $f_n(t) = U(t)$, alors

$$Y_v(p) = \frac{\delta_{nv}}{\Delta}.$$

La détermination du régime transitoire d'un circuit électrique linéaire et passif à impédances localisées nécessite la résolution d'un système d'équations différentielles linéaires. Les méthodes opérationnelles imaginées par Heaviside, et que nous avons résumées au début de cet exposé, permettent de déterminer immédiatement la fonction y_v dans le cas particulier où les conditions (4) sont réalisées et où l'on a $f_n(t) = U(t)$. Cette détermination s'effectue directement à partir de la fonction rationnelle

$$\frac{\delta_{nv}}{\Delta} = \frac{H(p)}{Z(p)}.$$

Le paragraphe suivant donne la justification de deux règles importantes énoncées à ce sujet par Heaviside.

2. Retour sur les méthodes opérationnelles. — a. Développons y_v en série entière

$$y_v = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots$$

On en déduit

$$\int_0^\infty e^{-pt} y_v dt = \frac{1}{p} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{2! \alpha_2}{p^2} + \dots \right).$$

Mais on doit avoir

$$\frac{H(p)}{Z(p)} = p \int_0^{\infty} e^{-pt} y_v dt \subset y_v(t).$$

Développons le premier membre suivant les puissances négatives de p

$$\frac{H(p)}{Z(p)} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p^2} + \dots = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{2! \alpha_2}{p^2} + \dots,$$

d'où, par identification,

$$\alpha_0 = \alpha_0, \quad \frac{\alpha_1}{1!} = \alpha_1, \quad \frac{\alpha_2}{2!} = \alpha_2, \quad \dots,$$

et le théorème :

Ayant développé la fraction $\frac{H(p)}{Z(p)}$ suivant les puissances entières et négatives de p , on en déduira le développement en série entière de y_v en remplaçant p^{-m} par $\frac{t^m}{m!}$.

b. Les C désignant des constantes, écrivons que

$$y_v(t) = C_1 e^{p_1 t} + \dots + C_m e^{p_m t},$$

p_1, \dots, p_m désignant les m racines (supposées distinctes, ce qui est le cas dans la pratique) de $Z(p)$. On a alors

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} y_v(t) dt = \frac{C_0}{p} + \frac{C_1}{p - p_1} + \dots + \frac{C_m}{p - p_m}.$$

Écrivons

$$(5) \quad \frac{H(p)}{p Z(p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p - p_1} + \dots + \frac{M}{p - p_m};$$

comme le premier membre est égal à l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} y_v(t) dt,$$

on aura

$$C_0 = A, \quad C_1 = B, \quad \dots, \quad C_m = M.$$

Les règles bien connues de la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples permettent de calculer A, B, \dots ,

$$A = \frac{H(0)}{Z(0)}, \quad B = \frac{H(p_1)}{p_1 Z'(p_1)}, \quad \dots,$$

d'où le théorème du développement

$$y_v(t) = \frac{H(0)}{Z(0)} + \sum_{i=1}^m \frac{H(p_i)}{p_i Z'(p_i)} e^{p_i t}.$$

Les deux règles opérationnelles ainsi trouvées se justifient immédiatement en utilisant l'intégrale de Bromwich-Wagner : ainsi, en écrivant

$$\varphi(p) = \frac{H(p)}{Z(p)} = a_0 + \frac{a_1}{p} + \dots + \frac{a_n}{p^n} + \dots,$$

on trouve pour l'original $f(t)$ de cette fonction,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \dots \right) \left(1 + \frac{pt}{1!} + \frac{p^2 t^2}{2!} + \dots \right) dp.$$

En effectuant le produit, et en ordonnant suivant les puissances positives et négatives de p , on trouve un développement en série de Laurent valable dans une couronne circulaire ayant l'origine pour centre ; la valeur de l'intégrale devant être égale au coefficient du terme en $\frac{1}{p}$, multiplié par $2\pi i$, on obtient bien

$$f(t) = a_0 + \frac{a_1 t}{1!} + \frac{a_2 t^2}{2!} + \dots$$

Quant au théorème du développement, il suffira pour le justifier de prendre pour contour d'intégration un cercle ayant l'origine pour centre et contenant à son intérieur tous les pôles p_i de $\frac{H(p)}{Z(p)}$; il n'y aura alors qu'à appliquer le théorème des résidus pour calculer l'intégrale de Bromwich-Wagner.

