

TRIPLETS SPECTRAUX ET ζ -CYCLES

Alain Connes, Caterina Consani

Juin 2021

Résumé : Nous exhibons de très petites valeurs propres de la forme quadratique associée aux formules explicites de Weil restreinte aux fonctions test dont le support est dans un intervalle fixé de borne supérieure S . Nous montrons à la fois numériquement et conceptuellement que les vecteurs propres associés sont obtenus par une opération arithmétique simple de somme finie utilisant les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates associées au facteur d'échelle S . Puis nous utilisons ces fonctions pour conditionner le triplet spectral canonique du cercle de longueur $L = 2\text{Log}(S)$ de telle façon qu'elles appartiennent au noyau de l'opérateur de Dirac perturbé. Nous montrons l'évidence d'une propriété numérique qui fait que, quand on fait varier L , les valeurs du spectre sous-tendu par le triplet spectral perturbé ressemblent aux zéros de la fonction zeta de Riemann. Nous justifions conceptuellement ce résultat et montrons que, pour chaque valeur propre, la coïncidence est parfaite pour les valeurs particulières de la longueur L du cercle pour lesquelles les deux manières naturelles de réaliser la perturbation donnent la même valeur propre. Ce fait est testé numériquement en reproduisant les 30 premiers zéros de la fonction zeta de Riemann de notre côté spectral, et nous estimons quelle serait la probabilité d'obtenir cette coïncidence de façon aléatoire, comme un petit nombre dont les 50 premières décimales vaudraient 0. Le concept théorique qui émerge est celui de ζ -cycle et notre résultat principal établit comment ce concept est relié à la fonction zeta de Riemann et à la réalisation spectrale de ces zéros, réalisation spectrale qui avait été découverte par le premier auteur.

1 Introduction

Quand on contemple les zéros les plus petits de la fonction zeta de Riemann, on est tenté d'émettre l'hypothèse qu'ils pourraient former le spectre d'un opérateur de la forme $\frac{1}{2} + iD$ avec $D = D^*$ auto-adjoint, et de rechercher la géométrie fournie par un triplet spectral¹ dont D est l'opérateur de Dirac. Dans cet article, nous donnons la construction d'un triplet spectral $\Theta(\lambda, k) = (\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{H}(\lambda), D(\lambda, k))$ qui admet, comme on le montre pour les petites valeurs de $\lambda > 1$, un spectre de forme $\frac{1}{2} + iD$ très similaire aux zéros de la fonction zeta de Riemann (un exemple de ce fait est fourni dans la Figure 1, pour $\lambda^2 = 10.5$). Plus précisément, le triplet spectral $\Theta(\lambda, k)$ dépend de λ et également du choix d'un entier $k < 2\lambda^2$; de plus, pour une valeur fixée de k , les valeurs propres positives non-nulles $\lambda_n(D(\lambda, k))$ ordonnées de manière croissante, varient continuellement selon λ . Un fait étrange (d'abord découvert numériquement) est que pour des valeurs spécifiques de λ , la dépendance de $\lambda_n(D(\lambda, k))$ de la valeur de k (suffisamment proche de $2\lambda^2$) disparaît (voir la Figure 2 pour le cas $n = 1$), alors que les *valeurs communes* de ces $\lambda_n(D(\lambda, k))$ coïncident exactement avec la partie imaginaire du n -ième zéro de la fonction zeta de Riemann !

Cela signifie que la ressemblance qualitative des spectres comme dans la Figure 1 produit en fait une coïncidence fine dans un certain intervalle : en faisant varier λ dans l'intervalle $5 \leq \lambda^2 \leq 16.5$, et en déterminant les valeurs propres coïncidant jusqu'à $n = 31$, on produit 31 nombres dans un accord surprenant avec la collection complète des valeurs des 31 premiers zéros de la fonction zeta (voir la Figure 3 ; incidemment, noter que la probabilité d'obtenir un tel accord par choix aléatoire est de l'ordre de 10^{-50}).

La seconde auteure est partiellement financée par la Fondation Simons n 691493.

Traduction de l'article <https://arxiv.org/abs/2106.01715> : Denise Vella-Chemla (on n'a traduit aucune démonstration).

Mots-clés : Triplet spectral, positivité de Weil, fonction zeta de Riemann, réalisation spectrale, fonctions sphéroïdales prolates.

Classification des sujets mathématiques : 11M55 (primaire), 11M06, 46L87, 58B34 (secondaire).

¹La notion de triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ où \mathcal{A} est une algèbre agissant dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} et D est un opérateur auto-adjoint non borné dans \mathcal{H} , est un paradigme essentiel de la géométrie non-commutative [2].

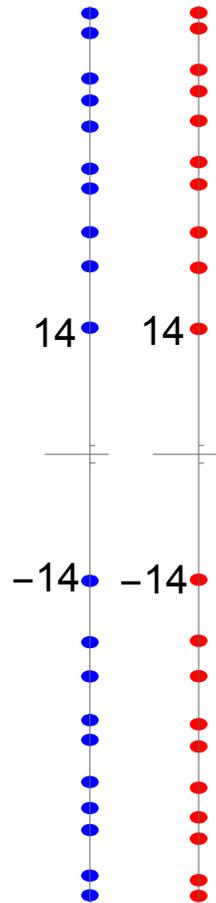


Figure 1: Les valeurs basses du spectre de $iD(\lambda, k)$ pour $\lambda^2 = 10.5$, $k = 18$, sur la gauche (en bleu). Sur la droite (en rouge), les valeurs basses des zéros de la fonction zeta de Riemann.

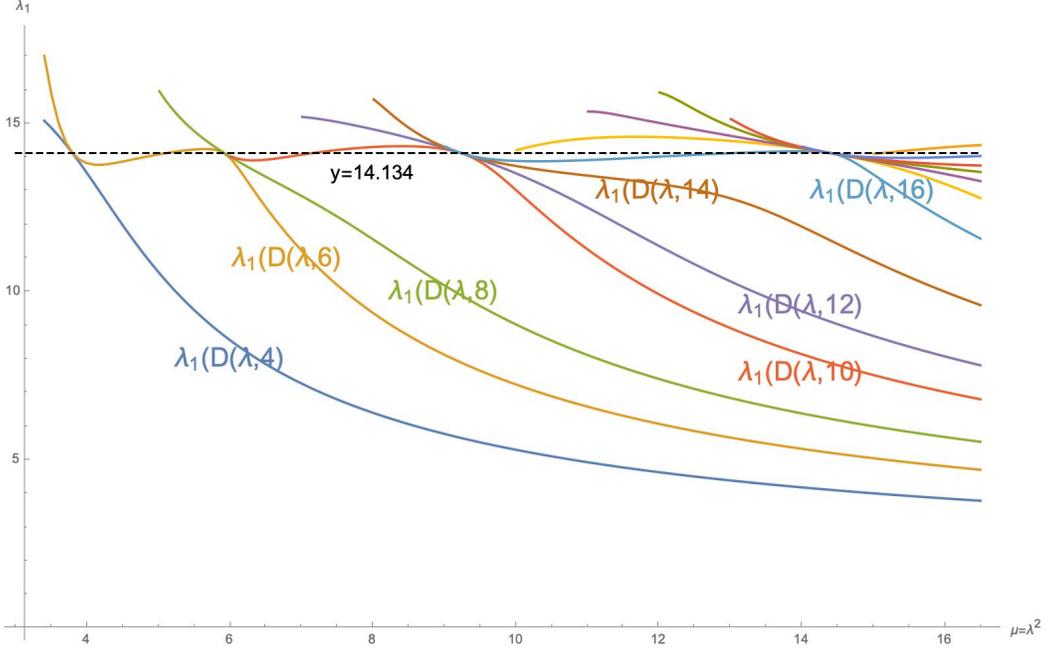


Figure 2: Ces courbes représentent comme une fonction de $\mu = \lambda^2$ la première valeur propre positive $\lambda_1(D(\lambda, 2k))$ de $D(\lambda, 2k)$. L'ordonnée des points où les courbes se touchent est constante et coïncide avec la partie imaginaire $\zeta_1 \sim 14.134$ du premier zéro de zeta. Les abscisses, i.e. les valeurs de μ , sont éléments d'une progression géométrique de raison $\exp(\frac{2\pi}{\zeta_1})$.

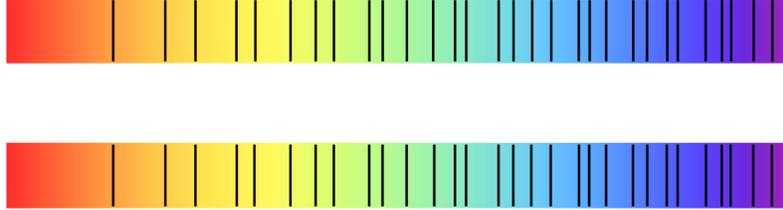


Figure 3: En calculant les valeurs propres qui coïncident $\lambda_j(D(\lambda, k))$, on obtient une liste (la ligne inférieure) qu'on compare avec la liste (la ligne supérieure) des parties imaginaires ζ_j des zéros de zeta.

Le but principal de cet article est de fournir une explication théorique pour cette “coïncidence” numérique et de la relier à la réalisation spectrale des zéros de la fonction zeta donnée en [3]. Le nouveau concept qui émerge est celui de ζ -cycle.

Dans la Section 6.1, nous expliquons comment définir des sommes de Riemann invariantes par mise à l'échelle pour des fonctions définies sur $[0, \infty)$ dont l'intégrale s'évanouit. Cela est réalisé en définissant une fonction linéaire

$$\Sigma_\mu \mathcal{E} : \mathcal{S}_0^{\text{ev}} \rightarrow L^2(C)$$

de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ des fonctions paires, $f, f(0) = 0$, dont l'intégrale s'évanouit, vers les fonctions de carré intégrable sur le cercle $C = \mathbb{R}_+^* / \mu^{\mathbb{Z}}$ de longueur $L = \log \mu$. La notion-clé est fournie par la

Définition 1.1. Un ζ -cycle est un cercle C de longueur $L = \log \mu$ tel que le sous-espace $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})$ n'est pas dense dans l'espace de Hilbert $L^2(C)$.

Il s'avère que comme pour les géodésiques fermées, les ζ -cycles sont stables selon les recouvrements finis, et que si C est un ζ -cycle de longueur L , alors la couverture n -pliée de C est un ζ -cycle de longueur nL , pour tout entier positif $n > 0$.

Par construction, le sous-espace $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}}) \subset L^2(C)$ est invariant par le groupe des rotations du cercle qui apparaît ici à partir de l'action de mise à l'échelle du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* sur $C = \mathbb{R}_+^*/\mu^{\mathbb{Z}}$. Le principal résultat de cet article est le suivant :

Théorème 1.1.

(i) *Le spectre de l'action du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* sur l'orthogonal de $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})$ dans $L^2(C)$ est constitué par les parties imaginaires des zéros de la fonction zeta de Riemann qui sont situés sur la droite critique.*

(ii) *Soit $s > 0$ tel que $\zeta(\frac{1}{2} + is) = 0$, alors tout cercle de longueur un multiple entier de $2\pi/s$ est un ζ -cycle, et le spectre de l'action de \mathbb{R}_+^* sur $(\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}}))^\perp$ contient s .*

Les espaces de Sobolev ad-hoc utilisés dans [3] pour fournir la réalisation des zéros de zeta sont ici remplacés par l'espace de Hilbert canonique $L^2(C)$ des fonctions intégrables de carré mesurable. De plus, le théorème 1.1 fournit la justification théorique de la coïncidence présentée ci-dessus des valeurs spectrales. En effet, les valeurs particulières de $\lambda^2 = \mu = \exp L$ auxquelles la dépendance de k de la valeur propre $\lambda_n(D(\lambda, k))$ disparaît, indiquent que le cercle relié de longueur L est un ζ -cycle et que $\lambda_n(D(\lambda, k))$ appartient à son spectre. Cela explique pourquoi la partie basse du spectre du triplet spectral $\Theta(\lambda, k)$ possède une extraordinaire ressemblance avec les premiers zéros de la fonction zeta de Riemann. En effet, les valeurs particulières de la longueur (L) du cercle pour lesquelles les $\lambda_n(D(\lambda, k))$ coïncident font partie de la progression arithmétique des multiples de $2\pi/\zeta_n$, où ζ_n est la partie imaginaire du n -ième zéro de la fonction zeta. Cela oblige les courbes des fonctions $\lambda_n(D(\mu^{1/2}, k))$ à passer par des points de la forme $(\exp(2\pi m/\zeta_n), \zeta_n)$ (comme dans la Figure 2), ce qui entraîne que la partie basse du spectre de $D(\lambda, k)$ (lorsque $k \sim 2\lambda^2$) imite les premiers zéros de la fonction zeta.

Le triplet spectral $\Theta(\lambda, k)$ est une perturbation de rang fini de l'opérateur de Dirac sur un cercle de longueur $\log \mu = 2 \log \lambda$ et met en jeu, comme ingrédient-clé, les fonctions d'ondes prolates sphéroïdales classiques [11, 12, 13]. Ces fonctions sont utilisées pour définir un sous-espace de dimension finie (de dimension k) de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur le cercle de longueur $2 \log \lambda$, et l'opérateur $D(\lambda, k)$ est alors *canoniquement* obtenu à partir de l'opérateur de différentiation ordinaire $D_0(\lambda)$ pour assurer que son noyau contient le sous-espace de dimension finie ci-dessus.

A priori, il ne semble pas qu'il y ait de relation entre la construction du triplet spectral $\Theta(\lambda, k)$ et la fonction zeta de Riemann : dans la Section 3, nous expliquons comment nous sommes tombés sur $\Theta(\lambda, k)$ en poursuivant nos recherches de la forme quadratique de Weil restreinte aux fonctions de test à support dans un intervalle fixé. Les formules explicites de Riemann-Weil fournissent une expression finie et concrète de la forme quadratique semi-locale de Weil (voir la Section 2) qui permet une exploration numérique puisqu'elle n'implique que les nombres premiers inférieurs à, disons, λ^2 . Par formule quadratique de Weil semi-locale, nous entendons la restriction QW_λ de la forme sesquilinéaire

$$QW(f, g) := \sum_{1/2+is \in Z} \overline{\widehat{f}(s)} \widehat{g}(s) \tag{1.1}$$

des fonctions-test f, g dont le support est contenu dans l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda] \subset \mathbb{R}_+^*$. Dans (1.1), Z est l'ensemble des zéros non triviaux de la fonction zeta de Riemann et la transformation de Fourier est définie sur $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ par

$$\widehat{f}(s) = \mathbb{F}_\mu(f)(s) := \int_{\mathbb{R}_+^*} f(u) u^{-is} d^*u. \tag{1.2}$$

On sait que la positivité de la forme quadratique de Weil QW_λ pour tout λ implique l'hypothèse de Riemann (RH), et dans le cas où RH est vérifiée, on sait que QW_λ est strictement positive. Dans [14], la positivité a été démontrée comme étant vérifiée lorsque $\lambda = \sqrt{2}$ en utilisant l'analyse numérique. Dans la Section 2, nous testons numériquement la positivité pour des valeurs plus grandes de λ , en montrant

(au § 2.2) que la contribution de la place archimédienne seule cesse d'être positive dans la partie haute de l'intervalle $\log(\lambda^2) \in [\log 2 - 0.2, \log 2 + 0.2] \sim [0.493, 0.893]$, alors que cette positivité est restaurée en ajoutant la contribution du nombre premier 2. Cette dernière contribution dépend explicitement de $p = 2$ dans une forme W_p qui peut en fait être évaluée pour tout nombre réel $p \sim 2$ (*i.e.* proche de 2 mais non égal à 2). Nous montrons (au § 2.3) qu'en requérant la positivité, on restreint les valeurs autorisées de p à appartenir à un intervalle de taille $\sim 10^{-3}$ autour de $p = 2$, et au § 2.4, nous montrons que lorsque λ^2 croît au-delà d'une puissance de nombre premier et si l'on ignore sa contribution, la forme quadratique QW_λ ne réussit pas à rester positive. Ce fait est vérifié jusqu'à $\lambda^2 \sim 7$.

Un résultat numérique frappant est décrit au § 2.5, où nous signalons l'évidence numérique selon laquelle lorsque λ croît, l'opérateur correspondant dans $\mathcal{H}(\lambda) := L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ admet un nombre fini de valeurs propres positives extrêmement petites. Par exemple, on trouve que quand $\lambda^2 = 11$, la plus petite valeur positive est 2.389×10^{-48} .

Les fonctions propres correspondantes sont présentées graphiquement sur les Figures 22, 23, 24.

La Section 3 explique conceptuellement la présence de ces valeurs propres positives extrêmement petites et on fournit alors également une excellente approximation des fonctions propres qui leur sont associées. La raison théorique de la présence de ces valeurs propres extrêmement petites provient du fait que le radical de la forme quadratique de Weil contient le domaine de la fonction \mathcal{E} de [3], qui est définie sur le sous-espace de codimension 2 $\mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ des fonctions de Schwartz paires en remplaçant la condition $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$ par

$$\mathcal{E}(f)(x) := x^{1/2} \sum_{n>0} f(nx), \quad \forall f \in \mathcal{S}_0^{\text{ev}}. \quad (1.3)$$

Même si RH implique que QW_λ est strictement positive, et qu'ainsi son radical est $\{0\}$, en utilisant (1.3), on peut cependant construire des fonctions g dont le domaine est inclus dans $[\lambda^{-1}, \lambda]$ qui sont dans le "radical proche" de la forme quadratique de Weil *i.e.* qui vérifient $QW_\lambda(g) \ll \|g\|^2$. Plus précisément, si le support de la fonction paire $f \in \mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ est contenu dans l'intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$, le support de $\mathcal{E}(f)$ est contenu dans $(0, \lambda] \subset \mathbb{R}_+^*$. D'un autre côté, la formule de Poisson

$$\mathcal{E}(\widehat{f})(x) = \mathcal{E}(f)(x^{-1}), \quad \forall f \in \mathcal{S}_0^{\text{ev}} \quad (1.4)$$

montre que le support de $\mathcal{E}(f)$ est contenu dans $[\lambda^{-1}, \infty)$ à partir du moment où le support de la fonction paire \widehat{f} est contenu dans l'intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$. L'impossibilité d'obtenir un élément $\mathcal{E}(f)$ du radical de QW_λ est l'égalité $\mathcal{P}_\lambda \cap \widehat{\mathcal{P}}_\lambda = \{0\}$, où \mathcal{P}_λ et $\widehat{\mathcal{P}}_\lambda$ sont les projections de cutoff dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})^{\text{ev}}$ des fonctions paires de carré intégrable (la projection \mathcal{P}_λ est donnée par la multiplication par la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$, la projection $\widehat{\mathcal{P}}_\lambda$ est son conjugué par la transformation de Fourier $\text{tF}_{e_{\mathbb{R}}}$). Le travail séminal de Slepian et Pollack [11, 12, 13] sur les fonctions à bande limitée montre alors que lorsque $\mathcal{P}_\lambda \cap \widehat{\mathcal{P}}_\lambda = \{0\}$, l'opérateur d'angle entre ces deux projections admet un nombre fini $1 + \nu(\lambda^2) \sim 2\lambda^2$ de valeurs propres non-nulles extrêmement petites et que les fonctions propres correspondantes sont les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates

$$\psi_{m,\lambda}(x) := PS_{2m,0} \left(2\pi\lambda^2, \frac{x}{\lambda} \right), \quad m \leq \nu(\lambda^2) \sim 2\lambda^2.$$

Par construction, chaque $\psi_{m,\lambda}$ est une fonction sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$ que l'on étend par 0 en dehors de cet intervalle. Sa transformation de Fourier $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(\psi_{m,\lambda})$ restreinte à l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$, est égale à $\chi_m \psi_{m,\lambda}$ où le scalaire χ_m est très proche de $(-1)^m$ à condition que m soit inférieur à $\nu(\lambda^2) \sim 2\lambda^2$. En prêtant attention à la vérification de ces deux conditions, $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$, la restriction de $\mathcal{E}(f)$ à l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$ permet d'obtenir une fonction que nous appelons un "vecteur prolate", et sur lequel QW_λ prend des valeurs non nulles, mais extrêmement petites. Ce fait est vérifié concrètement dans la Section 3 dans laquelle nous comparons les vecteurs propres de la forme quadratique de Weil QW_λ associée à ces plus petites valeurs propres avec l'orthogonalisation des vecteurs prolates obtenus en utilisant les techniques décrites ci-dessus, à partir des fonctions d'onde sphéroïdales prolates.

La construction du triplet spectral $\Theta(\lambda, k)$ est menée dans la Section 4. Même si cette construction est motivée par les résultats de la Section 3 sur le presque radical de la forme quadratique de Weil QW_λ , la technique employée n'utilise que les vecteurs prolates sans aucune référence à QW_λ . En utilisant les $k + 2$ premières fonctions prolates, on obtient un sous-espace k -dimensionnel de $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u) \simeq L^2(\mathbb{R}_+^*/\lambda^{2\mathbb{Z}}, d^*u)$, on dénote alors par $\Pi(\lambda, k)$ la projection orthogonale associée. Par définition, le triplet spectral $\Theta(\lambda, k) = (\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{H}(\lambda), D(\lambda, k))$ est donné par l'action par multiplication de l'algèbre des fonctions lisses $\mathcal{A}(\lambda) := C^\infty(\mathbb{R}_+^*/\lambda^{2\mathbb{Z}})$ sur $\mathcal{H}(\lambda) := L^2(\mathbb{R}_+^*/\lambda^{2\mathbb{Z}}, d^*u)$, alors que l'opérateur $D(\lambda, k)$ est la perturbation de rang fini

$$D(\lambda, k) := (1 - \Pi(\lambda, k)) \circ D_0 \circ (1 - \Pi(\lambda, k)), \quad D_0 = -iu\partial_u \quad (1.5)$$

de l'opérateur de Dirac standard $D_0 = -iu\partial_u$ (avec conditions périodiques aux limites quand on se place dans $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u) \simeq L^2(\mathbb{R}_+^*/\lambda^{2\mathbb{Z}})$). Nous calculons les valeurs basses du spectre de ces triplets spectraux et nous trouvons une ressemblance fine avec les premiers zéros de la fonction zeta de Riemann, à condition que k soit suffisamment proche de la plus grande valeur autorisée $\nu(\lambda^2)$. D'un autre côté, puisque les valeurs propres $\lambda_n(D(\lambda, k))$ varient selon λ , on ne peut pas s'attendre à ce qu'elles reproduisent exactement le n -ième zéro de la fonction zeta. La subtilité de la relation est expliquée dans la Section 5, où nous fournissons plusieurs critères pour retrouver les zéros de la fonction zeta de Riemann en utilisant les valeurs propres non-nulles $\lambda_n(D(\lambda, k))$. D'abord, nous montrons que pour $k = 2\ell$, les valeurs propres vérifient l'inégalité $\lambda_n(D(\lambda, k+1)) \leq \lambda_n(D(\lambda, k))$; ensuite nous démontrons (cf. § 5.1) que pour certaines valeurs de λ , on a $\lambda_n(D(\lambda, k+1)) \simeq \lambda_n(D(\lambda, k))$. Quand cela advient et quand k est suffisamment proche de la borne supérieure $\nu(\lambda^2)$, la valeur propre commune coïncide avec la partie imaginaire du n -ième zéro de la fonction zeta. Ce résultat est renforcé au § 5.2, où nous présentons sur des graphiques l'évolution des valeurs propres $\lambda_n(D(\lambda, k))$, comme des fonctions de $\mu = \lambda^2$, pour k fixé, et où nous trouvons que plusieurs courbes coïncident aux valeurs spécifiques ci-dessus de λ comme on le voit sur la Figure 2. Au § 5.3, on découvre que les points particuliers ainsi obtenus dans le plan (μ, λ_n) vérifient la condition de quantification

$$\mu^{i\lambda_n} = 1.$$

Ce résultat suggère que pour les valeurs spécifiques ci-dessus de λ , on a un vecteur propre qui est déjà un vecteur propre de l'opérateur de Dirac non perturbé D_0 . Au § 5.4 nous appliquons ce critère pour sélectionner les valeurs particulières de λ , et nous calculons les 31 premiers zéros de la fonction zeta de Riemann avec la précision fournie dans la Figure 3.

L'explication conceptuelle de ces découvertes expérimentales est le Théorème 1.1 dont la démonstration est fournie dans la section 6 (2).

2 La forme quadratique semi-locale de Weil

Dans cette section, nous testons numériquement la positivité de la forme quadratique de Weil $QW(f, g)$, dans le cas semi-local, notamment pour les fonctions de test f, g avec support dans l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$. Cette recherche se décompose en deux cas indépendants tels que $QW_\lambda = QW_\lambda^+ \oplus QW_\lambda^-$, selon la parité de f et g par rapport à l'opérateur de symétrie $u \mapsto u^{-1}$. Le Lemme 2.5 montre que pour les fonctions de test réelles, les fonctions paires n'interfèrent pas avec les fonctions impaires. De plus, par construction, la positivité de QW_λ dépend de la longueur $L = 2 \log \lambda$ du support des fonctions de test. Nous définissons dans (2.14) une base orthonormale $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ de l'espace de Hilbert $L^2([\lambda^{-1}, \lambda])$ formé par les fonctions réelles impaires (à cause de la symétrie $u \mapsto u^{-1}$) pour $n < 0$, et par des fonctions réelles paires pour $n \geq 0$. La matrice $\sigma(n, m) = QW(\eta_n, \eta_m)$ est la somme directe $\sigma = \sigma^+ \oplus \sigma^-$ de deux matrices réelles symétriques infinies, chacune d'elle s'exprimant comme une somme finie impliquant la contribution archimédienne $-W_{\mathbb{R}}$, ainsi que la contribution $-W_p$ pour les nombres premiers p inférieurs à $\mu = \lambda^2$. Les tests numériques consistent à évaluer les valeurs propres des très grandes portions de ces matrices correspondant aux indices n et m dont les valeurs absolues sont $\leq N$. Ces calculs mettent clairement en évidence que l'accroissement pour les grandes valeurs de N n'altère pas substantiellement la partie inférieure du spectre de $\sigma(n, m)$. Au § 2.2, nous trouvons que la contribution archimédienne $-W_{\mathbb{R}}$ à la forme quadratique de Weil, quand elle est

²La présente traduction ne contient aucune démonstration ; se reporter à l'article original en anglais <https://arxiv.org/abs/2106.01715>.

prise séparément, finit par être positive, lorsqu'on la calcule dans un intervalle s'étendant légèrement autour de la valeur $L = \log 2$ (Figure 6). Pourtant, la positivité est restaurée après cette valeur, et précisément dans l'intervalle $\log 2 \leq L < \log 3$, en implémentant également la contribution du nombre premier $p = 2$, en fonction de la fonctionnelle qui lui est liée $-W_2$. Au § 2.3, nous fournissons les résultats numériques obtenus qui confortent l'évidence du fait que le signe de QW_λ est également sensible au remplacement de $-W_2$ par une fonctionnelle $-W_p$ dont la définition utilise la même formule que celle fournie pour $-W_2$ en remplaçant 2 par p , prise comme une variable réelle dans un proche voisinage de $p = 2$. En effet, les calculs montrent que la positivité de la forme quadratique n'est pas vérifiée si l'on considère des valeurs réelles de p en dehors d'un intervalle de taille $< 10^{-3}$ autour de 2. Au § 2.4, nous rapportons l'évidence graphique indiquant combien la contribution de chaque fonctionnelle $-W_p$ est importante pour préserver la positivité de la forme quadratique, si le support de la fonction de test s'étend au-delà d'une puissance de nombre premier p^n . Finalement, au § 2.5, nous montrons l'évidence numérique du fait-clé qui est qu'en augmentant adéquatement le support des fonctions de test, les matrices "paires" et "impaires" σ^\pm admettent un nombre fini de valeurs positives extrêmement petites. La discussion théorique de ce résultat est présentée dans la section 3.

2.1 La matrice $\sigma = \sigma^+ \oplus \sigma^-$

Cette sous-section décrit le choix des fonctions de test utilisées dans le présent article pour effectuer les calculs numériques. Quand on la considère selon le point de vue de la théorie de Hilbert, la restriction QW_λ de la forme quadratique aux fonctions à support dans l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$ est une forme quadratique bornée inférieurement, semi-continue inférieurement, définie sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ avec des valeurs dans $(-\infty, +\infty]$. On choisit une base orthonormale $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de \mathcal{H} qui est un noyau pour QW_λ et on calcule les valeurs propres pour de très larges portions de la matrice associée $QW(\eta_n, \eta_m) = \sigma(n, m)$.

2.1.1 Formule explicite

En se basant sur [1], on considère la classe \mathcal{W} des fonctions f à valeurs complexes sur \mathbb{R}_+^* qui sont continues et dont la dérivée est continue excepté en un nombre fini de points sur lesquels à la fois $f(x)$ et $f'(x)$ ont au plus une discontinuité de première espèce, et en lesquels les valeurs de $f(x)$ et $f'(x)$ sont définies comme moyenne de leur limite à droite et à gauche. De plus, on suppose que pour un certain $\delta > 0$, on a

$$f(x) = O(x^\delta), \text{ for } x \rightarrow 0+, \quad f(x) = O(x^{-1-\delta}), \text{ pour } x \rightarrow +\infty.$$

La transformée de Mellin de $f \in \mathcal{W}$ est définie par

$$\tilde{f}(s) := \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \tag{2.1}$$

Notons $f^\sharp(x) := x^{-1}f(x^{-1})$, alors la formule explicite de Weil prend la forme

$$\sum_\rho \tilde{f}(\rho) = \int_0^\infty f(x)dx + \int_0^\infty f^\sharp(x)dx - \sum_v \mathcal{W}_v(f), \tag{2.2}$$

où la somme du côté gauche est calculée sur tous les zéros complexes ρ de la fonction zeta de Riemann, et la somme du côté droit est calculée sur toutes les places rationnelles v de \mathbb{Q} . Les distributions non-archimédiennes \mathcal{W}_p sont définies par

$$\mathcal{W}_p(f) := (\log p) \sum_{m=1}^\infty (f(p^m) + f^\sharp(p^m)) \tag{2.3}$$

alors que la distribution archimédienne est donnée par

$$\mathcal{W}_\mathbb{R}(f) := (\log 4\pi + \gamma)f(1) + \int_1^\infty \left(f(x) + f^\sharp(x) - \frac{2}{x}f(1) \right) \frac{dx}{x - x^{-1}}. \tag{2.4}$$

La traduction en formules (équivalentes) en utilisant la transformation de Fourier (à la place de celle de Mellin) est effectuée en implémentant l'automorphisme Δ

$$f \mapsto \Delta^{1/2}f = F, \quad F(x) = x^{1/2}f(x) \tag{2.5}$$

qui respecte le produit de convolution et satisfait les égalités

$$(\Delta^{1/2} f^\sharp)(x) = x^{1/2} f^\sharp(x) = x^{-1/2} f(x^{-1}) = (\Delta^{1/2} f)(x^{-1}).$$

Après avoir pris les conjugués complexes, Δ est compatible avec les involutions naturelles. Pour une place rationnelle v , on pose $W_v(F) := \mathcal{W}_v(\Delta^{-1/2} F)$, alors les distributions ci-dessus \mathcal{W}_p prennent la forme suivante

$$W_p(F) = (\log p) \sum_{m=1}^{\infty} p^{-m/2} (F(p^m) + F(p^{-m})). \quad (2.6)$$

En utilisant la version multiplicative $d^*x = dx/x$ de la mesure de Haar, la distribution archimédienne $\mathcal{W}_{\mathbb{R}}$ devient

$$W_{\mathbb{R}}(F) := (\log 4\pi + \gamma)F(1) + \int_1^{\infty} (F(x) + F(x^{-1}) - 2x^{-1/2}F(1)) \frac{x^{1/2}}{x - x^{-1}} d^*x. \quad (2.7)$$

2.1.2 La forme quadratique semi-locale de Weil

La forme quadratique de Weil est maintenant réécrite comme

$$QW(f, g) = \psi(f^* * g), \quad \psi(F) := \widehat{F}(i/2) + \widehat{F}(-i/2) - W_{\mathbb{R}}(F) - \sum_p W_p(F) \quad (2.8)$$

où $\widehat{F}(s) := \int F(u)u^{-is}d^*u$ dénote la transformée de Fourier de la fonction F . De plus, la fonctionnelle $W_{\infty} := -W_{\mathbb{R}}$ vérifie la formule suivante

$$W_{\infty}(F) = \int \widehat{F}(t) \frac{2\partial_t \theta(t)}{2\pi} dt \quad (2.9)$$

en fonction de la dérivée de la fonction angulaire de Riemann-Siegel $\theta(t)$

$$\theta(t) = -\frac{t}{2} \log \pi + \Im \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2} \right), \quad (2.10)$$

avec $\log \Gamma(s)$, pour $\Re(s) > 0$, la branche du log qui est réel pour s réel.

Par “forme quadratique bornée inférieurement, semi-continue inférieurement (lsc) q sur un espace de Hilbert \mathcal{H} ”, nous entendons “fonction semi-continue inférieurement”³ $q : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ qui vérifie $q(\lambda\xi) = |\lambda|^2 q(\xi)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la loi du parallélogramme

$$q(\xi + \eta) + q(\xi - \eta) = 2q(\xi) + 2q(\eta)$$

et également une inégalité de la forme $q(\xi) \geq -c\|\xi\|^2$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, réfléchissant la borne inférieure de q .

La forme sesquilinéaire associée (antilinéaire en la première variable) est donnée sur le domaine de q , $\text{Dom}(q) := \{\xi \in \mathcal{H} \mid q(\xi) < \infty\}$ par

$$q(\xi, \eta) := \frac{1}{4} (q(\xi + \eta) - q(\xi - \eta) + iq(i\xi + \eta) - iq(i\xi - \eta)).$$

Par un résultat de Kato (voir [10], Théorème 2) qui énonce que les formes quadratiques inférieurement bornées correspondent aux opérateurs auto-adjoints définis par une densité inférieurement bornée $T \geq -c$ sur \mathcal{H} par la formule

$$q(\xi) + c\|\xi\|^2 = \langle (T + c)^{\frac{1}{2}} \xi \mid (T + c)^{\frac{1}{2}} \xi \rangle = \|(T + c)^{\frac{1}{2}} \xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

D’un point de vue informel, cela signifie que $q(\xi, \eta) = \langle \xi \mid T\eta \rangle$.

³*i.e.* telle que quand $\xi_n \rightarrow \xi$, on a $q(\xi) \leq \liminf q(\xi_n)$

Proposition 2.1. Soit $\lambda > 1$. La formule suivante définit une forme quadratique bornée inférieurement à borne inférieure semi-continue $QW_\lambda : L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u) \rightarrow (-\infty, +\infty]$

$$QW_\lambda(f, f) := \int |\widehat{f}(t)|^2 \frac{2\partial_t \theta(t)}{2\pi} dt + 2\Re \left(\widehat{f}\left(\frac{i}{2}\right) \overline{\widehat{f}\left(-\frac{i}{2}\right)} \right) - \sum_{1 < n \leq \lambda^2} \Lambda(n) \langle f | V(n)f \rangle \quad (2.11)$$

où $\Lambda(n)$ est la fonction de von Mangoldt et $V(n)$ est l'opérateur auto-adjoint borné dans $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ tel que

$$\langle f | V(n)g \rangle = n^{-1/2} ((f^* * g)(n) + (f^* * g)(n^{-1})). \quad (2.12)$$

Lemme 2.2. Soit $\lambda > 1$, et $U \in L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ étant la fonction $U(u) := u^{\frac{i\pi}{\log \lambda}}$. Alors l'espace des polynômes de Laurent $\mathbb{C}[U, U^{-1}]$ est un noyau de la forme quadratique QW_λ .

Proposition 2.3. Soit $\lambda > 1$. La forme quadratique $QW_\lambda : L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u) \rightarrow (-\infty, +\infty]$ de (2.11) vérifie, pour tout $f \in L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$,

$$QW_\lambda(f) = \liminf_{g_n \rightarrow f} QW_\lambda(g_n), \quad g_n \in \mathbb{C}[U, U^{-1}] \quad (2.13)$$

Corollaire 6.5. La borne inférieure de QW_λ est la limite, quand $N \rightarrow \infty$, de la plus petite valeur propre de la restriction de QW_λ au sous-espace vectoriel E_N engendré par les fonctions U^k pour $|k| \leq N$.

2.1.3 Base des fonctions réelles dans $\mathbb{C}[U, U^{-1}]$

Dans le but de calculer explicitement la plus petite valeur propre de la restriction de QW_λ à l'espace vectoriel E_N engendré par les fonctions U^k , pour $|k| \leq N$, comme dans le Corollaire 6.5, nous trouvons d'abord une base orthonormée convenable formée des fonctions à valeurs réelles. Nous considérons d'abord l'espace de Hilbert $L^2([-L/2, L/2]) \subset L^2(\mathbb{R})$ avec le produit intérieur défini par la formule

$$\langle \xi | \eta \rangle := \int_{-L/2}^{L/2} \overline{\xi(x)} \eta(x) dx$$

Une base orthonormale réelle est donnée par la fonction constante $\xi_0(x) = L^{-1/2}$ avec les fonctions $\xi_n(x)$ $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, définies comme suit

$$\begin{aligned} \xi_n(x) &:= (-1)^n \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \quad \forall n > 0 \\ \xi_n(x) &:= (-1)^n \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \quad \forall n < 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

On remarque les simples faits suivants

Lemme 2.5. Soit $L > 0$, $\phi_j \in L^2([-L/2, L/2])$ et $\theta = \phi_1 * \phi_2^*$. Alors

(i) Le support de θ est contenu dans l'intervalle $[-L, L]$, et pour $t \in [0, L]$, on a

$$\theta(t) = \int_{t-L/2}^{L/2} \phi_1(x) \overline{\phi_2(x-t)} dx, \quad \theta(-t) = \int_{t-L/2}^{L/2} \phi_1(x-t) \overline{\phi_2(x)} dx.$$

(ii) Si les fonctions ϕ_j sont réelles, alors : $\phi_1 * \phi_2^*(-t) = \phi_2 * \phi_1^*(t)$.

(iii) Si les fonctions ϕ_j sont réelles, avec ϕ_1 pair et ϕ_2 impair, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi_1 * \phi_2^*(t) + \phi_2 * \phi_1^*(t) = 0.$$

Il est pratique de réécrire la forme sesquilineaire de Weil $QW(f, g) = \psi(f^* * g)$ en utilisant l'invariance naturelle de la fonctionnelle ψ selon la symétrie $h^\sigma(u) := h(u^{-1})$. Ainsi

$$\psi(h) = \psi^\#(h + h^\sigma), \quad h^\sigma(u) := h(u^{-1}) \quad (2.15)$$

où

$$\psi^\#(F) := W_{0,2}^\#(F) - W_{\mathbb{R}}^\#(F) - \sum W_p^\#(F) \quad (2.16)$$

avec

$$W_{0,2}^\#(F) = \int_1^\infty F(x)(x^{1/2} + x^{-1/2})d^*x \quad (2.17)$$

$$W_{\mathbb{R}}^\#(F) = \frac{1}{2}(\log 4\pi + \gamma)F(1) + \int_1^\infty \frac{x^{1/2}F(x) - F(1)}{x - x^{-1}}d^*x \quad (2.18)$$

$$W_p^\#(F) = (\log p) \sum_{m=1}^\infty p^{-m/2}F(p^m). \quad (2.19)$$

Lemme 2.6. Avec $\eta_n(u) := \xi_n(\log u)$, les η_j , $|j| \leq n$ forment une base orthonormée de E_n .

(i) La matrice de la forme sesquilineaire de Weil est donnée par la formule suivante

$$QW_\lambda(\eta_n, \eta_m) = \sigma(n, m) = \psi^\#(h), \quad h(u) = (\xi_n * \xi_m^* + \xi_m * \xi_n^*)(\log u), \quad (2.20)$$

où $\psi^\#(h)$ est définie dans (2.16).

(ii) Pour $n \geq 0$, $m < 0$, on a $(\xi_n * \xi_m^* + \xi_m * \xi_n^*)(y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

(iii) Pour $nm > 0$, où $n = 0$ et $m \geq 0$, on a : $\xi_n * \xi_m^* = \xi_m * \xi_n^*$.

De plus, la convolution $\xi_n * \xi_m^*(y)$ est une fonction paire de y dont la description explicite, pour $y \in [0, L]$, est donnée dans la table suivante le terme général donne la fonction $1/2(\xi_n * \xi_m^* + \xi_m * \xi_n^*)(y)$

	$n > 0$	$n = 0$	$n < 0$
$m > 0, n \neq m$	$\frac{n \sin(\frac{2\pi ny}{L}) - m \sin(\frac{2\pi my}{L})}{\pi(m^2 - n^2)}$	$-\frac{\sin(\frac{2\pi my}{L})}{\sqrt{2\pi m}}$	0
$m = n > 0$	$\frac{(L-y) \cos(\frac{2\pi ny}{L})}{L} - \frac{\sin(\frac{2\pi ny}{L})}{2\pi n}$	\emptyset	\emptyset
$m = 0$	$-\frac{\sin(\frac{2\pi ny}{L})}{\sqrt{2\pi n}}$	$\frac{L-y}{L}$	0
$m < 0, n \neq m$	0	0	$\frac{m \sin(\frac{2\pi ny}{L}) - n \sin(\frac{2\pi my}{L})}{\pi(m^2 - n^2)}$
$m = n < 0$	\emptyset	\emptyset	$\frac{\sin(\frac{2\pi ny}{L})}{2\pi n} + \frac{(L-y) \cos(\frac{2\pi ny}{L})}{L}$

Le Lemme 2.6 (ii) montre que σ est une matrice symétrique et que

$$\sigma(n, m) = 0, \quad \forall n \geq 0, m < 0.$$

Ainsi σ se sépare en deux blocs $\sigma = \sigma^+ \oplus \sigma^-$ que nous appellerons informellement les matrices “paires” et “impaires”. Elles correspondent à la partition $\mathbb{Z} = \{n \geq 0\} \cup \{n < 0\}$ et on a

$$QW_\lambda = QW_\lambda^+ \oplus QW_\lambda^-, \quad \sigma = \sigma^+ \oplus \sigma^-. \quad (2.21)$$

Cette décomposition montre que la positivité de la forme quadratique de Weil peut être testée en traitant séparément les cas des fonctions paires (en utilisant la matrice σ^+) et les cas des fonctions impaires (en utilisant σ^-). Dans la base choisie η_n , le cas pair correspond au fait de considérer les éléments de la base indexés par $n \geq 0$, tandis que le cas impair implique d'indexer les η_n par les $n < 0$.

2.1.4 La matrice $w_{0,2}(n, m)$

Dans la suite, nous allons décrire la contribution des deux premiers termes de (2.8) à la matrice $\sigma(m, n)$. Le Lemme suivant montre que ces termes contribuent par une matrice de rang 1 à la fois aux matrices impaires et aux matrices paires σ^\pm .

Lemme 2.7. *Soient $n, m > 0$ deux entiers positifs, $\theta = \xi_m * \xi_n^*$, $F(x) = \theta(\log x)$. L'égalité suivante est vérifiée*

$$\widehat{F}(i/2) + \widehat{F}(-i/2) = \frac{8e^{-\frac{i}{2}} (e^{L/2} - 1)^2 L^3}{(L^2 + 16\pi^2 m^2)(L^2 + 16\pi^2 n^2)}. \quad (2.22)$$

Si $n, m < 0$ sont des entiers négatifs, alors on a

$$\widehat{F}(i/2) + \widehat{F}(-i/2) = -\frac{256\pi^2 L e^{-\frac{i}{2}} (e^{L/2} - 1)^2 mn}{(L^2 + 16\pi^2 m^2)(L^2 + 16\pi^2 n^2)}. \quad (2.23)$$

2.1.5 La somme $\sum W_p$

La contribution des nombres premiers non archimédiens est donnée par (2.6), maintenant écrite comme

$$\sum W_p = \sum_{1 < m \leq \exp(L)} \Lambda(m) m^{-1/2} (\xi_n * \xi_m^* + \xi_m * \xi_n^*) (\log m). \quad (2.24)$$

2.1.6 La fonctionnelle $W_{\mathbb{R}}$

Soit $\theta_{\text{sym}}(t) = (\xi_n * \xi_m^* + \xi_m * \xi_n^*)(t)$, alors (2.7) se lit comme

$$W_{\mathbb{R}} = \int_0^L \frac{\exp\left(\frac{x}{2}\right) \theta_{\text{sym}}(x) - \theta_{\text{sym}}(0)}{\exp(x) - \exp(-x)} dx - \theta_{\text{sym}}(0) \int_L^\infty \frac{dx}{\exp(x) - \exp(-x)} + \frac{1}{2}(\gamma + \log(4\pi))\theta_{\text{sym}}(0).$$

On a

$$\int_L^\infty \frac{dx}{\exp(x) - \exp(-x)} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{e^L + 1}{e^L - 1}\right)$$

de telle façon que l'on obtient

$$W_{\mathbb{R}} = \frac{\theta_{\text{sym}}(0)}{2} \left(\gamma + \log\left(4\pi \frac{e^L - 1}{e^L + 1}\right) \right) + \int_0^L \frac{\exp\left(\frac{x}{2}\right) \theta_{\text{sym}}(x) - \theta_{\text{sym}}(0)}{\exp(x) - \exp(-x)} dx. \quad (2.25)$$

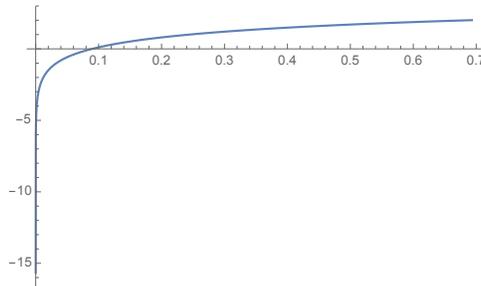


Figure 4: Coefficient de $\frac{\theta_{\text{sym}}(0)}{2}$. Sa valeur en $L = \log 2$ est 2.00963.

La Figure 4 montre que le coefficient de $\frac{\theta_{\text{sym}}(0)}{2}$ est négatif à proximité de l'origine ($L = 0$), ainsi sa contribution à la forme quadratique QW est positive pour les petites valeurs de L , à cause du signe moins devant $W_{\mathbb{R}}^+$ (dans (2.16)). Cette contribution très similaire devient négative pour des valeurs plus grandes de L .

2.2 Sensibilité de la positivité de Weil, à la place archimédienne

Le premier fait que nous constatons à partir des calculs numériques est que la contribution archimédienne ne parvient pas à rester positive quand on l'étend un peu au-delà de la valeur $L = \log 2$. Dans les deux graphiques suivants (Figure 5 et 6), est visualisée la variation de la plus petite valeur propre de la matrice paire σ^+ , lorsque la valeur de L approche et ensuite va un peu au-delà de $\log 2$. Quand on considère les valeurs de L dans l'intervalle $\log 2 \leq L < \log 3$, la contribution des nombres premiers à la forme quadratique de Weil ne se fait que par $p = 2$, et est de la forme

$$W_p(F) = p^{-1/2} \log p (\theta(\log p) + \theta(-\log p)). \quad (2.26)$$

La Figure 7 montre qu'en ajoutant la contribution du nombre premier 2 à la contribution archimédienne, on restaure la positivité de la matrice paire σ^+ . La courbe est une fonction de $\mu := \exp L$, et ce choix de la variable est dicté par le fait que les valeurs puissances entières de premiers jouent un rôle crucial dans cette étude.

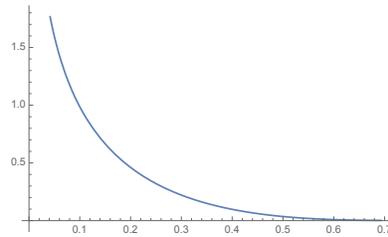


Figure 5: Positivité de la contribution archimédienne à la matrice paire pour $L \in [0, \log 2]$. La plus petite valeur propre lorsque $L = \log 2$ est ~ 0.00133 .

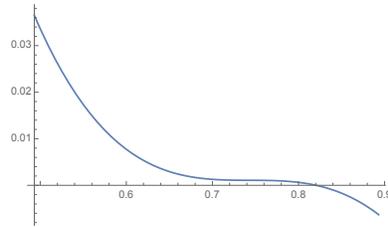


Figure 6: Changement de signe de la plus petite valeur propre de la contribution archimédienne à la matrice paire pour $L \in [\log 2 - 0.2, \log 2 + 0.2] \sim [0.493, 0.893]$.

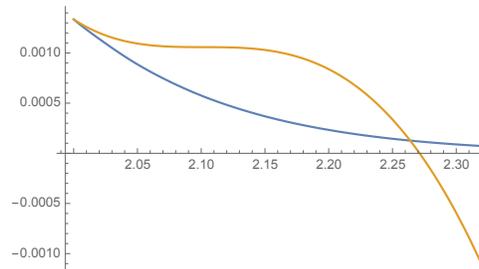


Figure 7: Changement de signe de la plus petite valeur propre pour la contribution archimédienne seule, comme une fonction de $\mu := \exp L$, à proximité de $\mu = 2$ (en jaune). Après avoir ajouté la contribution du nombre premier 2, la plus petite valeur propre de la matrice paire est > 0 (en bleu).

2.3 Sensibilité de la positivité de Weil pour la valeur précise $p = 2$

La Figure 7 montre qu'au-delà de $\mu = 2$, la contribution (2.26) du nombre premier 2 d'abord fait baisser la plus petite valeur propre dans l'intervalle $\exp L \in (2, 2.27)$ mais également l'empêche d'être négative. La valeur de la plus petite valeur propre de σ^+ pour $\mu = 3$ est $< 6 \times 10^{-8}$. Cela suggère d'utiliser p comme une variable dans (2.26) et de tester la sensibilité de la positivité de Weil pour la valeur précise $p = 2$. A cette fin, on fixe $L = \log 3$ (i.e. $\mu = 3$) et on remplace 2 par une variable p dans (2.26).

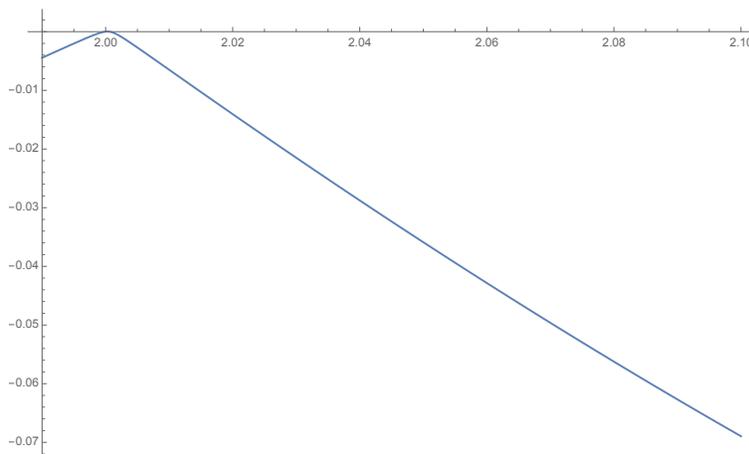


Figure 8: Sensibilité à la valeur spécifique $p = 2$.

Comme le montre la Figure 8, on trouve que la plus petite valeur propre $\lambda(p)$ pour $L = \log 3$ est négative pour $p = 1.9999$ et également pour $p = 2.0005$, de telle façon que la contrainte de positivité restreint le choix de p à un intervalle de taille $< 10^{-3}$ autour de $p = 2$.

2.4 Changement de signe de la plus petite valeur propre

Au-delà de $p = 3$, le signe de la plus petite valeur propre de la somme des contributions de ∞ et de 2 à la matrice paire σ^+ est montré en jaune dans la Figure 9. Une fois de plus, on note que ce signe est négatif au-delà de $\mu = 3$ est "à nouveau le même" et la sortie (en bleu dans la figure) est rendue positive en ajoutant la contribution du nombre premier 3.

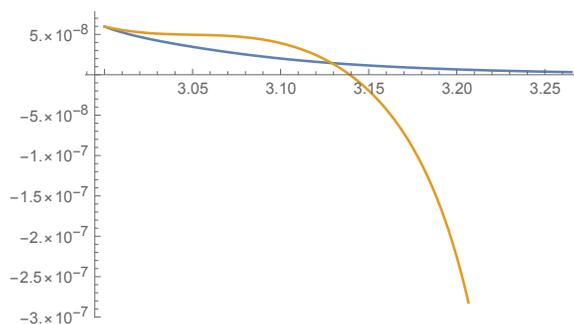


Figure 9: Changement de signe de la plus petite valeur propre (en jaune) des contributions de ∞ et de 2 à la matrice paire au-delà de $\mu = 3$. En bleu, après ajout de la contribution du nombre premier 3 : le total est > 0 .

Quand μ va au-delà de la puissance de nombre premier 4 = 2^2 , le comportement de la plus petite valeur propre est similaire aux cas rapportés précédemment, et est présenté sur la Figure 10.

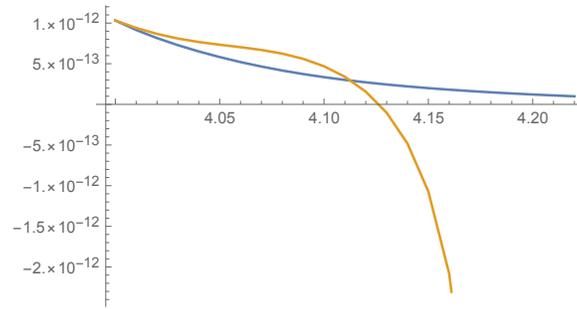


Figure 10: Changement de signe de la plus petite valeur propre de la matrice paire au-delà de 4 : en jaune, si on néglige la contribution de la puissance de premier 4 = 2², en bleu si on ne le fait pas. Si on le fait, la plus petite valeur propre de la contribution totale est > 0.

Pour $\mu \sim 5$, et $\mu \sim 7$, le comportement de la plus petite valeur propre de la matrice paire σ^+ est similaire à ceux présentés dans les cas précédents et est fourni sur les Figures 11 et 12.

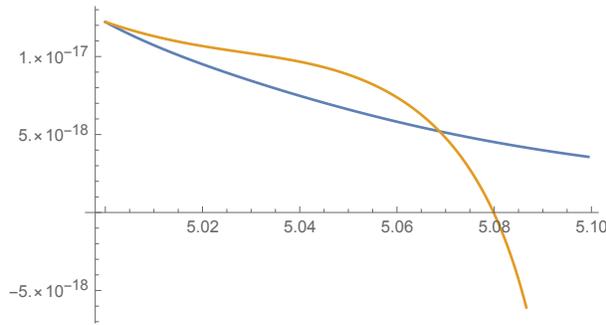


Figure 11: Aller au-delà de $\mu = 5$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre premier 5.

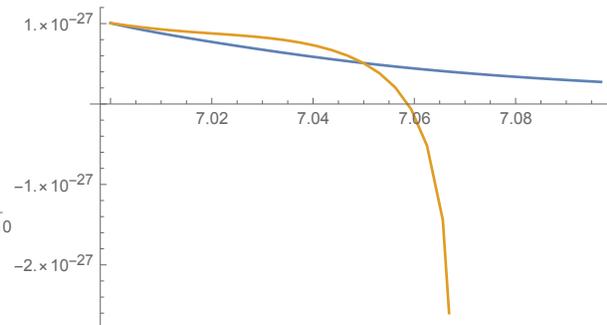


Figure 12: Aller au-delà de $\mu = 7$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre premier 7.

Les graphiques suivants montrent les changements de signes des plus petites valeurs propres pour les matrices impaires σ^- , et pour les mêmes choix de puissances de nombres premiers : notamment près de 2, 3, 4, 5 et 7.

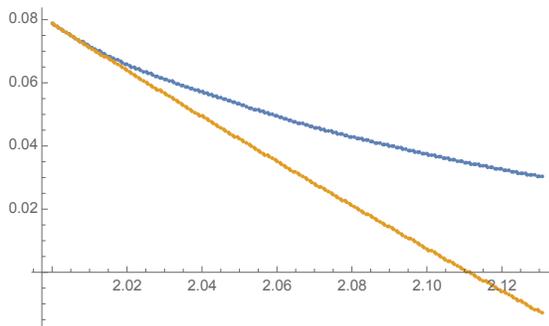


Figure 13: Cas impair. Aller au-delà de $\mu = 2$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre premier 2.

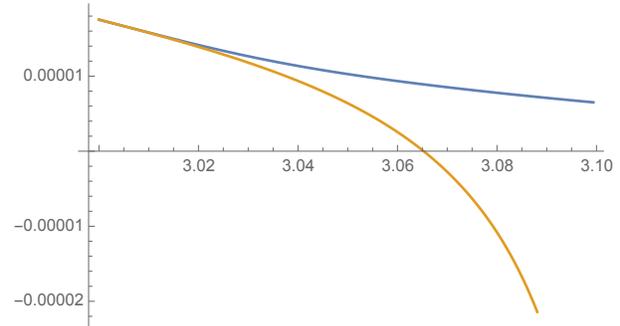


Figure 14: Cas impair. Aller au-delà de $\mu = 3$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre premier 3.

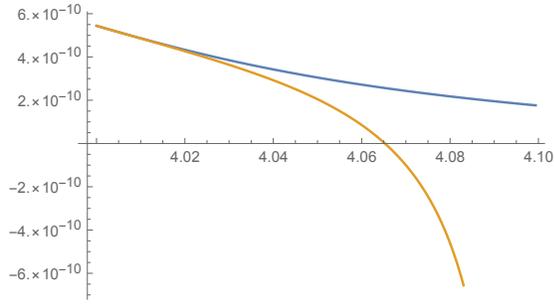


Figure 15: Cas impair. Aller au-delà de $\mu = 4$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre puissance de premier 4.

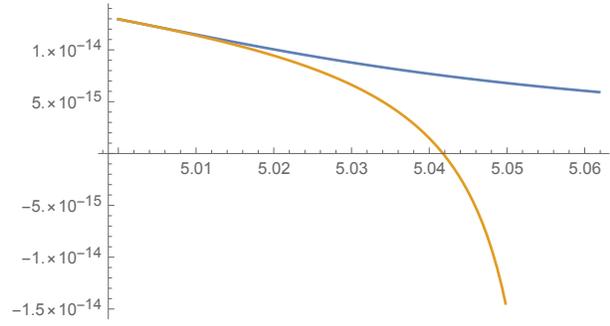


Figure 16: Cas impair. Aller au-delà de $\mu = 5$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre premier 5.

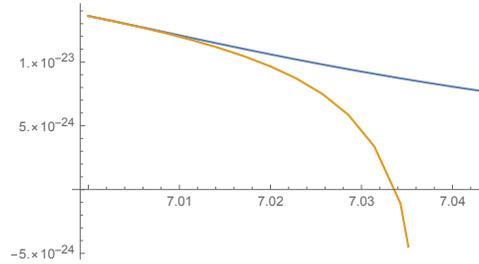


Figure 17: Cas impair. Aller au-delà de $\mu = 7$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre premier 7.

2.5 Forme quadratique semi-locale de Weil, petites valeurs propres

En poussant plus loin les calculs et en augmentant la précision, on obtient une estimation de la taille de la plus petite valeur propre $s(L)$ de la matrice paire, en fonction de $\mu = \exp L$. On trouve un comportement exponentiel, comme montré sur les Figures 18 et 19, où le $\log s(L)$ est représenté en fonction de $\mu = \exp L$.

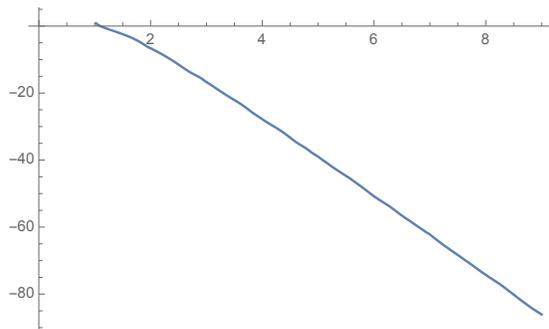


Figure 18: Décroissance du logarithme de la plus petite valeur propre de la matrice paire en fonction de $\mu = \exp L$.

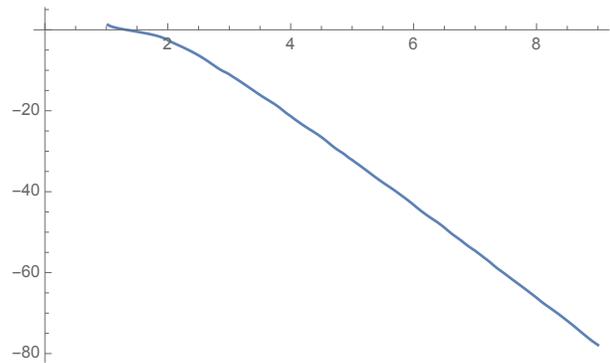


Figure 19: Décroissance du logarithme de la plus petite valeur propre de la matrice impaire en fonction de $\exp L$.

Quand on sélectionne les petites valeurs propres de la matrice paire σ^+ et qu'on représente graphiquement le logarithme de leur taille, on trouve (voir la Figure 20) que leur nombre croît grossièrement comme $\mu = \exp L$.

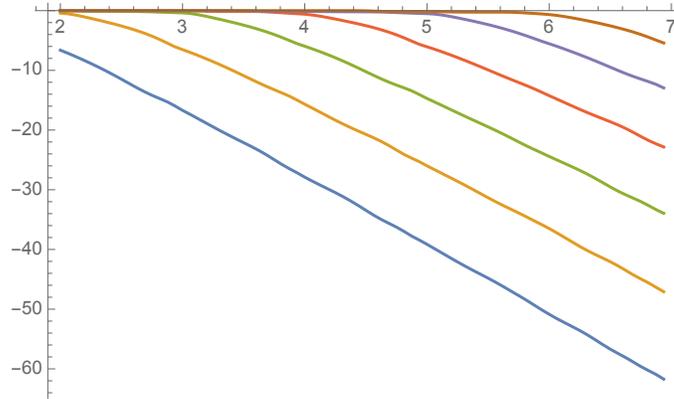


Figure 20: Décroissance du logarithme des plus petites valeurs propres de la matrice paire σ^+ en fonction de $\mu = \exp L$.

Pour la matrice impaire σ^- , le comportement est similaire mais avec une valeur propre plus petite, comme montré sur la Figure 21.

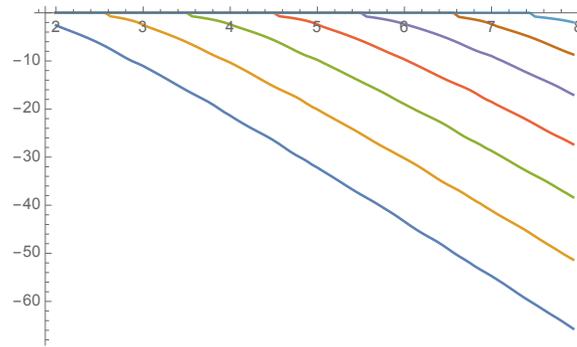


Figure 21: Décroissance du logarithme des plus petites valeurs propres de la matrice impaire σ^- en fonction de $\mu = \exp L$.

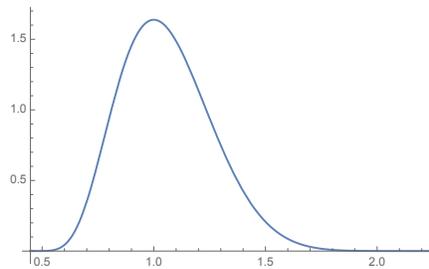


Figure 22: Vecteur propre pour la plus petite valeur propre de QW_λ^+ comme une fonction sur \mathbb{R}_+^* .

Les Figures 22, 23 et 24 montrent les courbes des vecteurs propres de la forme quadratique QW_λ^+ respectivement pour la plus petite, la seconde plus petite et la troisième plus petite valeurs propres.

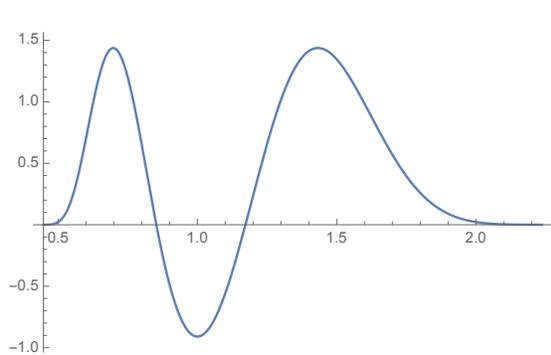


Figure 23: Vecteur propre pour la seconde plus petite valeur propre de QW_λ^+ comme fonction sur \mathbb{R}_+^* .

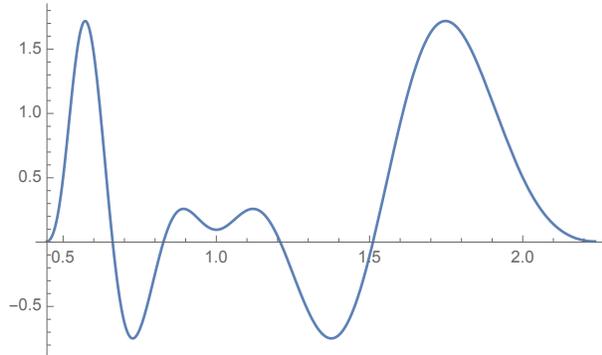


Figure 24: Vecteur propre pour la troisième plus petite valeur propre de QW_λ^+ comme fonction sur \mathbb{R}_+^* .

3 Fonctions propres et projection prolate $\Pi(\lambda, k)$

Dans cette section, nous expliquons l’existence de très petites valeurs propres de la forme quadratique de Weil QW_λ sur les fonctions de test à support dans un intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda] \subset \mathbb{R}_+^*$. Nous commençons par rappeler que si RH est vraie, alors la forme quadratique de Weil restreinte aux fonctions à support dans un intervalle fini n’a pas de racine, puisque le nombre $N(r)$ de zéros de module au plus r de la transformation de Fourier d’une fonction f à support compact est de l’ordre de $N(r) = O(r)$ (voir [8] § 15.20 (2)), tandis que si f appartient au radical de QW , elle devrait (en supposant RH) s’évanouir sur tous les zéros de la fonction zeta de Riemann dont le nombre croît plus vite que $O(r)$. D’un autre côté, le radical de QW contient le domaine de la fonction \mathcal{E} définie sur le sous-espace $\mathcal{S}_0^{\text{ev}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de codimension 2 des fonctions de Schwartz vérifiant $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$ par la formule ([3])

$$\mathcal{E}(f)(x) = x^{1/2} \sum_{n>0} f(nx). \quad (3.1)$$

Il est donc naturel d’utiliser (3.1) pour construire les fonctions g avec support dans $[\lambda^{-1}, \lambda] \subset \mathbb{R}_+^*$ qui appartiennent au “radical proche” de QW_λ *i.e.* vérifient $QW_\lambda(g) \ll \|g\|^2$. La définition de \mathcal{E} montre que si le support de la fonction paire $f \in \mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ est contenu dans l’intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$, alors le support de $\mathcal{E}(f)$ est contenu dans $(0, \lambda] \subset \mathbb{R}_+^*$. D’un autre côté, en appliquant la formule de Poisson (avec \widehat{f} la transformation de f), on a

$$\mathcal{E}(\widehat{f})(x) = \mathcal{E}(f)(x^{-1}), \quad \forall f \in \mathcal{S}_0^{\text{ev}}. \quad (3.2)$$

Ainsi, nous voyons que λ^{-1} serait une borne inférieure du support de $\mathcal{E}(f)$ si le support de la fonction paire $\widehat{f} \in \mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ était contenu dans l’intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$. Pourtant, cette dernière inclusion est impossible puisque la transformation de Fourier d’une fonction à support compact est analytique. Malgré cet obstacle apparent dans la construction, le travail de Slepian et Pollack sur les fonctions à bande limitée [11] fournit une solution approximative très utile. La manière conceptuelle de formuler ce résultat consiste à utiliser la paire de projections \mathcal{P}_λ et $\widehat{\mathcal{P}}_\lambda$ dans l’espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})^{\text{ev}}$ des fonctions paires de carré intégrable. L’opérateur \mathcal{P}_λ est la multiplication par la fonction caractéristique de l’intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$, et la projection $\widehat{\mathcal{P}}_\lambda$ est son conjugué par la transformation de Fourier (additive) $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$. Ces deux projections n’ont pas d’intersection mais leur “angle” – un opérateur avec spectre discret – admet approximativement $2\lambda^2$ très petites valeurs propres dont les fonctions propres associées fournissent d’excellentes candidates pour l’“intersection approximative” $\mathcal{P}_\lambda \cap' \widehat{\mathcal{P}}_\lambda$. Dans leur travail sur la transmission du signal, Slepian et Pollack ont découvert que ces fonctions propres sont exactement les fonctions d’ondes sphéroïdales prolates qui étaient déjà bien connues comme étant solutions (par séparation des variables) de l’équation de Helmholtz pour les sphéroïdes prolates.

Le résultat de base de Slepian et Pollack est la diagonalisation de l'opérateur positif $\mathcal{P}_\lambda \widehat{\mathcal{P}}_\lambda \mathcal{P}_\lambda$ dans l'espace de Hilbert $L^2([-\lambda, \lambda])$. Ils montrent que cet opérateur commute avec l'opérateur de différentiation

$$(\mathbf{W}_\lambda \psi)(q) = -\partial((\lambda^2 - q^2)\partial) \psi(q) + (2\pi\lambda q)^2 \psi(q) \quad (3.3)$$

(ici ∂ est l'opérateur de différentiation ordinaire en une variable $q \in [-\lambda, \lambda]$ et le domaine dense est celui des fonctions lisses sur $[-\lambda, \lambda]$). L'opérateur \mathbf{W}_λ (obtenu en fermant son domaine selon la norme du graphe) est auto-adjoint et positif et ses fonctions propres sont les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates. Quand nous considérerons la forme quadratique de Weil QW_λ évaluée sur les fonctions de test avec support dans $[\lambda^{-1}, \lambda]$, nous comparerons les vecteurs propres associés aux valeurs propres extrêmement petites avec le domaine de la fonction \mathcal{E} appliquée aux combinaisons linéaires des fonctions propres ψ de \mathbf{W}_λ qui appartient à l'intersection approximative $\mathcal{P}_\lambda \cap \widehat{\mathcal{P}}_\lambda$ et qui s'évanouit en zéro. Pour ce processus, nous ne prenons que les fonctions propres ψ qui sont des fonctions paires de la variable q , et nous distinguons deux cas puisque l'action de la transformation de Fourier vérifie $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} \psi \simeq \pm \psi$ sur les fonctions propres ψ de \mathbf{W}_λ . Le signe correspondant \pm détermine précisément le choix d'un vecteur propre pour la matrice paire ou impaire. Selon une notation standard, on pose

$$\psi_{m,\lambda}(x) := PS_{2m,0} \left(2\pi\lambda^2, \frac{x}{\lambda} \right)$$

où $\psi_{m,\lambda}$ est une fonction sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$ qu'on étend par 0 en dehors de cet intervalle. Sa transformée de Fourier $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(\psi_{m,\lambda})$ est égale à $\chi_m \psi_{m,\lambda}$ sur $[-\lambda, \lambda]$, où le scalaire χ_m est très proche de $(-1)^m$ en supposant que m est inférieure à $2\lambda^2$. Plus précisément, $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(\psi_{m,\lambda})$ est calculé en utilisant l'égalité

$$\int_{-1}^1 PS_{2m,0}(\gamma, \eta) \exp(i\gamma\eta\omega) d\eta = (-1)^m 2S_{2m,0}^{(1)}(\gamma, 1) PS_{2m,0}(\gamma, \omega)$$

pour $\gamma = 2\pi\lambda^2$, $\omega = \frac{y}{\lambda}$. Après avoir changé les variables $\xi = \lambda\eta$, l'égalité ci-dessus devient

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \psi_{m,\lambda}(\xi) \exp(i2\pi\xi y) d\xi = (-1)^m 2\lambda S_{2m,0}^{(1)}(2\pi\lambda^2, 1) \psi_{m,\lambda}(y).$$

Etant donné $\mu = \lambda^2$, on retient uniquement les valeurs de m pour lesquelles la valeur caractéristique $\chi(\mu, m) = 2\lambda S_{2m,0}^{(1)}(2\pi\mu, 1)$ est presque égale à 1. Cela détermine une collection $\{0, \dots, \nu(\mu)\}$ de longueur approximativement égale à 2μ , telle que $\chi(\mu, m) \sim 1$ pour $m \leq \nu(\mu)$. La formule $\nu(\mu) = 2\mu - 1$ marche bien quand μ est un petit demi-entier.

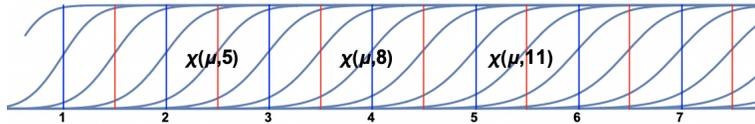


Figure 25: Graphiques des fonctions $\chi(\mu, m)$ comme fonctions de μ

Dans le but de définir la projection prolata, nous considérons les combinaisons linéaires des fonctions prolates qui s'évanouissent en 0 et sont données, pour $n > 0$, par

$$\phi_{2n}(x) := \psi_{2n}(x)\psi_0(0) - \psi_0(x)\psi_{2n}(0), \quad \phi_{2n+1}(x) := \psi_{2n+1}(x)\psi_1(0) - \psi_1(x)\psi_{2n+1}(0).$$

Pour $1 < n \leq \nu(\mu)$, on peut approximer $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(\phi_n)$ par $(-1)^n \phi_n$ et, en utilisant la formule de Poisson, agir comme si $\mathcal{E}(\phi_n)$ vérifiait l'égalité $\mathcal{E}(\phi_n)(u^{-1}) = (-1)^n \mathcal{E}(\phi_n)(u)$. Nous pouvons alors calculer les composants de $\mathcal{E}(\phi_n)$ dans la base orthogonale $\eta_j(u) = \xi_j(\log u)$ de $\mathcal{H} = L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*x)$ (Lemme 2.6) qui vérifie $\eta_j(u^{-1}) = -\eta_j(u)$ pour $j < 0$ et $\eta_j(u^{-1}) = \eta_j(u)$ pour $j \geq 0$. Pour $1 < n \leq \nu(\mu)$, le composant

de $\mathcal{E}(\phi_n)$ sur η_j est non-nul seulement si η_j a la même parité que n , *i.e.* vérifie $\eta_j(u^{-1}) = (-1)^n \eta_j(u)$, et dans ce cas, est donné par la formule,

$$\mathcal{E}(\phi_n)_j \simeq 2 \sum_{1 \leq r < \lambda} \int_1^{\lambda/r} u^{1/2} \phi_n(ru) \eta_j(u) d^*u. \quad (3.4)$$

On calcule toutes ces composantes pour $|j| \leq N$ avec N grand, et on applique le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (séparément pour les cas pair et impair) pour obtenir les vecteurs dans E_N . