Traduction de la section 30 du livre "Geometrie der zahlen", de Minkowski (Teubner, Leipzig, 1896), p. 73 à 77, (Denise Vella-Chemla, assistée de Google translate, février 2023)

Troisième chapitre.
Solides qui, en raison de leur volume, contiennent plus d'un point à coordonnées entières.

30. Théorème arithmétique sur les solides non concaves avec centre.

L'ensemble de tous les points à coordonnées entières, c'est à dire l'ensemble de tous les n-uplets $x_1, \dots, x_n$ dans lesquels x_1 etc. x_n sont des nombres entiers, peut être appelé *grille de nombres.* Un point de cet ensemble est appelé point de la grille. Les coordonnées relatives de tous les points de la grille par rapport à un point fixe de la grille donnent à chaque fois tous les systèmes de valeurs possibles de n entiers. Dans ce chapitre et les suivants, certaines propriétés de la grille de nombres seront étudiées, qui se caractérisent par leur clarté, tout en ayant de nombreuses applications importantes.

On dénote par $S(\mathfrak{ab})$ la mesure du segment joignant $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{b}$, c'est à dire que selon les explications en 1, $S(\mathfrak{ab})$ doit toujours prendre une valeur déterminée pour tout point $\mathfrak{a}$ et tout point $\mathfrak{b}$, à savoir une valeur positive si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont différents , $S(\mathfrak{ab})$ vaut zéro sinon, et pour deux points différents $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ le quotient $\dfrac{S(\mathfrak{ab})}{E(\mathfrak{ab})}$, compris comme mesure de la distance de $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{b}$ (cf. 2), ne dépend que de la direction $\mathfrak{ab}$; ce quotient a reçu la désignation de *coefficient de distance de la direction* $\mathfrak{ab}$.

On peut en outre supposer qu'il existe une limite inférieure *positive* g pour tous les coefficients de distance. Ensuite, parmi toutes les mesures des distances d'un point fixe de la grille à tous les autres points de la grille, il y a toujours une certaine distance plus petite que les autres. Alors comme dans 3, on note $\dfrac{G}{n}$ le maximum parmi les $2n$ segments du point zéro 0 aux $2n$ points de la grille qui correspondent à chaque fois aux coordonnées $x_1, \dots, x_n$ égales à ± 1 et les $n-1$ autres égales à 0. La mesure de la distance du point $\mathfrak{o}$ à chacun de ces points de la grille est évidemment aussi la plus petite distance possible d'un point de la grille à un autre. Il existe donc certainement des points de la grille différents du point zéro et pour lesquels la mesure du segment de ces points au point zéro est $\leq \dfrac{G}{n}$. Mais de tels points de la grille existent certainement seulement en nombre limité, car la mesure de la distance de ces points au point zéro doit être $\leq \dfrac{G}{n}$, c'est à dire que pour de tels points $\leq \dfrac{G}{ng}$, toutes les n coordonnées notées $x_1, \dots, x_n$ ont des valeurs absolues $< \dfrac{G}{ng}$ et cette condition ne peut être satisfaite que par un nombre limité des $x_1, \dots, x_n$. D'où l'on peut désormais sélectionner des points de la grille tous différents qui sont à une mesure de segment $\leq \dfrac{G}{n}$ de $\mathfrak{o}$ pour lesquels la distance en question a la plus petite valeur ; la plus petite valeur en question est notée M. Le choix de la distance dans la grille se fait en fonction de la valeur la plus faible. Alors M est la plus petite distance possible entre un point de la grille et le point zéro M. La distance de M à d'autres points de la grille est évidemment la plus petite mesure de segment possible dans la grille de nombres, c'est-à-dire de n'importe quel point de la grille à d'autres points de la grille. Puisque la distance séparant deux points de la grille différents est toujours ≥ 1, la distance à M sera $\geq g$

dans tous les cas.

Maintenant, on peut en outre supposer qu'une distance radiale S est concordante[1], c'est à dire que pour trois points quelconques $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, on a toujours

$$S(\mathfrak{ac}) < S(\mathfrak{ab}) + S(\mathfrak{bc})$$

Comme prouvé en 6, cette exigence entraîne l'existence d'une limite inférieure positive g pour tous les coefficients de distance. Pour tout point de la grille $\mathfrak{a}$, on a le solide contenant les points éloignés de $\mathfrak{a}$ par un segment de longueur $\leq \frac{M}{2}$ (cf. 7) et pour tout autre point de la grille $\mathfrak{c}$, le solide contenant les points éloignés de $\mathfrak{c}$ par un segment de longueur $\leq \frac{M}{2}$. Mais alors le premier solide ne peut pas avoir de point intérieur en commun avec le second, car pour un point $\mathfrak{b}$ à l'intérieur du premier solide, on a toujours $S(\mathfrak{ab}) < \frac{M}{2}$; mais si $S(\mathfrak{bc}) \leq \frac{M}{2}$, il s'ensuivrait que $S(\mathfrak{ac}) < M$, tandis que d'après ce qui vient d'être dit, on doit avoir pour M : $S(\mathfrak{ac}) \geq M$.

Enfin, on peut supposer que les distances radiales $S(\mathfrak{ab})$ sont également réciproques, de sorte que $S(\mathfrak{ba}) = S(\mathfrak{ab})$ est toujours vrai ; pour les solides qui, en raison de leur volume, contiennent plus d'un point $\mathfrak{m}$, on utilise comme solide-étalon pour les distances radiales n'importe quel solide non concave ayant l'origine comme centre (comme la surface $S(\mathfrak{ox}) = 1$), et les surfaces à distance constante d'un point $\mathfrak{a}$ sont toujours identiques aux surfaces pour la même distance autour d'un autre point $\mathfrak{b}$. Puis, compte tenu de ce qui vient d'être prouvé, il s'ensuit que si pour chaque point unique de la grille $\mathfrak{a}$ le solide de rayon $\leq \frac{M}{2}$ de $\mathfrak{a}$ est construit, deux de ces solides seront toujours constamment différents dans leurs points intérieurs. Cette circonstance signifie que

> *Il y a une limite supérieure pour M, la plus petite mesure de segment dans la grille numérique, qui dépend uniquement du volume du solide contenant les points $\mathfrak{x}$ à distance de $\mathfrak{o}$ respectant $S(\mathfrak{ox}) \leq 1$.*

Cette assertion est une phrase qui, selon mon opinion, est l'une des plus fructueuses de la théorie des nombres.

Soit Ω un nombre pair positif quelconque, et tous les points existants de la grille pouvant être considérés, on considère un intervalle $\leq \frac{\Omega}{2}$ à partir du point zéro $\mathfrak{o}$. Ce sont ces points de la grille pour lesquels chacune des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ est égale à l'un des nombres $0, \pm 1, \pm 2, ... \pm \frac{\Omega}{2}$; le nombre de ces points de la grille est donc $(\Omega + 1)^n$. Pour chacun de ces points de la grille, soit M le solide contenant les points de la grille à distance $\leq \frac{M}{2}$ du point considéré. Un point $M < \frac{G}{n}$ est toujours dans le domaine des distances $\leq \frac{G}{2ng}$ au même point, et ces $(\Omega + 1)^n$ points au total sont donc complètement dans le solide des points $< \frac{\Omega}{2} + \frac{G}{2ng}$ du point zéro, c'est à dire dans le cube d'arête $\Omega + \frac{G}{ng}$ et ayant le point zéro comme centre. Maintenant, puisque ces corps ont leurs

[1] Elle respecte l'inégalité triangulaire.

points intérieurs qui sont constamment différents, selon 26 II., le volume de ce dernier cube n'est pas inférieur à la somme des volumes de ces $(\Omega+1)^n$ solides. Le volume de chacun de ces solides est $\left(\frac{M}{2}\right)^n J$, inférieur à J le volume du solide $S(\mathfrak{o}\mathfrak{x}) < 1$. Alors l'inégalité qui en résulte est :

$$\left(\Omega + \frac{G}{ng}\right)^n \geq (\Omega+1)^n \left(\frac{M}{2}\right)^n J,$$

ou

$$\left(\begin{matrix} 1 + \dfrac{G}{ng\Omega} \\ \\ 1 + \dfrac{1}{\Omega} \end{matrix}\right)^n \geq \left(\frac{M}{2}\right)^n J$$

Puisque M et J signifient ici certaines valeurs pour Ω mais chaque entier positif pair, quelle que soit sa taille, peut être défini, cette inégalité contient une contradiction à chaque hypothèse sur M et J, d'où il découle que $\left(\frac{M}{2}\right)^n J > 1$ et cela permet de conclure que

$$1 \geq \left(\frac{M}{2}\right) J$$

Ensuite, si $J = 2^n$ alors $M \leq 1$, et si $J > 2^n$ alors $M < 1$; ce résultat peut être exprimé de la manière suivante, en ajoutant le fait que la grille des nombres est son propre symétrique par rapport au point zéro ou par rapport à n'importe lequel de ses points :

> *Un corps non concave avec un centre en un point de la grille de nombres et d'un volume* $= 2^n$ *contient encore au moins deux autres points de la grille de nombres, soit à l'intérieur, soit sur la frontière.*

Un corps non concave avec un centre en un point de la grille des nombres et d'un volume $> 2^n$ contient en son intérieur au moins deux autres points de la grille des nombres que son centre.

Il est évident qu'un cube avec un point de la grille comme centre et de volume $< 2^n$, c'est à dire avec une arête < 2, ne contient pas d'autres points de la grille.

On peut donner de ces phrases la version purement analytique suivante (cf. 24) :

Soit $f(x_1, .., x_n)$ *une fonction quelconque de* $x_1, \ldots, x_n$ *qui, pour le système* $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ *vaut 0 et qui pour tout autre système* $x_1, \ldots, x_n$ *a une valeur positive déterminée, et qui satisfait en outre les relations fonctionnelles :*

$$\begin{array}{ll} (I) & f(tx_1, \ldots, tx_n) = tf(x_1, \ldots, x_n), \text{ quand } t > 0, \\ (II) & f(y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n) + f(z_1, \ldots, z_n), \\ (III) & f(-x_1, \ldots, -x_n) = f(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

Selon 25, l'intégrale n fois $\int dx_1 \ldots dx_n$ avec toutes les directions d'intégration positives sur le domaine $f(x_1, \ldots, x_n) \leq 1$ a toujours une certaine valeur ; appelons cette valeur J. Alors il existe toujours au moins un système d'entiers $l_1, \ldots, l_n$ tels que

$$0 < f(l_1, \ldots, l_n) \leq \frac{2}{\sqrt[n]{J}}$$

D'après (III), la même relation est aussi valide pour le système opposé $-l_1, \ldots, -l_n$.