3. Circuits à constantes localisées. — Dans le cas de circuits électriques comportant des impédances localisées, la détermination des régimes transitoires exige la résolution de systèmes d'équations différentielles. Comme nous supposons de plus que les circuits envisagés sont linéaires et passifs, ces équations différentielles seront linéaires et à coefficients constants : nous pourrons donc utiliser les principes généraux que nous avons posés.

Supposons que, jusqu'à l'instant $t = 0$, le réseau électrique envisagé soit en équilibre, ce qui revient à dire que jusqu'à l'instant

mais avec remplacement de zéro par $U(t)$ au second membre de la $j^{\text{ème}}$ équation, et de $U(t)$ par zéro au second membre de la première.

4. Théorème de Pomey. — Si la f. é. m. insérée dans la première maille est une fonction quelconque $V(t)$ du temps t , le courant $I_{1k}(t)$ qui circule dans la $k^{\text{ème}}$ maille est

$$(6) \quad I_{1k}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t V(\theta) A(t-\theta) d\theta.$$

En effet, divisons l'intervalle $(0, t)$ en n intervalles $(0, \theta_1)$, (θ_1, θ_2) , ..., (θ_{n-1}, t) et supposons qu'une f. é. m. constante $V(0)$ agisse à partir de l'instant $t=0$, qu'une f. é. m. constante $V(\theta_1) - V(0)$ agisse à partir de l'instant $t=\theta_1$, qu'une f. é. m. constante $V(\theta_2) - V(\theta_1)$ agisse à partir de l'instant $t=\theta_2$, et ainsi de suite. Chacune de ces f. é. m. provoquera la circulation d'un courant de la $k^{\text{ème}}$ maille : $A_{1k}(t)V(0)$ pour la première, $A_{1k}(t-\theta_1)[V(\theta_1) - V(0)]$ pour la seconde, et ainsi de suite. Si nous faisons tendre n vers l'infini, il vient

$$(7) \quad I(t) = A(t)V(0) + \int_0^t A(t-\theta)V'(\theta) d\theta$$

(où l'on a supprimé les indices pour simplifier l'écriture). En intégrant par parties, on a

$$\int_0^t A(t-\theta)V'(\theta) d\theta = [A(t-\theta)V(\theta)]_0^t - \int_0^t V(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} A(t-\theta) d\theta,$$

d'où, en portant dans (7),

$$\begin{aligned} I(t) &= A(0)V(t) - \int_0^t V(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} A(t-\theta) d\theta \\ &= A(0)V(t) + \int_0^t V(\theta) \frac{\partial}{\partial t} A(t-\theta) d\theta, \end{aligned}$$

ce qui est identique à la formule (6), ainsi qu'on le voit aisément. Cette formule exprime le théorème de Pomey [30].

On voit donc que si

$$\begin{aligned} \varphi_1(p) &\subset V(t), \\ \varphi_2(p) &\subset A(t), \end{aligned}$$

on a, en vertu du théorème du produit, la correspondance

$$\varphi_1(p) \varphi_2(p) \subset I(t).$$

Comme le théorème du produit subsiste par permutation des indices. les fonctions A et V seront commutatives, et la formule (6) s'écrira aussi

$$I(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t V(t - \theta) A(\theta) d\theta.$$

Le théorème de Pomey consiste à remplacer la courbe X'OAM représentative des variations de V(t) par la ligne brisée X'OABC... et à intégrer ensuite les effets produits par chaque échelon infiniment

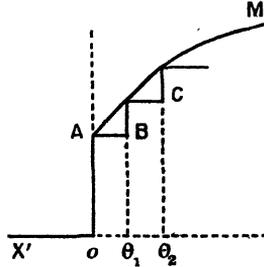


Fig. F.

petit de cette ligne. Ce théorème n'est évidemment valable que dans le cas où il est licite de superposer les effets produits par chaque f. é. m. élémentaire, c'est-à-dire dans le cas de circuits à caractéristiques linéaires.

5. Régimes transitoires de deux circuits oscillants couplés. — Considérons, ainsi que l'indique la figure ci-après, le schéma le plus général de deux circuits oscillants couplés. Proposons-nous de déterminer les admittances caractéristiques des deux mailles MNPQ et M'NPQ' par rapport à la première d'entre elles.

Pour cela, nous déterminerons d'abord les fonctions

$$q_1(t) = \int_0^t A_{11}(t) dt, \quad q_2(t) = \int_0^t A_{12}(t) dt,$$

qui satisfont au système

$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right) q_1 + (R + R_1) \frac{dq_1}{dt} + \mathcal{L}_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_2}{C} + R \frac{dq_2}{dt} + \mathcal{N} \frac{d^2 q_2}{dt^2} = U(t),$$

$$\frac{q_1}{C} + R \frac{dq_1}{dt} + \mathcal{N} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right) q_2 + (R_2 + R_1) \frac{dq_2}{dt} + \mathcal{L}_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} = 0.$$

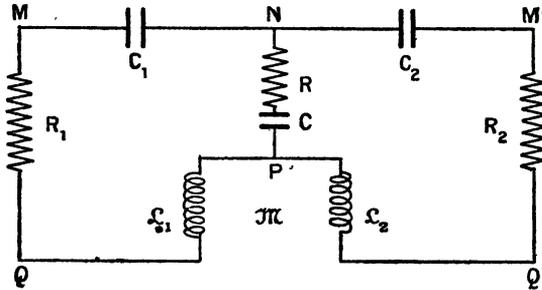


Fig. G.

Posons

$$Q_1(p) \subset q_1(t), \quad Q_2(p) \subset q_2(t),$$

on aura

$$Q_1(p) = \frac{\mathcal{L}_2 p^2 + (R_1 + R_2)p + \frac{1}{C} + \frac{1}{C_2}}{Z(p)},$$

$$Q_2(p) = + \frac{\mathcal{N} p^2 + R p + \frac{1}{C}}{Z(p)}$$

avec

$$Z(p) = (\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - \mathcal{N}^2) p^4 + [R(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{N}) + R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1] p^3$$

$$+ \left[\frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + \frac{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{N}}{C} + R(R_1 + R_2) + R_1 R_2 \right] p^2$$

$$+ \left[\frac{R_1 + R_2}{C} + \frac{R + R_2}{C_1} + \frac{R + R_1}{C_2} \right] p$$

$$+ \frac{1}{C_1 C_2} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right).$$

On en déduit $A_{11}(t)$ et $A_{12}(t)$ sachant qu'ils ont respectivement pour images $p_1 Q_1(p)$ et $p_2 Q_2(p)$. On obtiendra donc les A par le théorème du développement, si toutefois on connaît les racines de Z .

Envisageons quelques cas particuliers.

α. Dans le cas de deux circuits oscillants couplés électromagnétiquement, on a $C = \infty$, $R = 0$, et

$$Z(p) = (\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - \mathcal{M}^2) p^4 + (R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1) p^3 + \left(\frac{\mathcal{L}_2}{C_2} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_1} + R_1 R_2 \right) p^2 + \left(\frac{R_2}{C_1} + \frac{R_1}{C_2} \right) p + \frac{1}{C_1 C_2}.$$

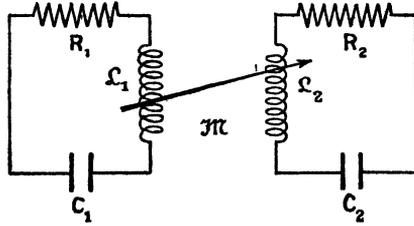


Fig. H.

Si les quatre racines de ce polynôme sont complexes,

$$\begin{aligned} p_1 &= -\alpha_1 + i\omega_1, & p_2 &= -\alpha_1 - i\omega_1, \\ p_3 &= -\alpha_2 + i\omega_2, & p_4 &= -\alpha_2 - i\omega_2, \end{aligned}$$

le régime transitoire comportera (comme le montre le théorème du développement) deux termes oscillatoires amortis dont les pseudo-périodes sont respectivement $\frac{2\pi}{\omega_1}$ et $\frac{2\pi}{\omega_2}$. Il peut ne comporter qu'une seule composante oscillatoire amortie (cas de deux racines réelles et deux racines complexes), ou pas du tout (les quatre racines réelles). Dans ce dernier cas, on peut affirmer que l'équation $Z''(p) = 0$ a certainement deux racines réelles, la courbe représentative des variations de $Z(p)$ comportant nécessairement deux points d'inflexion.

Cependant, la réciproque n'est pas vraie (voir la figure ci-après) : comme on a

$$\frac{1}{2} Z''(p) = 6(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - \mathcal{M}^2) p^2 + 3(R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1) p + \frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + R_1 R_2,$$

nous pouvons écrire qu'une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que le régime transitoire des circuits envisagés ne comporte aucune composante oscillatoire est

$$9(R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1)^2 > 24(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - \mathcal{M}^2) \left(\frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + R_1 R_2 \right).$$

On voit, en particulier, qu'une telle condition est réalisée si le couplage est suffisamment serré.

Dans le cas d'un couplage parfait, $\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 = \mathcal{M}^2$, et le polynome $Z(p)$ est du troisième degré : l'équation $Z(p) = 0$ aura au moins une racine réelle, et le régime transitoire comportera une seule composante oscillatoire, ou même n'en comportera aucune.

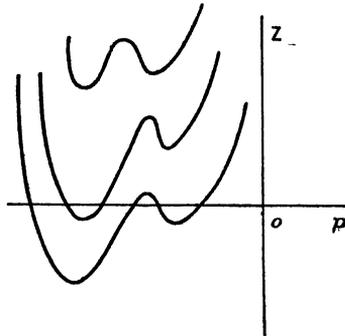


Fig. I.

Lorsque les résistances R_1 et R_2 ont des valeurs négligeables, l'équation $Z(p) = 0$ se réduit à l'équation bicarrée

$$(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - \mathcal{M}^2)p^4 + \left(\frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} \right)p^2 + \frac{1}{C_1 C_2} = 0$$

qui a quatre racines imaginaires pures. Ici il n'existe pas à proprement parler de régime transitoire : le système atteint immédiatement un régime permanent résultant de la superposition de deux oscillations sinusoïdales qui se perpétuent indéfiniment (l'amortissement est en effet nul). Les périodes de ces oscillations sont différentes des périodes propres $2\pi\sqrt{\mathcal{L}_1 C_1}$ et $2\pi\sqrt{\mathcal{L}_2 C_2}$ des deux circuits, mais elles s'en rapprochent d'autant plus que \mathcal{M} est plus petit, c'est-à-dire que le couplage est plus faible.

Tous ces résultats sont classiques : néanmoins il est intéressant de remarquer avec quelle facilité le calcul symbolique permet incidemment de les mettre en évidence.

β. Dans le cas de deux circuits oscillants, qui ne seraient couplés

qu'électrostatiquement, on a $\mathcal{M} = R = 0$, et alors

$$\begin{aligned} Z(p) &= \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 p^4 + (R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1) p^3 \\ &+ \left(\frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + \frac{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}{C} + R_1 R_2 \right) p^2 \\ &+ \left(\frac{R_1 + R_2}{C} + \frac{R_2}{C_1} + \frac{R_1}{C_2} \right) p + \frac{1}{C_1 C_2} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right). \end{aligned}$$

Ici

$$\frac{1}{2} Z''(p) = 6 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 p^2 + 3(R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1) p + \frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + \frac{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}{C} + R_1 R_2$$

et une condition, nécessaire mais non suffisante, pour que le régime transitoire ne comporte pas de composante oscillatoire sera

$$3 \left(R_1 \frac{\mathcal{L}_2}{\mathcal{L}_1} + R_2 \frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2} - 2 R_1 R_2 \right) > 8 \left(\frac{\mathcal{L}_2}{C_1} + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + \frac{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}{C} \right).$$

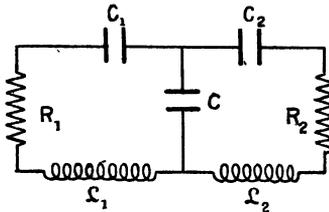


Fig. J.

Si nous supposons de plus $C_1 = C_2 = \infty$, alors

$$Z(p) = p \left[\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 p^3 + (R_1 \mathcal{L}_2 + R_2 \mathcal{L}_1) p^2 + \left(\frac{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}{C} + R_1 R_2 \right) p + \frac{R_1 + R_2}{C} \right]$$

et $Z(p)$ admet la racine $p = 0$.

γ . Revenons au cas général, mais supposons que les circuits soient dénués de résistance, et que le couplage électromagnétique soit parfait. On aura

$$Z(p) = \left[\frac{1}{C} (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{M}) + \frac{\mathcal{L}_1}{C_2} + \frac{\mathcal{L}_2}{C_1} \right] p^2 + \frac{C + C_1 + C_2}{C C_1 C_2}.$$

Posons

$$\begin{aligned} \frac{C + C_1 + C_2}{C_1 C_2 (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{M}) + C (\mathcal{L}_1 C_1 + \mathcal{L}_2 C_2)} &= \omega^2 \\ \frac{C C_1 C_2}{C + C_1 + C_2} \omega^2 &= a. \end{aligned}$$

Alors

$$ap \frac{\mathcal{L}_2 p^\circ + \frac{1}{C} + \frac{1}{C_2}}{p' + \omega^2} \subset A_{11}(t),$$

$$- ap \frac{\mathcal{M} p^2 + \frac{1}{C}}{p^2 + \omega} = A_{\circ 1}(t),$$

d'où

$$A_{11}(t) = a \left(\frac{1}{C\omega} + \frac{1}{C_2\omega} - \mathcal{L}_\circ \omega \right) \sin \omega t,$$

$$A_{\circ 1}(t) = a \left(\mathcal{M}\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \sin \omega t.$$

Les circuits n'étant pas amortis, un régime sinusoïdal permanent de pulsation ω est immédiatement atteint.

4. Cas de deux circuits oscillants couplés par l'entremise d'un troisième circuit oscillant. — Posons ici (*voir la figure*)

$$\mathcal{L}'_1 + \mathcal{L}''_2 = \mathcal{L}_2.$$

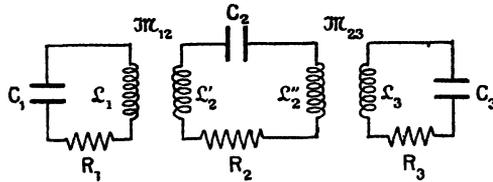


Fig. K.

Pour pouvoir utiliser le théorème du développement, on doit calculer les racines de l'équation suivante, qui se présente sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{C_1} + pR_1 + p^2 \mathcal{L}_1 & p^2 \mathcal{M}_{12} & 0 \\ p^2 \mathcal{M}_{1\circ} & \frac{1}{C_2} + pR_2 + p^2 \mathcal{L}_2 & p^\circ \mathcal{M}_{23} \\ 0 & p^2 \mathcal{M}_{\circ 3} & \frac{1}{C_3} + pR_3 + p^2 \mathcal{L}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Elle est du sixième degré. Cet exemple montre combien la détermination des admittances indiciales devient en pratique très ardue dès que la configuration des circuits se complique tant soit peu.

5. Application à une équation aux dérivées partielles. — Nous terminerons en indiquant une application du calcul symbolique à la résolution d'une équation aux dérivées partielles : celle des cordes vibrantes. C'est aussi l'équation régissant la propagation de l'électricité le long d'une ligne de résistance négligeable et parfaitement isolée.

Soit l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

la fonction inconnue $v(x, t)$ devant satisfaire aux conditions

$$(3) \quad \begin{cases} v(x, 0) = f(x), \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x), \end{cases}$$

f et g étant deux fonctions données.

Posons

$$(3) \quad V(x, p) \subset v(x, t),$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &\supset pV - pf(x), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &\supset p^2V - p^2f(x) - pg(x), \end{aligned}$$

d'où la forme symbolique de (1)

$$(4) \quad c^2 \frac{d^2 V}{dx^2} - p^2 V = -p^2 f(x) - pg(x).$$

Une solution de cette équation est donnée par

$$(5) \quad \begin{aligned} V = & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha \int_0^{\infty} \frac{p^2 \cos \beta(x-\alpha)}{p^2 + c^2 \beta^2} d\beta \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha) d\alpha \int_0^{\infty} \frac{p \cos \beta(x-\alpha)}{p^2 + c^2 \beta^2} d\beta, \end{aligned}$$

car, d'après une formule bien connue due à Fourier,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) d\alpha \int_0^{\infty} \cos \beta(x-\alpha) d\beta.$$

En remarquant que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mu}{a^2 + u^2} du = \begin{cases} \frac{\pi}{2a} e^{-ma} & (m > 0), \\ \frac{\pi}{2a} e^{ma} & (m < 0), \end{cases}$$

la seconde ligne de la formule (5) s'écrit

$$V = \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{p(x-\alpha)}{c}} g(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2c} \int_x^{+\infty} e^{\frac{p(x-\alpha)}{c}} g(\alpha) d\alpha.$$

Or

$$e^{-\frac{p(x-\alpha)}{c}} = \begin{cases} 0 & (\alpha < x - ct), \\ 1 & (\alpha > x - ct), \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha \int_0^{\infty} \cos c\beta t \cos \beta(x - \alpha) d\beta \\ &+ \frac{1}{2c} \left[\int_{x-ct}^x g(\alpha) d\alpha + \int_x^{x+ct} g(\alpha) d\alpha \right]. \end{aligned}$$

En remarquant que la première intégrale du second membre s'écrit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha \int_0^{\infty} \cos \beta(x - \alpha + ct) d\beta \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha \int_0^{\infty} \cos \beta(x - \alpha - ct) d\beta, \end{aligned}$$

il vient finalement, en utilisant (6),

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\alpha) d\alpha.$$

FIN.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE.

-
1. O. HEAVISIDE. — *On operators in mathematical physics* (*Proc. Roy. Soc.*, t. 52, 1893, p. 504; t. 54, 1894, p. 105).
 2. GIOVANNI GIORGI. — *Il metodo simbolico nello studio delle correnti variabile* (*Atti Asso. Elett. Ital.*, vol. VIII, 1905, p. 64).
— *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate dai problemi di elettrodinamica* (*Ibid.*, vol. IX, 1905, p. 651)
— *The functional dependance of physical variables* (*Proc. intern. Math. Congr. Toronto*, vol. II, 1924, p. 355).
 3. T. J. BROMWICH, — *Normal coordinates in dynamical systems* (*Proc. London Math. Soc.*, t. XV, 1916, p. 501).
 4. K. W. WAGNER. — *Ueber eine Formel von Heaviside* (*Archiv für Elektrotechnik*, t. 4, 1916, p. 159).
 5. H. W. MARCH. — *The Heaviside operational calculus* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, May-June 1926).
 6. N. WIENER. — *The operational calculus* (*Math. Ann.*, 9, 1926, p. 553).
 7. J. R. CARSON. — *The Heaviside operational calculus* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, Jan -Feb. 1926).
— *Electric circuit theory and the operational calculus* (New-York, 1926).
 8. B. VAN DER POL. — *Symbolic calculus* (*Phil. Mag.*, t. 13, 1932, p. 537).
 - 8 a. — *On the operational solution of linear differential equations* (*Phil. Mag.*, t. 8, 1928, p. 861).
 - 8 b. — *Application of the operational or symbolic calculus to the Theory of prime Numbers* (*ibid.*, t. 26, 1938, p. 921).
 9. E. T. WHITTAKER. — *Oliver Heaviside* (*Bull. Calcutta Math. Soc.*, t. 20, 1929, p. 199).
 10. N. W. Mc LACHLAN. — *Operational systems* (*Phil. Mag.*, t. 25, 1938, p. 289).
— *Fourier expansions obtained operationally* (*ibid.*, t. 24, 1937, p. 1055).
— *Historical note on Heaviside's operational method* (*Math. Gazette*, t. 22, 1938, p. 255).

- 10 a. — *Complex variable and operational calculus with technical applications*. Cambridge, 1939 (contient une très copieuse bibliographie, à laquelle nous renvoyons le lecteur).
11. PAUL LÉVY. — *Bull. Sc. Math.*, sér. 2, t. 50, 1926, p. 174.
12. H. VOGT. — *Sur le calcul symbolique et ses applications à l'intégration des équations différentielles* (*Rev. gén. Électr.*, t. II, 1917, p. 483 et 563, et t. V, 1919, p. 581 et 907).
13. J.-B. POMBY. — *Le calcul symbolique d'Heaviside* (*ibid.*, t. XIII, 1923, p. 813).
— *Sur le calcul symbolique d'Heaviside* (*ibid.*, t. XLIV, 1938, p. 60).
14. A. BLONDEL. — *Introduction aux applications du Calcul symbolique d'Heaviside aux problèmes de l'électrotechnique* (*ibid.*, t. XXXIX, 1936, p. 83, 133, 179 et 219).
— *L'évolution des méthodes de calcul des phénomènes transitoires* (*ibid.*, t. XLI, 1937, p. 227, 259, 327 et 579).
15. Y. ROGARD. — *Les applications élémentaires du Calcul opérationnel de Heaviside* (*ibid.*, t. XLIX, 1941, p. 253).
16. P. JANET. — *Le calcul symbolique d'Heaviside et ses applications à l'électrotechnique* (Gauthier-Villars, 1938).
17. P. HUMBERT. — *Le calcul symbolique* (*Act. sc. et industr.*, n° 147, Hermann, 1934).
- 17 a. — *Formules nouvelles pour le calcul symbolique* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 65, 1937, p. 119).
- 17 b. — *Une formule du calcul symbolique* (72^e Congrès des Soc. savantes, Nice, 1938).
- 17 c. — *New operational representations* (*Proc. Edinb. Math. Soc.*, t. 1, 1935, p. 232).
- 17 d. — *Sur les intégrales de Fresnel* (*Mathematica*, t. 10, 1934, p. 32).
18. L. POLI. — *Équations intégrales et calcul symbolique* (*Ann. Soc. Scient. Bruxelles*, t. LV, sér. A, p. 111).
— *Sinus du n^{ième} ordre et calcul symbolique* (*ibid.*, t. LX, sér. 1, p. 15).
19. V. BARANOV. — *Oscillations d'un disque circulaire plongé dans un liquide visqueux* (*Cahiers de Physique*, cahier 15, 1943, p. 43).
20. S. COLOMBO. — *Sur quelques nouvelles correspondances symboliques* (*Bull. Sci. Math.*, (2), t. LXVII, 1943).
21. KY FAN. — *Le Calcul symbolique* (*Revue scientifique*, 1942).
22. N. W. MC LACHLAN et P. HUMBERT. — *Formulaire pour le Calcul symbolique* (Fasc. C du *Mémorial Sc. Math.*, Gauthier-Villars, 1941).

23. V. VOLTERRA et J. PÉRÈS. — *Leçons sur la composition et les fonctions permutables* (Collec. Borel, Gauthier-Villars).
24. G. et R. JULIA. — *Sur deux méthodes de calcul des régimes variables* (Bull. S. F. E., oct. 1936).
25. JEFFREYS. — *Operational methods in mathematical physics* (Cambridge, tracts, n° 23).
26. L. COHEN. — *Théorie du circuit électrique d'Heaviside*, trad. par F. SARRAT (Eyrolles, 1935).
27. BERG. — *Heaviside's operational calculus* (New-York, 1936).
28. DEUTSCH. — *Math. Zeits.*, t. 22, 1926, p. 285; t. 25, 1926, p. 608; t. 27, 1927, p. 89; t. 28, 1928, p. 567.
29. CAGNIARD. — *Ann. Phys.*, mai-juin 1940 et *Thèse de Doctorat*.
30. J.-B. POMEY. — *Propagation du courant dans une ligne* (Rev. gén. Électr., t. V. 1919, p. 204).



Dépôt légal d'éditeur. — 1946. — N° d'ordre 98.
 Dépôt légal d'imprimeur. — 1946. — N° d'ordre 223.
 Achevé d'imprimer le 2 janvier 1947