Geometrický důkaz poučky Wilsonovy.

Napsal
Dr. K. Petr.

Poučka Wilsonova nám praví, že číslo $1.2.3\ldots(p-1)+1$ (anebo jinak,psáno $(p-1)!+1$) jest dělitelno p, jestliže p jest prvočíslo. Abychom tuto poučku dokázali, představme si v rovině p bodů $A_1, A_2, \ldots, A_p$ vrcholů to mnohoúhelníka pravidelného a uvažujme nejprve, kolika možnými způsoby ze těchto p bodů spojiti lomenou čarou uzavřenou z p úseček se skládající a mající ony body za vrcholy. Těchto způsobů jest patrně tolik, kolik jest permutací z $p-1$ různých prvků, totiž jest jich $(p-1)!$ Nebot' vycházejíce z jednoho bodu, na př. z bodu Ax, můžeme probíhati zbývající v libovolném pořadí. Při tom pokládáme dvě lomené čáry kryjící se sice, ale proběhnuté v opačném směru jako různé. Tyto lomené čáry uzavřené jsou dvojího druhu, a to bud pravidelné anebo nepravidelné. Pravidelné jsou takové, které, otočíme-li je kolem středu příslušejícímu ku bodům $A_1, A_2, \ldots, A_p$ o úhel $\dfrac{2\pi}{p}$ (anebo o nějaký násobek tohoto úhlu) samy sebe pokryjou. Nepravidelné pak mají tu vlastnost, že otočíme-li je o jakýkoliv z úhlů $\dfrac{2\pi}{p}, \dfrac{4\pi}{p}, \ldots, \dfrac{2(p-1)\pi}{p}$ dostaneme lomenou čáru sice shodnou a spojující body $A_1, A_2, \ldots, A_p$, ale v jiném pořadí než ta, ze které jsme vycházeli. Lze tudíž lomené čáry nepravidelné sestaviti ve skupiny vždy po p členech. Z jedné čáry lomené nepravidelné dostaneme všechny ostatní téže skupiny, když onu čáru lomenou otočíme kolem středu postupně o úhly

$$\frac{2\pi}{p}, \frac{4\pi}{p}, \ldots,$$

Jiných lomených čar není. Neboť dejme tomu, že bychom měli čáru lomenou takovou, že by sama sebe pokryla, kdybychom ji kolem středu otočili o úhel $q\dfrac{2\pi}{p}$ a dejme tomu, že by bylo q číslo nejmenší té vlastnosti $\quad (1 < q < p)$.

Pak by tato čára sama sebe pokryla také při otočení o

$$\frac{2.q2\pi}{p}, \quad \frac{3.q2\pi}{p}, \ldots, \frac{\lambda.q2\pi}{p}.$$

Budiž λ takové celé číslo. že

$$(\lambda-1)q < p \quad \text{a} \lambda q > p,$$

pak

$$\lambda q = p + q_1,$$

Retranscription en Latex et correction de la traduction par Google : Denise Vella-Chemla, août 2022.

kde, poněvadž jest p prvočíslo

$$0 < q_1 < q\ ;$$

a lomená čára by se pokryla při úhlu

$$\frac{\lambda.q2\pi}{p} = 2\pi + \frac{q_1 2\pi}{p}$$

t j . při úhlu $\dfrac{q_1 2\pi}{p}$, což jest však proti suposici, že q jest nejmenší číslo té vlastnosti.

Pravidelných lomených čar jest $p - 1$, neboť pravidelná čára lomená jest jednou spojnicí úplné stanovena a bod na př. 1 můžeme spojiti pouze s $(p - 1)$ různými body; p-clených skupin nepravidelných lomených čar budiž N. Pak jest

$$(p-1)! = p - 1 + Np$$

anebo

$$(p-1)! + 1 = p(N+1)$$

čímž poučka Wilsonova dokázána.