La créativité en musique et en mathématiques

Pierre Boulez et Alain Connes [1]

Introduction : Bonsoir à tous, je vous souhaite la bienvenue au cœur de l'Ircam dans l'espace de projection pour cette rencontre inédite entre un mathématicien, entre Alain Connes, et un compositeur, Pierre Boulez. Alors, cette rencontre appartient au festival Agora, qui interroge la relation entre l'invention et la contrainte, entre finalement l'intuition et la logique. Et il nous semblait très important de placer ce soir ce point nodal de rencontre, cette tentative de rencontre entre deux mondes qui coexistent et qui, peut être, ont des choses à se dire.

Alors je voulais simplement vous signaler que, évidemment, il sera question de la déduction dans l'opération artistique comme de l'intuition dans l'opération mathématique. Et c'est le *comme* qui est une relation insondable et assez complexe. Gérard Assayag, directeur de l'Unité mixte de recherche CNRS-Ircam, va animer, s'il en est besoin, ce débat, en tout cas, va servir de catalyseur. Et je voulais aussi dire que ce débat s'inscrit dans le cadre de la conférence Mathématiques et musique, conférence internationale qui a lieu au moment d'Agora.

Peut être que cette conférence décrètera l'irréductibilité entre l'invention artistique et l'invention mathématique. Mais irréductible est un terme qui a été interrogé par les mathématiciens. Donc, nous restons dans le domaine mathématique. En guise de lancer, je ne voulais faire qu'une citation, comme on fait souvent en France pour commencer ou pour terminer, une citation du plus intuitif et peut être du plus déductif de tous les esprits, Leibniz, qui disait et qui parlait certainement aux compositeurs autant qu'aux scientifiques : *"Le monde parfait est le monde le plus simple en hypothèses et le plus riche en phénomènes."*.

Je cède la parole à Gérard Assayag.

1. Cette conférence s'est tenue à l'IRCAM le 15 juin 2011. Elle est visionnable à l'adresse : https://medias.ircam.fr/x70ce3e$_{p}ierre-boulez-et-alain-connes-la-creativ$

Gérard Assayag : Merci Franck. Nous allons commencer par une courte présentation de Pierre Boulez et ensuite s'engagera un dialogue en partie, mais en partie seulement improvisé.

Pierre Boulez : Bien, alors un petit texte au début, pour lancer un peu le débat, parce que ce n'est pas du tout un texte définitif et dogmatique. C'est un texte, au contraire plutôt sceptique, je dirais. Si, pour rendre compte d'une œuvre, on parle de musique mathématique, il ne s'agit pas d'un alliage très cordial. Ces deux mots, si près l'un de l'autre, indiquent une œuvre rébarbative, sèche, inexpressive, ennuyeuse.

Elle ne vient pas du cœur, ne retourne pas au cœur, pour citer, une fois de plus, ce grand modèle, mais sort du cerveau et ne va même pas à un autre cerveau. C'est donc déjà une sorte de réhabilitation de la réflexion, de la réflexion musicale que de rapprocher directement les deux mots mathématiques, musique, et d'y ajouter le troisième mot contact, mot discret, sans prétention, mais signe d'une volonté on ne peut plus déterminée. Bien évidemment, ce n'est pas la première fois que ce rapprochement est tenté.

Depuis le quadrivium au Moyen Âge, jusqu'aux travaux de Rameau et d'Alembert et jusqu'aux constructions mystiques de Scriabine. On a même beaucoup écrit. Et cependant, il existe toujours une sorte de frontière non dite entre la créativité musicale et la structure du langage expliquée ou du moins approchée scientifiquement. Quand un musicien, un compositeur s'approche de l'outil informatique, qu'il désire utiliser le matériel électronique, plusieurs malentendus peuvent surgir, difficiles à surmonter. Désirant avant tout l'outil qui lui permette de travailler de proche en proche, il s'attache à un rendement immédiat. Il s'attend à ce qu'on lui fasse des propositions, qu'on lui fournisse des exemples. À partir de là, il peut imiter ces exemples ou essayer de les transgresser en modifiant les paramètres qu'on lui propose. Mais il peut très bien ne pas aller plus loin et délaisser cet outil qu'il a tout juste effleuré. Le second écueil, c'est de transcrire trop littéralement des procédés, des schémas plutôt, qui lui sont fournis par l'outil mathématique ou arithmétique.

Ce qui, dans un cas, a un sens, est pertinent, n'a plus de sens dans la transcription littérale. Autant la première approche que je signale est basée sur la perception immédiate et ne se soucie pas de codifier en vue d'un langage, autant la seconde approche s'inquiète fort peu, voire pas du tout, de la perception, et se fie bien davantage à la notion de schéma pouvant s'appliquer indifféremment à tout paramètre. Ne tenant compte que de la perception, on n'arrive pas à organiser un langage, les objets que l'on a trouvés n'étant pas assez forts pour cela. Si l'on ne tient pas compte de la perception, le langage ne peut se constituer que d'une façon proprement hasardeuse, les paramètres n'ayant pas la même valeur dans le modèle et dans la transcription.

C'est là où le critère esthétique fait son apparition. Choix ou rejet des solutions proposées ? Faire face au tableau fut-il total des possibles. L'intuition devient comme un court-circuit indispensable. C'est ainsi que parmi tous les univers possibles d'intervalles, de durées, de dynamiques, etc., l'intuition va choisir celle qui servira le compositeur au moment où la solution va acquérir toute sa nécessité. Plus on sera capable de maîtriser cet univers des possibles, plus l'intuition aura servi de critère absolu dans cet instant du choix plus ou moins approché d'une certaine vérité dont on a besoin à un moment donné.

D'ailleurs, que l'on pense musique avec ou sans interprète, une musique combinée entre électronique et instrument ou une musique purement électronique, il reste à trouver le geste et la forme. Là, on n'a plus affaire à des objets, mais à des textures qui, en changeant continument ou par cassure, vont occuper un espace-temps. Quel modèle mathématique va nous donner la possibilité de trouver ce geste qui va justifier toutes les autres catégories ?

De ce point de vue, j'ai trouvé tout à fait approprié la citation de Mallarmé placée en tête de ce symposium. *"Un coup de dés jamais n'abolira le hasard."*. Pour résumer mon attitude de compositeur, je dirais que je n'attends pas tout d'une organisation systématique de quelques paramètres que ce soient. Je suppose que l'invention, si elle se réalise, ne peut se faire que si elle admet l'accident, l'imprévu qui remet en question ce que l'on avait cru établir.

Autant que j'en puisse juger, l'intuition scientifique passe par les mêmes phases. Et sur ce terrain incertain, elle est en mesure de se confronter avec l'intuition musicale. C'est une profession de foi bien fragile, certes, que je propose, mais je dois, je crois, davantage à cette fragilité qu'à la sécurité des dogmes. Je la crois plus riche de promesses.

Gérard Assayag : Votre conclusion illustre une tension qui, me semble-t-il, traverse votre oeuvre qui est la tension entre système et liberté. Et dans un entretien récent à la revue Musik Blätter, revenant sur *Le marteau sans maître*, vous indiquez bien comment cette œuvre avait marqué son temps par une combinaison de constructivisme très achevé, même un peu rigide, issu de l'école de Vienne, mais d'une liberté ornementale et d'une certaine fraîcheur qu'on a pu appeler l'esprit français disons. Donc, l'idée était de travailler avec le constructivisme, mais de manière à y être libre. Or, c'est une chose qui ne va pas de soi et je me dis que c'est peut être une problématique que rencontre aussi le mathématicien. Qu'en pensez vous Alain Connes ?

Alain Connes : Disons que j'ai un peu réfléchi, donc, à ces deux aspects qui sont des aspects dont on parle assez peu en mathématique, qui sont justement la créativité et le rôle de l'esthétique. Et je crois que je vais vous livrer quelques réflexions que j'ai eues là dessus, mais simplement comme un point de départ. Je pense que ça correspondra bien à ce dont vous avez parlé. Donc, en fait, a priori, lorsqu'on parle de créativité en mathématiques, le mathématicien est un peu sceptique parce que l'essentiel de la tâche du mathématicien, c'est résoudre des problèmes. Et c'est en gros une tâche de découverte. C'est-à-dire que le mathématicien est à la recherche de vérités, qui préexistent à sa présence, avant qu'il commence à chercher. Et ce qui est assez extraordinaire, justement, vous parliez de cette relation avec les mathématiques, ce qui est assez extraordinaire, c'est de voir que l'évolution des mathématiques qui a eu lieu au XX$^{\text{ème}}$ siècle, en fait, permet déjà le rapprochement entre la musique et les mathématiques. Pourquoi ? Parce que, en fait, le rôle des mathématiques qui, au départ, était un rôle qu'on pourrait en gros résumer comme une partie de la physique, est devenu, au fil des mathématiques qu'on appelle modernes, des mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle, en fait, c'est devenu un espèce de substitut de la philosophie au niveau de la création des concepts. Et ce qui est assez remarquable, en fait, c'est que justement... Cette transition, on peut presque la faire remonter à Galois. Et ce qui est assez remarquable, c'est qu'un peu comme en musique, elle a engendré au départ des résistances considérables et qui continuent à se manifester de manière sporadique. Mais je vais vous citer... Est-ce que ça dérange si je fais une citation en anglais parce que c'est un texte qui est en anglais au départ.

Mais c'est un texte très récent d'un mathématicien bien connu qui s'appelle Vladimir Arnold, et qui parle des mathématiques, et qui parle de l'enseignement des mathématiques, et qui parle des mathématiques modernes. Ne vous en faites pas, je suis français, donc je défendrai le point de vue français après. Mais il faut quand même que j'expose au départ ce point de vue. Donc il dit : "*Mathematics is a part of physics, physics is an experimental science, a part of natural science, mathematics is the part of physics where experiments are cheap.* (rires). *In the middle of the twentieth century, it was attempted to divide physics and mathematics. The consequences turned out to be catastrophic. Whole generations of mathematicians grew up without knowing half of their science, and of course in total ignorance of any other sciences. They first began teaching their ugly scholastic pseudo-mathematics to their students.*"

Il continue, il continue, et son texte est très amusant, il est plein de piques, etc. Et il dit ensuite : "*The ugly building built by under-educated mathematicians who were exhausted by their inferiority complex and who were unable to make themselves familiar with physics, reminds one's...*" Bon, alors après, il parle d'une axiomatique des nombres impairs, etc. et ensuite, il dit donc, finalement, qu'il a interrogé par exemple des étudiants français en mathématiques, il leur a demandé "*2+3 ?*". Et "*a french primary school pupil replies 3+2 because addition is commutative*". Et ensuite, il explique "*Judging by my teaching experience in France, the university students'idea of mathematics, I feel sorry for them because they are very intelligent but deformed kids, is as poor as that of this pupil.*", l'élève qui répondait "*2+3=3+2.*". Et ensuite, il donne des exemples.

Mais en fait quand on approfondit un peu ce texte d'Arnold, on s'aperçoit que si vous voulez, ce qu'il critique, c'est les mathématiques. Ce qu'ils critiquent, c'est si vous voulez tous les exemples qu'il prend où il dit les mathématiciens modernes ne savent pas faire ça, etc., c'est des mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et ces mathématiques, il donne des exemples de courbes à tracer dans le plan ou des choses comme ça, c'est des mathématiques qui maintenant sont complètement digérées et que l'ordinateur fait beaucoup mieux qu'un mathématicien, il le fait en un quart de seconde. Et ce qu'il n'a pas digéré, ce qu'il n'explique pas justement, c'est le merveilleux phénomène qui s'est produit dans les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle et qui justement, permettent... Je vais vous lire un petit texte de Grothendieck. Et ce que dit Grothendieck, c'est : "*La clarification progressive, justement, des notions de définitions, d'énoncés, de démonstrations, de théories mathématiques dont* *on pourrait, si on ne faisait que des mathématiques que comme étant une partie de la physique, on pourrait les ignorer complètement. Et dire que c'est des fantaisies d'axiomaticiens, a été à cet égard très salutaire et nous a fait prendre conscience de toute la puissance des outils d'une simplicité enfantine pourtant.* C'est-à-dire que les concepts mathématiques, en fait, il ne faut pas avoir peur. En général, ils ont une version enfantine et cette version enfantine est beaucoup plus proche de leur réalité que les versions extrêmement élaborées, "*donc d'une simplicité enfantine, pourtant, dont nous disposons pour formuler avec une précision parfaite ceux-là mêmes qui pouvait sembler informulable par la seule vertu d'un usage suffisamment rigoureux du langage courant à peu de choses près. S'il y a une chose qui m'a fasciné dans les mathématiques depuis mon enfance, c'est justement cette puissance à cerner par des mots et à exprimer de façon parfaite l'essence de telles choses mathématiques qui, au premier abord, se présentent sous une forme si élusive ou si mystérieuse qu'elles paraissent au delà des mots.*"

Et ça, si vous voulez, c'est une chose extrêmement importante parce que la plupart des gens, quand on leur parle de mathématiques, ils pensent à l'arithmétique, ils pensent aux nombres.

Bon, ils pensent peut être à la géométrie, mais ils ne se rendent pas compte que les mathématiques modernes, c'est-à-dire les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle, elles ont justement réussi à perfectionner le langage courant par des concepts qui sont extrêmement précis, mais qui, justement, ont un potentiel d'application qui va bien au-delà de la physique.

Bon, alors, quand on pense justement à la musique et si vous voulez, pour bien situer les choses par rapport aux mathématiques, je vais vous lire un petit texte que j'avais écrit il y a longtemps et où je parlais justement du lien entre les deux et je disais : "*Il est crucial à mes yeux pour un enfant d'être exposé très tôt à la musique. Je pense qu'exposer un enfant à la musique vers l'âge de 5 ou 6 ans permet d'équilibrer un petit peu la prépondérance dans son intellect du sens de la vue et cette richesse incroyable, purement visuelle, qu'un enfant acquiert très tôt et qui, donc en fait est reliée à la géométrie.*".

Elle est reliée à la géométrie du moment qu'elle s'inscrit dans l'espace par l'intermédiaire d'une image mentale. Si vous voulez, il y a le même phénomène en mathématique que par rapport à un musicien. Quand un non-mathématicien voit un mathématicien en train de travailler dans le métro. Qu'est ce qu'il voit ? Il voit une page pleine de formules. Elles n'ont aucun sens. Quand un non-musicien voit un musicien travailler dans le métro et lire une partition, c'est exactement pareil, il a l'impression de... C'est pareil !

Or, il y a une partie essentielle du travail des mathématiciens qui est justement de créer des images mentales. Mais quand je parle d'images mentales, ça a à voir avec la géométrie. On voit une figure géométrique, on voit, elle s'inscrit dans l'espace. Mais ce qui est vraiment étonnant, c'est que justement, dans le fonctionnement du mathématicien, il n'y a pas seulement l'image géométrique, il y a l'algèbre. Et l'algèbre n'a rien de visuel, mais par contre, l'algèbre a une temporalité, c'est-à-dire l'algèbre s'inscrit dans le temps.

Quand vous faites un calcul, quand vous exposez une démonstration, ça s'inscrit dans le temps. C'est exactement comme le musicien qui, après avoir compris une œuvre musicale, l'avoir zippée complètement dans son esprit, a quelque chose qui tient en rien, l'étale. Le mathématicien, c'est pareil. Quand il fait un calcul algébrique, ça s'inscrit dans le temps, mais c'est quelque chose qui est très proche du langage, qui a cette précision diabolique du langage et d'une certaine manière, si vous voulez, il y a une connivence assez incroyable entre le calcul algébrique, cette partie des mathématiques qui a à voir avec le langage, qui a un déroulement dans le temps et certaines œuvres musicales. Et ça, je ne peux pas m'empêcher d'y penser. C'est-à-dire que pour moi, il y a certaines œuvres musicales relativement courtes qui disent quelque chose.

Et j'avais même cette impression, vous allez rigoler mais j'avais même cette impression quand on voyait ces salles qui vont de manière répétitive écouter les sonates de Beethoven des années et des années. Ça m'a rappelé, si vous voulez, des gens qui sont là et qui essayent de comprendre. Et on leur répète la même chose. Ils savent qu'il y a quelque chose, et ce quelque chose est intransmissible autrement que par la musique. On ne peut pas le transformer en autre chose que ce qui est transmis, mais ça transmet quelque chose.

Donc, on ne peut pas dire que ça n'est pas un langage. De même, on ne peut pas dire que les mathématiques n'ont pas un aspect langage. Elles ont un aspect langage qui est extrêmement important.

Mais l'essentiel de ce que j'ai dit, si vous voulez, c'est que cet aspect langage des mathématiques est devenu beaucoup plus florissant. Il est devenu beaucoup plus expressif. Il est devenu beaucoup plus large que, justement, les mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Et quand on en reste aux mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, bien sûr, on peut dire "Ah, ces mathématiques-là, elles ont un rapport avec la musique parce qu'il y a l'arithmétique, il y a le log 3 sur log 2, qui est le clavier bien tempéré, etc.

Mais ça ne va pas aller au delà. En fait, le langage mathématique, justement, a franchi bien d'autres frontières et d'une certaine manière, maintenant, on peut espérer que, justement, il y ait une possibilité de rapprochement qui est beaucoup plus grande à cause de ça. Encore faut-il accepter les mathématiques modernes. Et encore faut-il avoir absorbé toute cette élaboration, qui n'est pas du tout évidente.

Gérard Assayag : Alors cette dualité algèbre / géométrie, c'est un de vos chevaux de bataille. C'est extrêmement intéressant parce qu'elle nous amène au coeur du problème de la relation maths-musique, parce que c'est une dualité qu'on rencontre sans arrêt dans la recherche musicale, soit de manière métaphorique, nous en avons discuté, soit de manière technique, et je pourrais éventuellement donner des exemples. Alors notamment dans l'analyse musicale, c'est-à-dire que quand on regarde une partition, il y a une expression que j'ai entendue et qui me plaît bien, c'est la partition vue d'avion, quand on essaie de comprendre ce mécanisme, c'est-à-dire on la regarde comme un tout mais on a le droit de faire ce qu'on veut. On peut sauter d'un point à un autre et mettre en relation un point avec un autre librement et c'est une vision évidemment géométrique.

Alain Connes : Bien sûr.

Gérard Assayag : Ou alors il y a une autre façon de l'aborder, qui est du point de vue de ces mécanismes d'engendrement. Et là, on a un point de vue beaucoup plus local, parce qu'on regarde la mécanique. Est ce que ça, c'est quelque chose que vous ressentez, cette tension quand vous, quand vous regardez une musique, pas quand vous la créez, mais quand vous regardez une musique existante ?

Pierre Boulez : Quand je regarde la musique, je commence d'abord par essayer de comprendre la forme, parce que c'est elle qui vous dirige, simplement dans l'évaluation. On a fait ici une expérience une fois, sur trois niveaux de compréhension de la musique. On a donné d'abord, disons, une sonate de Mozart ou un mouvement, ou un demi-mouvement (la première moitié du mouvement), et on a demandé à quelqu'un qui n'est absolument pas musicien, à quelqu'un qui n'a aucune culture musicale, on lui a demandé qu'est ce qu'il pensait ? Il en a donné une description très vague et pas du tout relevante si je peux dire. Ensuite le moyen. Il avait écouté plusieurs fois des sonates de Mozart, donc il pouvait trouver une forme, en tout cas un contraste entre les thèmes. C'est déjà une approche beaucoup plus précise et le cultivé, alors, décrivait exactement ce qui est passé. Ensuite, on a passé une œuvre de Schophausen pour piano, un fragment bien sûr. Eh bien, les trois réponses étaient très similaires parce que chacun créait son propre théâtre de la forme et ils s'aiguillaient vers les passages qui les avaient particulièrement frappés, c'est-à-dire qu'il n'y avait aucune conception de la forme.

Mais il y avait une conception des événements et des événements qui étaient encore pas liés par une forme mais des événements séparés, qui les avaient frappés, soit parce qu'ils étaient très forts, soit parce qu'ils étaient joués par un instrument spécialisé, etc., etc. Donc, vous voyez que c'est très difficile d'approcher une forme même, parce qu'une forme est vraiment, disons, ce que... comment la personne la regarde. Et là, quand on est musicien, évidemment, on essaye d'avoir une vue, disons plus objective, et non pas seulement subjective.

Voilà comment moi, je vois la musique. Alors quand on voit le détail, on voit en effet comment le discours se construit et s'il se construit plus horizontalement que verticalement ou plus verticalement qu'horizontalement, ou s'il se construit par cassure, ou bien s'il est construit pas continuité, etc., etc. Il y a beaucoup de façon d'envisager la perception même de la musique et je suis persuadé qu'il y a beaucoup de gens qui se font aussi une espèce de... qui... puisqu'ils ne peuvent pas comprendre la forme musicale, qui se font une certaine narration, spécialement quand ils ont écouté une œuvre plusieurs fois, ils se font une narration personnelle et c'est cette narration qu'ils suivent. C'est pour cela que les gens, le public en général, s'il ne fait pas d'effort, s'installe tellement bien dans une œuvre parce qu'il l'écoute toujours de la même façon et donc qu'il a devant lui les mêmes images, les mêmes clichés, les mêmes clichés, je dirais, plutôt que les mêmes images. Et c'est comme ça qu'il absorbe la musique, il ne l'absorbe pas par une espèce de description de la continuité, il l'accepte comme un tout, suivi d'un tout, suivi d'un tout.

GÉRARD ASSAYAG : Mais l'analyste-expert, le compositeur qui regarde un autre compositeur, n'a-t-il pas cette liberté quand il regarde une partition, de la voir finalement comme un espace où il peut se promener à son gré, ce qui n'est pas réaliste dans la mesure où la partition n'a pas été engendrée de cette façon-là, en agissant simultanément sur toutes les parties ?

PIERRE BOULEZ : Oui, certainement, quand vous analysez... Moi, ce qui m'intéresse dans l'analyse, c'est même l'analyse fausse, mais qui engendre quelque chose.

Je me souviens d'une fois quand Stockhausen m'a montré une analyse du Quatuor de Webern, mais il regardait la densité des rencontres. Ce qui n'a rien à voir avec Webern, qui était simplement un contrepoint à quatre voix, et donc un contrepoint à quatre voies, surtout si c'est en canon, les choses sont décalées les unes par rapport aux autres. Donc s'il y a un phrasé individuel, les choses sont évidemment pas toujours d'une intensité constante. Mais pour lui, ce qui l'intéressait à ce moment là, c'était le phénomène de l'intensité.

Comment un canon à quatre voix peut donner des intensités de cet ordre, statistiquement parlant. Je trouve ça plus intéressant que d'analyser simplement, même comme le compositeur l'a conçu. Ce qui est intéressant dans une analyse, c'est pas lorsque vous voulez refaire ce que le compositeur a fait, c'est de voir par quel procédé il est arrivé à un résultat pareil. Et donc, même si l'analyse est fausse, est fausse complètement, l'analyse est beaucoup plus intéressante parce qu'elle est productive.

ALAIN CONNES : D'accord, il y a quand même une différence assez frappante, justement, là, on parle d'Œuvres. Donc on voit... Alors si on regarde un aspect des mathématiques, qui est une démonstration, on peut dire la chose suivante qui est un peu semblable, c'est que, si vous voulez, une démonstration, il y a deux manières de la regarder. Il y a une vérification ligne à ligne. Et ça, je pense, c'est un peu comme quelqu'un qui joue un morceau de musique qui ne l'a pas encore digéré et qui est obligé d'avoir la partition devant les yeux.

Donc, on peut faire ça. On peut vérifier une démonstration ligne à ligne. Mais il y a une deuxième étape qui est extrêmement importante. C'est qu'en fait, un mathématicien sait qu'il ne comprend une démonstration que quand il est capable dans son cerveau de la zipper en une demi-seconde. C'est-à-dire qu'il n'aura pas les ingrédients successifs de la démonstration, mais il aura immédiatement l'intégralité de la démonstration.

Pierre Boulez : Est ce que je peux ouvrir une parenthèse ?

Alain Connes : Bien sûr.

Pierre Boulez : En musique, ça, ça dépend beaucoup d'un point de vue très différent, c'est si vous êtes interprète, ou si vous êtes compositeur. Si vous êtes compositeur, vous avez tout le temps de naviguer et vous naviguez d'un point à l'autre et vous essayez de conforter votre analyse par comparaison d'un point à un autre, quelles sont les différences, quelles sont les similarités, etc. Si vous êtes interprète, cette façon, disons, d'amasser la connaissance est une conséquence... est une espèce de choses inconsciente. Quand vous êtes au point D, par exemple, vous savez que vous avez déjà joué le point A, et ses successions, et vous savez que vous allez rencontrer le point N et ses successions. Mais vous ne le savez pas exactement. Mais vous le savez, plus ça se rapproche, plus vous êtes conscient de ce qui va suivre. Et plus ça s'éloigne, et plus vous êtes conscient que ça s'éloigne et donc que la forme a atteint un point du présent, c'est-à-dire qu'on a constamment ces trois dimensions dans la tête, présent, bien sûr, celui où vous êtes et le passé qui vous y a amené, le futur qui va vous mener à...

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr. Mais ce que je veux dire, c'est que justement, cette espèce de linéarité de l'œuvre, il y a quelque chose qui est extrêmement frappant pour le mathématicien, c'est-à-dire que si un mathématicien essaye de comprendre une démonstration, il y a ce procédé qui consiste à essayer de la lire linéairement. Il y a un autre procédé qui est bien plus efficace, qui consiste à regarder l'énoncé du théorème et à commencer par chercher soi-même une démonstration.

Et quand on a fait ça, ce qui se produit, c'est que la lecture de la démonstration, à ce moment-là, on va dire : “Mais ça, c’est rien. Ça, c’est rien”. Et on va dire : “LÀ, c’est LÀ qu’il se passe quelque chose”. Et c’est seulement comme ça, c’est seulement à partir de ce mécanisme-là qu’on a vraiment compris, c’est-à-dire... Donc ça, je ne sais pas s’il y a quelque chose d’analogue à ça dans une oeuvre musicale. C’est-à-dire, est-ce qu’une oeuvre musicale répond à une question, à un questionnement, etc. Et on peut dire lorsque l’oeuvre se déroule “Ah !”. Bon, j’ai eu parfois cette impression-là à la fin de certains morceaux où il y avait une espèce de moment où il y avait un moment explicatif a posteriori ou l’inverse. Je veux dire au moment où on voit qu’il y a un thème qui ensuite va se dérouler, etc. Mais en mathématique, c’est quelque chose d’extrêmement fort.

C’est-à-dire qu’il y a une différence énorme, justement, entre le mathématicien qui comprend vaguement l’énoncé et puis va se mettre à vérifier la démonstration pas à pas, etc. Et le mathématicien qui va avoir un acte qui n’est pas du tout passif, mais va se mettre à réfléchir par lui-même et après, seulement après, va regarder la démonstration.

Gérard Assayag : Est ce que ça a quelque chose à voir avec la compression, ce zippage que vous évoquez ?

Alain Connes : Absolument, bien sûr, bien sûr. C’est-à-dire que le mathématicien fonctionne par niveaux d’abstraction, par niveaux hiérarchiques d’abstraction, c’est-à-dire qu’en fait, ça veut dire qu’il ne peut progresser, comme les notions sont très compliquées, que si ces notions là, il est capable de les rendre en occupant un espace qui est presque nul et après, il va pouvoir les manipuler mais les manipuler abstraitement sans savoir ce que le zippage contient, simplement en ayant une idée intuitive de ce que cette motion signifie. Bien sûr pour ça, le langage est extrêmement important, c’est pour ça que, bon, il y a des mathématiciens très créatifs comme Grothendieck, etc. qui ont donné 36 noms nouveaux comme le schéma. Schéma, ça a un sens mathématique bien précis, etc. Et ça n’est qu’avec ce mécanisme de zippage complet qu’on peut progresser par des niveaux hiérarchiques de compréhension.

Pierre Boulez : Pour la musique, c’est surtout la mémoire qui joue. Je vois, par exemple, c’est très frappant. Quand j’étais surtout en charge d’orchestre, je faisais des séances d’initiation, mais d’explications sur des œuvres et j'ai toujours remarqué qu'il fallait toujours des exemples. Parce que quand on joue l'œuvre, l'exemple revient à la mémoire immédiatement. Et là, la mémoire fonctionne de façon à aimanter la perception dans un sens ou dans l'autre.

Alain Connes : D'accord, oui, alors donc je pense qu'il y a quelque chose qui est très analogue dans ce cas-là, parce que, bon, il y a certains mathématiciens comme Grothendieck qui fonctionnent un peu à l'envers, c'est-à-dire qu'ils partent du cas général et puis ils... mais la plupart des mathématiciens fonctionnent de manière différente, c'est-à-dire que si on leur donne un bon exemple et qu'on leur explique concrètement sur un exemple, un phénomène général, en général justement, ils sont parfaitement capables d'immédiatement généraliser et d'avoir le cas général et je suppose qu'en musique, enfin, on voit bien dans la musique de Beethoven ou des choses comme ça, on voit bien qu'il y a un système génératif qui permet à partir de choses relativement simples d'engendrer quantités de choses qui s'en déduisent et ça, en mathématiques, c'est un phénomène assez général. Donc il y a ce côté de presque génération automatique qui se produit et qui joue un rôle très, très, très, très important.

Gérard Assayag : Alors pour revenir à cette dualité algèbre / géométrie, vous mentionnez, alors c'est très important, que du côté algébrique, vous mettez le temps, il y a un engendrement. Donc un engendrement. Il y a une combinatoire de symboles. Il y a des règles de production. C'est des choses qu'on utilise beaucoup en musique. Les musiciens se sont beaucoup intéressés, par exemple, aux grammaires formelles ou aux règles de production pour produire des séquences intéressantes, ou non d'ailleurs, de notes.

Mais dès lors que ça produit des séquences, on est bien d'accord, mais est ce que des séquences, ça suffit pour définir du temps ? C'est une question que je vais poser à la fois au mathématicien et au musicien.

Alain Connes : Bien sûr, je vais répondre parce que je veux dire : mon premier travail mathématique a consisté exactement à ça, c'est-à-dire si vous voulez, ce qui est assez incroyable, c'est que, justement, on s'aperçoit que ce qu'on appelle la non commutativité, qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire que quand vous écrivez un mot, ce n'est pas l'ensemble des lettres du mot qui compte, mais c'est l'ordre aussi dans lequel il est écrit.

D'accord, bon, on peut donner 36 exemples. Et ce qui est absolument incroyable, ce qui est absolument incroyable, c'est que justement, on s'aperçoit lorsqu'on fait des mathématiques, on s'aperçoit que lorsqu'on regarde l'algèbre non-commutative, c'est-à-dire l'algèbre justement, dans laquelle on ne se permet pas de dire que $abab$, ça fait a^2b^2. Eh bien, le temps est engendré de manière naturelle. Ça, c'est beaucoup plus fort que de dire que l'algèbre s'inscrit dans le temps.

C'est qu'en fait, et ça, ça vient du quantique, c'est-à-dire le quantique nous a appris que justement, il fallait lorsqu'on faisait des calculs de mécanique quantique, on ne pouvait pas, c'est ce qu'a trouvé Heisenberg, on ne pouvait pas permuter des quantités comme la position et le moment, etc. On ne pouvait plus calculer de manière trop simple lorsqu'on s'intéresse à des systèmes microscopiques, ce qui est absolument incroyable. Et le potentiel philosophique n'a pas du tout été suffisamment exploité, de ce fait-là. Le fait est que quand on prend une algèbre d'une certaine qualité, qu'on appelle une algèbre d'opérateurs, qui est non-commutative, eh bien, elle engendre son propre temps. Elle a un groupe d'automorphismes qui est paramétré par un paramètre t, mais qui est vraiment le temps dans les exemples physiques qui la fait tourner avec le temps. Alors ça, c'est hallucinant et ça vient exactement du fait qu'on ne peut pas permuter a et b. Donc, quand vous écrivez un mot, l'ordre des lettres est important, alors que quand Descartes, etc., quand des gens de cette époque-là faisaient des calculs, ils faisaient des calculs de manière commutative, c'est-à-dire en permutant les lettres.

Gérard Assayag : Si je comprends bien, c'est l'algèbre qui évolue elle-même et qui se transforme elle-même, qui engendre donc une série

Alain Connes : Elle engendre un passage du temps. Alors ça, ça avait déjà été pressenti puisqu'Hamilton avait écrit des phrases tout à fait prophétique, justement, et où il parlait de la relation entre l'algèbre et le temps.

Donc, ce qui me frappait tout à l'heure, c'est que vous vous expliquiez que, justement, dans le travail d'un interprète, il y a toujours ce présent. Et puis il y a le passé et le futur, etc. Donc on voit bien, je vais dire la musique en gros, c'est une analyse profonde, microscopique du temps. C'est une compréhension du temps qui va de plus en plus loin dans la finesse. Mais ce qui est tout à fait étonnant, c'est qu'au niveau algébrique, il y a exactement la même chose qui se produise et qu'en fait justement, non seulement, bien sûr, un calcul algébrique se fait de manière linéaire, avec des termes ordonnés dans le temps, ça, c'est rien.

Mais ce qui est hallucinant, c'est l'inverse. C'est le fait que même si on faisait des mathématiques en dehors du temps, etc., eh bien le temps serait là et serait présent. Il serait engendré de manière naturelle.

Gérard Assayag : Vous évoquiez un autre point tout à l'heure qui était sans le dire, je vais dire le terme technique, vous m'excuserez, la correspondance de Curry-Howard, c'est-à-dire le fait qu'une preuve, on peut aussi la regarder comme un programme, comme un calcul.

Alain Connes : Oui, si on veut, oui, bien sûr.

Gérard Assayag : Ça évoque une question qu'on s'est posée ici même lors du tout premier congrès Mathématiques et Musique qui a été organisé en 1999 à la demande de la Société de mathématiques européenne avec M. Bourguignon. On avait décidé de mettre ça sous l'égide de la question "Est-ce qu'il y a une correspondance entre ce que les musiciens appellent la logique musicale, qui est toujours une logique d'organisation, et ce que les matheux appellent la logique tout court, la logique mathématique ou la logique formelle, la logique mathématisée ?

Et on était arrivés, on n'avait évidemment pas tranché cette question, on était simplement arrivés à dire la chose suivante, c'est qu'il y a bien de la logique dans l'organisation de la musique. Il y a bien des termes formels qu'on engendre. Il y a même des choses qui ressemblent à des axiomes, c'est-à-dire des hypothèses de départ qu'on se donne pour engendrer un matériau. Mais il y a deux choses qu'il n'y a pas. Il n'y a pas de notion de vérité : on ne cherche pas à ce que ces termes qu'on agrège, qui vont finir par former une partition, établissent une certaine valeur de vérité, ce n'est pas ça le problème. Ce n'est pas le problème de la logique. Le problème de la logique musicale n'est pas le problème de la logique mathématique. Vous êtes d'accord avec moi ?

Pierre Boulez : Certainement pas d'accord avec ça. Je l'ai dit discrètement, mais je le pense.

Gérard Assayag : On peut le dire et je crois que c'est facile à établir. Il n'y a pas de valeur de vérité, donc déjà, ça enlève tout un aspect calculatoire parce que souvent, c'est ça qu'on cherche. Et puis, il y a un autre problème beaucoup plus profond, qui est le suivant : en logique pure, lorsqu'on déroule une démonstration, je peux utiliser un terme A pour ma démonstration. Et j'ai parfaitement le droit de le réutiliser ensuite, mais il ne se passe rien. Ça ne me coûte rien. Je l'utilise, je peux l'utiliser mille fois si je veux, si je le désire. Quand on considère une séquence musicale, un élément du langage musical comme ressemblant un petit peu à une démonstration et que l'on regarde les termes que l'on agrège les notes, les accords, etc., eh bien, le fait d'avoir exposé un objet musical n'est pas du tout innocent. Et la seconde fois qu'on l'expose, ça n'a pas du tout la même valeur que la première fois qu'on l'avait exposé. Donc déjà, déjà, on n'est plus dans cette hypothèse. *(Rires.)* Je vois, je crois que je vous vois venir.

Alain Connes : Non, non, en fait, si vous voulez, ça veut dire que vous ne connaissez pas un certain pan du développement mathématique, qui est ce qu'on appelle la logique linéaire. Dans la logique, dans la logique linéaire, en particulier Jean-Yves Girard à Marseille, lorsqu'on a utilisé une fois, on ne peut plus utiliser.

Donc, je veux dire, il ne faut pas croire que les mathématiciens manquent d'imagination. Ils ont utilisé cette logique-là. Elle leur est déjà apparue. Mais en fait, si vous voulez, bon, simplement pour rebondir un peu sur ce que vous disiez à propos de ce qui se passe en musique au niveau de la logique, ce que je dirais, c'est qu'il y a pour le mathématicien effectivement un rôle de l'esthétique, quand il regarde une démonstration. C'est-à-dire un mathématicien est capable de dire en regardant une démonstration les chances qu'elle a d'être vraie. Il est capable, en regardant une formule même obtenue par un ordinateur, de dire les chances qu'elle a d'être vraie. Donc là, il y a un rôle de l'esthétique. Mais si vous voulez pour moi, il ne faudrait pas du tout croire que la qualité, bon, c'est une qualité nécessaire pour un énoncé mathématique, d'être vrai, d'être correct, une démonstration d'être correcte. Mais la notion, qui est beaucoup plus intéressante et beaucoup plus difficile à définir et qui est beaucoup plus proche de la musique, c'est la notion de sens, c'est-à-dire que, si vous voulez, un énoncé mathématique, vous pourriez fabriquer un ordinateur qui vous fabriquerait 36 énoncés mathématiques à la pelle et qui seraient tous corrects parce qu'il les aurait fabriqués en faisant des démonstrations correctes. Ce serait facile. Par contre, si vous regardiez tous ces énoncés, la plupart d'entre eux seraient complètement inintéressants parce qu'ils n'auraient pas de sens.

Qu'est ce que ça veut dire un sens ? Un sens, c'est quelque chose qui est... qui ne répond pas à la logique, parce que l'énoncé en question est correct. Mais il y a pour le mathématicien une notion d'un énoncé qui est merveilleux, qui a un sens. Et je pense que là, on a un rapprochement avec la musique. Parce que vous me disiez une pièce musicale n'a pas à être correcte, bien sûr, mais elle doit avoir un sens. Si elle n'a pas de sens, à ce moment-là, bon, ben, je vais dire, on pourrait faire n'importe quoi. On pourrait inventer 36 morceaux de musique. Et là, je pense qu'on touche un point essentiel parce que la notion de correct, c'est une condition nécessaire. C'est une condition nécessaire pour le mathématicien, bien entendu. Mais un mathématicien pourrait passer sa vie à faire ce que disait Arnold des axiomes sur les nombres impairs ou des choses comme ça. Et ça veut dire qu'il aurait perdu son temps. Il aurait perdu son temps parce que justement, il n'aurait pas trouvé de vérité qui a du sens. Il n'aurait pas dévoilé un pan de cette réalité mathématique, mais justement, des choses qui ont du sens. Et ça, c'est une chose extrêmement difficile à définir en mathématiques. Et je pense que c'est aussi difficile à définir qu'en musique, d'une certaine manière.

Pierre Boulez : Oui, c'est très difficile parce que lors de l'Histoire, on voit des gens qui ont à peu près, surtout au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, le même vocabulaire et dans un cas, l'oeuvre est très belle et dans l'autre cas, l'œuvre va être complètement inintéressante. C'est-à-dire que la même grammaire peut servir non pas des buts du reste, mais peut servir à des fins très différentes.

Alain Connes : Oui, donc, je veux dire, ça veut dire simplement que quand on s'en tient au niveau de la structure, de la logique, etc., on ne touche pas le problème essentiel et le problème essentiel pour les mathématiques, justement, bien sûr, il y a le problème de la vérité, il y a le problème qu'on peut discuter en long, en large et en travers. Mais il y a un problème beaucoup plus difficile, beaucoup plus important, qui est de voir justement en quel sens ce qu'on a trouvé dévoile un petit coin de la réalité mathématique. Et ça, ça signifie avoir du sens. Exactement.

Gérard Assayag : Le problème que vous évoquez, c'est le problème que rencontrent les démonstrateurs automatiques de théorèmes, les programmes informatiques qui démontrent des théorèmes, ils peuvent démontrer des théorèmes corrects, mais ils ne savent pas comment dire qu'un théorème est intéressant. Et donc, ils peuvent démontrer des milliards de choses inintéressantes. Alors c'est intéressant parce que ça peut rejoindre une problématique qu'on connaît ici, qui est la composition assistée par ordinateur, où on a des programmes informatiques que des compositeurs utilisent pour calculer des matériaux ou des structures intéressants.

Mais ils pourraient en calculer des milliards qui ne seraient pas intéressants. C'est in fine le compositeur qui décide. Alors est-ce que vous pourriez nous aider ? Comment pourriez-vous, compositeur, nous aider à converger de manière plus fine, plus intéressante, vers des résultats qui ne sont pas seulement corrects du point de vue du calcul, mais susceptible d'intéresser le musicien ?

Pierre Boulez : La première chose que je peux vous répondre, c'est une réponse très bête, c'est parce que ça me plaît, tout simplement parce que ce que vous me donnez, ce que vous me proposez, ça me plaît.

Gérard Assayag : C'est comme ça qu'on fonctionne.

Pierre Boulez : Oui, mais tout le raisonnement de la musique est fondé là dessus, bien sûr, on ne va pas dire aussi bêtement que ça, ça me plaît, donc je le choisis. Vous pouvez avoir un goût terrible, le kitsch, et le dire, ça me plaît aussi, bien sûr. Mais ce qui est intéressant, c'est que quand vous avez comme ça des quantités de possibilités, vous ne pouvez pas les écouter, si vous avez mille possibilités, au bout de cent, vous serez fatigué ou vous n'aurez absolument plus de jugement. C'est ça qui est dangereux en musique. C'est que plus vous écoutez les différentes solutions, moins vous avez de réactions disons pour choisir les choses. Et donc, à un moment donné, il faut deux choses.

Premièrement, restreindre le périmètre du choix et deuxièmement, décider : “oui, ça, pourquoi je le choisis ? Parce que ça me paraît meilleur, pour cette raison, pour cette raison. Mais au fond de ça, vous essayez de vous justifiez vous même. Mais le principal, c'est uniquement... c'est pas uniquement, mais c'est principalement l'intuition et l'intuition. Bon, ça existe et c'est un don que vous avez, même si vous êtes très doué, vous l'avez un jour, vous ne l'avez pas le lendemain.

C'est-à-dire c'est très variable et quelquefois, vous êtes très pointus, d'autres fois moins pointus, parce que vous êtes davantage séduit par le... Et il y a une question aussi en musique qui est difficile, c'est de joindre la structure abstraite si on peut dire, et l'objet concret, parce que l'objet concret qui est très intéressant, peut être dans une structure tout à fait inepte. Et au contraire, un structure très intelligente peut avoir des objets qui sont tout à fait inintéressants. Et donc, c'est cette combinaison qui n'est pas facile non plus à organiser, qui fait que l'œuvre acquiert une grande validité. Mais ça, ça a toujours été le cas. Je veux dire, si vous regardez l'Histoire de la musique, vous avez par exemple deux personnalités très distinctes comme Berlioz et Schumann, je prends exprès ces deux exemples. Chez Berlioz, il y a un sens de l'instrumentation qui est absolument remarquable, même quand il était très jeune. Mais le sens de l'harmonie, c'est-à-dire du langage harmonique, était très primitif chez lui. Alors on explique cela parce qu'il a joué de la guitare quand il était jeune et donc que la guitare a simplifié son vocabulaire.

Ça n'enchanterait pas les guitaristes, si on dit ça. Mais tandis que Schumann avait au contraire un langage harmonique très... beaucoup plus raffiné. Mais son langage instrumental était vraiment très disons, sans beaucoup de signification, sans beaucoup de couleurs, même, tout simplement.

Et donc, c'est très rare d'avoir chez les mêmes musiciens des gens qui sont doués également, pour les différentes composantes. Si bien que quand vous avez quelqu'un comme Wagner, évidemment, vous avez là, vous avez tout.

Mais Wagner qui, disons, n'a jamais parlé de système, il a toujours parlé de musique nouvelle, de musique du futur, etc. Mais il n'a jamais codifié son langage. Pas du tout même. Mais il a pris le langage tel qu'il l'a trouvé, et sous l'influence, en particulier de Liszt, il a détourné le langage de la fonction sur laquelle ce langage vivait, et donc finalement, il a inventé ce langage très ambigu où toutes les relations sont possibles. Dans un langage plus classique, disons même Beethoven, sans parler de Mozart, vous avez des accords qui faisaient des accords tournants, si l'on peut dire qui aidaient la modulation, qui aidaient donc à aller un peu dans un pays voisin, mais dans Wagner, vous êtes... quelquefois, vous ne savez pas du tout où vous êtes, parce qu'il utilise uniquement des choses ambiguës.

Cette ambiguïté s'est généralisée au fur à mesure et a conduit à Schönberg, qui a de nouveau, lui, créé un dogme.

Et ce dogme était intéressant d'une certaine façon, parce qu'il a en effet, il organisait le langage musical d'une autre façon. Mais ce dogme, ce dogme, ne tenait pas compte des phénomènes verticaux, et, ou à peine compte des phénomènes verticaux, et c'est la faiblesse du langage dodécaphonique de Schönberg., c'est qu'une dimension prévaut sur les autres ou sur l'autre, spécifiquement, c'est-à-dire que le domaine horizontal prévaut sur le domaine vertical et dans Bach, ça, c'était typique, les domaines verticaux et horizontaux seront tout à fait contrôlés.

Et là, le domaine vertical, vous le percevez immédiatement ; le domaine horizontal, le contrepoint, vous lez percevez quand vous avez étudié la partition, c'est là, la différence. C'est que vous ne percevez pas la musique de la même façon si elle est écrite d'une façon ou d'une autre. Et ça, il n'y a rien à faire, on ne changera jamais ça, parce que c'est un phénomène de perception.

Alain Connes : Oui, ce que je voulais dire, c'est au niveau général de la structure. C'est, bon, finalement, si vous voulez, on peut résumer en gros un peu le travail du mathématicien en disant que de temps en temps, il y a un mathématicien qui... trouve un phénomène brut. Un exemple de ça, c'est par exemple quand Riemann trouve la relation entre les nombres premiers et les zéros d'une certaine fonction. D'accord ? Et c'est une trouvaille, c'est-à-dire que c'est quelque chose qu'après, on va pouvoir vérifier jusqu'à un certain niveau avec l'ordinateur, etc.

Mais ça va donner aux mathématiciens d'un siècle après, de deux siècles après une espèce d'objectif. Et la raison, c'est qu'on sait que ce phénomène est suffisamment profond et suffisamment mystérieux pour que l'on soit sûr que toutes les notions qui seront inventées, découvertes à l'occasion de cette recherche, c'est-à-dire pour essayer de trouver une démonstration de ce fait-là, seront, auront du sens, auront du sens. Et alors ? Justement, là où je pense qu'il y a un rapprochement qui est possible, si vous voulez avec la musique, c'est qu'on peut dire en fait qu'il y a deux aspects dans le travail du mathématicien. C'est-à-dire, bien sûr, il y a un aspect incroyablement rationnel qui consiste, une fois qu'on a une idée de démonstration, à essayer de vérifier qu'elle est correcte, bien sûr. Ça, c'est le rationalisme à l'état pur. Mais il y a un aspect qui est bien plus intéressant et qui a à voir avec l'intuition. Et cet aspect qui a à voir avec l'intuition, c'est qu'il y a une période dans laquelle le mathématicien ne doit absolument pas se dire "est-ce-que ce que je dis est correct ? etc. Est ce que je vais vérifier tous les petits détails, etc." Et dans laquelle, justement, il doit se permettre de rêver ? Il doit se permettre de voir beaucoup plus loin et dans cette période-là, qui est en gros, mise en route un petit peu comme par un élan poétique. C'est quelque chose qui est intransmissible en mots. C'est-à-dire que si un mathématicien est dans cette période-là, il est incapable de l'expliquer à des gens qu'il va rencontrer qui vont lui dire "oui, bon, mais alors ?".

Et il est incapable de l'écrire. Parce que s'il l'écrit, c'est comme s'il essayait d'attraper quelque chose qui va disparaître à partir du moment où il va l'écrire. Mais la question que je me pose, c'est de savoir dans quelle mesure, justement, cette intuition qui est terriblement présente, qui est quelque chose d'extrêmement fort, peut se traduire d'une autre manière. Est-ce qu'elle peut s'exprimer sous une forme musicale, est-ce qu'elle peut s'exprimer autrement. Parce qu'elle vient de quelque chose qui est très profond, qui est à l'intérieur.

Et si vous voulez, il y a un texte de Grothendieck que je vous lirai si j'ai le temps et qui parle justement du rêve en mathématiques et qui dit à quel point, justement, le rêve n'est pas admis en mathématiques. Il n'est pas admis. Pourquoi ? Parce que quand un mathématicien écrit un article, il ne va pas écrire sur des rêves qu'il a fantasmés, etc. Il va écrire des démonstrations. Et donc il y a toute une partie invisible du travail du mathématicien qui n'est jamais visible.

La partie qui est visible, ça va être une démonstration rigoureuse, écrite, etc. Et il va y avoir tout un... quelque chose qui est entièrement caché et qui est toute cette partie invisible et qui a consisté en ces... toutes ces journées, etc. dans lesquelles il y avait un rêve, qui était présent à l'intuition, qui était présent à l'esprit et qui n'était pas encore réalisé. Bon moi, ça me fait penser si vous voulez que le fonctionnement de la musique, on a un peu l'impression qu'on en est à ce niveau de l'intuition, de quelque chose qui n'est pas encore réalisé, etc. mais qu'on a réussi à transmettre, par contre. On a réussi à le transmettre sous forme musicale et à partir du moment où, justement, il y avait quelque chose de vrai derrière, il y avait une vraie inspiration, etc., là, ça a du sens et finalement, on arrive à travers la musique à transmettre quelque chose. Et alors ? Ce qui est très amusant, c'est que finalement, il m'est arrivé d'avoir un apport de l'extérieur par une œuvre musicale pour un problème que je me posais et que cet apport musical soit plus important que si j'avais lu un texte mathématique.

Il m'était arrivé d'écouter des œuvres musicales relativement courtes, mais qui avaient un sens, et c'était un sens qui cadrait avec une espèce d'intuition que j'avais à un moment donné, mais que je ne pouvais pas traduire autrement, je ne pouvais pas la traduire par des mots. Je ne pouvais pas dire "Bon, eh bien, etc.". Mais par contre, il y avait par exemple, je ne sais pas, un prélude, qui correspondait exactement à cette intuition. Je ne savais pas pourquoi. Donc, là, il y a quelque chose, à mon avis, si vous voulez justement, dans la notion de sens et tout ça.

Pierre Boulez : Non, moi, je dis que la transcription d'une intuition musicale, de la mathématique à la musique, c'est très, très inconfortable.

C'est très, très inconfortable parce que les choix ne sont pas les mêmes. La culture n'est pas la même et les choix ne sont pas les mêmes. Je disais tout à l'heure, je prends le cas d'un compositeur qui l'a fait, Xenakis pour ne pas le nommer, qui a utilisé beaucoup les glissandos, les courbes, alors on voyait des courbes superbes, magnifiques, etc. Mais qu'est ce qu'on entend, on entend un matériau extrêmement pauvre.

Alain Connes : Ce n'était pas du tout de ça dont je parlais. Si vous voulez, il y a deux choses très, très différentes. Il y a le fait d'utiliser des mathématiques, bon, je me souviens d'avoir écouté, effectivement, une conférence de Xenakis, il y a très, très longtemps, à un moment donné où je me posais la question de savoir si j'allais faire des mathématiques ou si j'allais m'intéresser à la musique ? Des choses comme ça.

Et ça m'avait dégoûté, vraiment, parce que il était venu à la Sorbonne, il avait fait un exposé et dans son exposé, il avait entouré le tableau dans lequel il avait quelques formules générales par des formules mathématiques, et ces formules mathématiques n'avaient rien à voir avec ce dont il parlait. Donc, elles étaient là uniquement comme outil psychologique pour, comment dire, pour effrayer les gens qui ne connaissaient pas les mathématiques et pour, donc, leur imposer comme ça quelque chose. Donc, ce n'était pas du tout ça dont je parlais.

Ce dont je parlais, c'était un problème qui est complètement ouvert à mon avis, qui est qu'il y a certaines notions mathématiques, certaines intuitions mathématiques qui ne sont pas transmissibles par des mots pour le moment.

Pierre Boulez : Oui, mais moi, ce que je voulais dire, c'est pas simplement comme une critique. Mais disons un glissando, qui suive une courbe ou une autre, c'est un matériau extrêmement primitif, c'est un matériau limite. Ce qui nous intéresse dans une continuité comme ça, c'est la notion de coupure, c'est-à-dire de l'intervalle, parce que l'intervalle définit vraiment la façon dont vous percevez les choses. Et donc quand on cible, par exemple, on avait vu, même une courbe qui vous inspire une sorte de geste... Mais ce geste, il faudra le transmettre non pas par un geste direct comme ça, mais il faut le transmuter, pratiquement, avec des intervalles qui lui donneront vraiment un sens, justement. Et c'est pour ça que je dis c'est la transposition ou la trans-figuration de ça, et vraiment moins primitive qu'on ne pense.

Alain Connes : D'accord, mais ce que j'avais en tête, par exemple, vous avez parlé, à propos de Wagner, de l'ambiguïté entre les tonalités, etc. Et alors, justement, il y a une idée mathématique qui est relativement simple à expliquer, qui est due à Galois et qui n'est pas encore, comment dire, capturée mathématiquement. Et c'est précisément l'idée d'ambiguïté. Et donc, ce que j'ai en tête, c'est la chose suivante, c'est que justement, comme les mathématiques arrivent à capturer des concepts à des niveaux de conceptualisation qui sont très élevés... Par exemple, ce qu'a fait Galois, ce qu'il a compris, c'est qu'en fait, les gens avant lui, cherchaient des symétries, et lui, il a réussi à comprendre qu'en fait, la première chose qu'il fallait faire, c'était briser complètement la symétrie entre les racines. Et après, une fois qu'on avait brisé complètement la symétrie, on arrivait à retrouver la structure intérieure par d'autres procédés. Mais ce que j'ai en tête, c'est que cette idée, bon, vous allez lire 36 textes mathématiques autour de cette idée. Il n'y a aucun de ces textes qui l'épuise complètement. Il n'y en en a aucun. C'est-à-dire lorsqu'on l'écrit en termes rationnels, etc., on n'arrive pas à l'épuiser. Et je suis persuadé qu'il y a sûrement certaines structures musicales qui arriveraient à transmettre une partie du contenu de cette idée, de manière complémentaire, à la manière rationnelle de la dire. C'est ça que j'ai en tête, pas du tout le fait que l'on puisse utiliser les mathématiques pour guider certaines choses... C'est quelque-chose qui est beaucoup plus, qui se situe beaucoup plus au niveau conceptuel, et au fait, justement, qu'il y a des concepts mathématiques beaucoup plus élaborés, beaucoup plus compliqués et beaucoup plus, comment dire ? Et en même temps beaucoup plus enfantins qu'on pourrait croire et que, justement, on n'arrive pas à les percevoir complètement lorsqu'on utilise uniquement le langage linéaire, rationnel, etc. Et que la musique polyphonique, etc., peuvent aider considérablement, ne serait-ce que par la polyphonie, c'est-à-dire le langage écrit est un langage linéaire unique.

Il y a un seul, un seul narrateur. Et la polyphonie, justement, bon, ben, on le sait bien. Et à mon avis, justement, ça, ça devrait permettre d'aller au-delà de certaines choses qu'on est seulement capable de faire pour le moment.

Gérard Assayag : La question que vous posez est vraiment celle de la source de la créativité. C'est-à-dire que si je la transforme un petit peu, c'est "Est-ce qu'il existe des niveaux de représentation très profonds, pré-verbaux, quasi conceptuel, mais on ne va pas vraiment dire ça puisqu'ils sont encore non verbalisés, mais qui pourraient ensuite, au moment où ils éclosent et où ils apparaissent, se transformer de diverses façons en mathématiques, en langage.

Alain Connes : C'est exactement ça. C'est exactement ça. Mais ce que je veux dire, c'est que je reviens toujours à Grothendieck, mais il montre bien à quel point, justement, le processus de créativité est un processus de retour à l'enfance. C'est en ce sens là, c'est-à-dire que c'est un processus qui consiste à essayer de se dépouiller entièrement de tous les dogmes, de tout ce qui nous a été imposé, etc. Et de revenir à une perception complètement enfantine. Mais justement, bon, après justement, être capable de la rendre universelle et de la transmettre. Alors ça, c'est évidemment au cœur de la musique, mais c'est aussi, c'est semblable au sein des mathématiques.

Pierre Boulez : Mais est ce possible d'être aussi enfantin ? J'allais dire infantile, excusez-moi, d'être aussi enfantin, après avoir fait tout de même des expériences qui vous ont marqué ?

Alain Connes : Justement...

Pierre Boulez : Est-ce que ça n'est pas artificiel ?

Alain Connes : Je ne pense pas que ce soit artificiel. Je ne pense pas que soit artificiel, l'exemple de Grothendieck, qui est un exemple extrêmement frappant parce qu'à un moment donné, justement, il a, pour revenir au CNRS parce qu'il était parti et il avait fait justement une demande au CNRS et son texte s'appelait *Dessins d'enfants*. Donc vous, vous lisez ça, c'est un enfant, vous pouvez dire, c'est infantile, etc. Mais en fait, c'était relié à un des problèmes les plus profonds des mathématiques qui est ce qu'on appelle la compréhension du groupe de Galois de la clôture algébrique de Q, etc.

Et c'est très souvent le cas, en fait, que quand les gens deviennent des professionnels, ils s'entourent de plus en plus d'une couche protectrice qui les empêche justement de retourner à cet état-là. Et au contraire, je pense que ce qui est absolument essentiel, justement, c'est de permettre le rêve, de permettre, d'essayer d'aller au-delà de l'interdit du rêve, etc., et de revenir à cette source-là. Et je pense que lorsqu'on revient à la source, par exemple, de la notion d'ambiguïté, qui est une notion qui existe et qui pourrait être manifestée dans pas mal de domaines, eh bien à ce moment-là, elle aura effectivement diverses formes, elle prendra diverses formes. Et on n'arrivera jamais à la résumer à une expression.

Il n'y aura jamais une seule expression qui la résumera et ça restera une source d'inspiration constante. Et c'est le cas pour la théorie de Galois, c'est-à-dire que c'est une théorie qui n'est pas épuisée et elle n'est pas épuisée au sens où elle reste... c'est quand les gens la comprennent vraiment, c'est-à-dire que quelqu'un pourrait lire un livre sur la théorie de Galois et n'y rien comprendre parce qu'il n'aurait pas compris l'idée de départ. Et c'est une idée, justement, qui est une idée enfantine, qui est l'idée d'ambiguité.

Mais cette idée, lorsqu'on l'a comprise, elle met les choses en mouvement. C'est une vraie idée met les choses en mouvement, ça là, ça, je pense, c'est très semblable à la musique. Parce qu'on a l'impression, si vous voulez mon impression, moi, sur la créativité en musique, ce n'est pas une impression, c'est plus une impression par rapport à la musique classique, la musique romantique, c'est-à-dire la musique qui est émotionnelle. Mais mon impression, c'était plus, par rapport au mathématicien, qu'il y avait une espèce de batterie émotionnelle qui se charge, indépendamment de l'expression instrumentale et ensuite, une fois qu'elle est suffisamment chargée, il y a un travail qui est extrêmement difficile, qui est de rendre l'émotion individuelle universelle, la transformer, la rendre universelle. Et c'est un processus qui peut paraître extrêmement différent du processus mathématique. Mais schématiquement, c'est le même parce que, que fait le mathématicien ? Quel est le rôle de l'intuition de mathématicien ? Le rôle de son intuition, c'est exactement comme un chasseur. Il dit "Il y a quelque chose là !". Il le sent très, très profondément. Mais après, cette chose-là, il doit aller la chercher et il y a une réalité qui est extrêmement cruelle, etc., et qui l'empêche d'aller la chercher. Donc, après, il a un vrai travail, et ce travail, je pense que c'est le même. C'est très semblable au travail qui consiste à avoir une émotion personnelle, à essayer de la rendre universelle. Donc, il y a un parallèle, bien sûr, ce sont des choses différentes, mais le rôle de l'intuition est le rôle absolument moteur de l'intuition au démarrage et c'est le même dans les deux, je pense

Pierre Boulez : Oui, ça, je le pense aussi, très certainement, mais, en plus de ça, je dirais qu'il y a deux contraintes : d'abord, l'objet n'existe pas, celui que vous imaginez, donc, il reste à construire, et deuxièmement, nous avons, dans une musique qui est instrumentale, par exemple, nous avons à tenir compte de ce qui est la transmission. Et cette transmission se fera mal si par exemple, l'idée est géniale mais la réalisation est insuffisante. Et justement, cette différence entre les objets dont vous vous servez, par exemple, les notes. Quand vous avez, par exemple, un objet tout à fait remarquable, je pense, tout simplement, parce que tout le monde connaît ça, à un son de tam-tam. Un son de tam-tam est beaucoup plus intéressant qu'un son de violon, juste comme ça, mais qu'est-ce qu'il fait ? Ce son est si intéressant, qu'il sort du contexte automatiquement, et donc il faut le restreindre au contraire, pour l'employer d'une façon très très mesurée pour qu'il ait disons sa place. Tandis que vous avez un Fa#, un Sol, ou je ne sais quoi, lui, il est neutre, et donc vous pouvez l'utiliser à votre découverte, c'est-à-dire qu'il y a des objets qui sont prêts à la découverte, et des objets qui ne sont pas prêts à la découverte, qui monopolisent...

Alain Connes : C'est un peu comme un caractère chinois qui a du sens en lui-même, par opposition à une lettre de l'alphabet qui n'a pas de sens en soi.

Pierre Boulez : Et ça n'est pas commode de devoir utiliser les deux.

Gérard Assayag : Nous pourrions continuer très longtemps cette passionnante discussion mais nous devons rendre l'antenne, pour que le Festival et le Colloque se poursuivent. Je pense que nous avons eu deux très belles paroles de fin et je voudrais juste mentionner une conclusion sur l'émotion, je me rappelle avoir lu dans l'un de vos ouvrages, celui avec Changeux, et qui est que pour qu'un jour les machines puissent s'imaginer des buts, et donc deviennent plus intéressantes, il faudrait qu'elles souffrent. Nous avons un grand programme en tant qu'informaticiens, pour faire en sorte que les machines puissent souffrir, elles aussi. Merci Alain Connes, merci Pierre Boulez.

Rencontre entre deux figures majeures de la création musicale et de la recherche mathématique contemporaine, Pierre Boulez et Alain Connes.

Quelle est la place de l'intuition dans le raisonnement mathématique et dans l'activité artistique ? Y a-t-il une dimension esthétique dans l'activité mathématique ? La notion d'élégance d'une démonstration mathématique ou d'une construction théorique en musique joue-t-elle un rôle dans la créativité ?

Ce dialogue autour de l'invention dans les deux disciplines est animé par Gérard Assayag, directeur du laboratoire CNRS/Ircam Sciences et technologies de la musique et du son. Introduction : Frank Madlener, directeur de l'Ircam.

Dans le cadre de la troisième conférence internationale "Mathematics and Computation in Music" (MCM 2011), Agora 2011.

Captation et postproduction Année Zéro. Production Ircam.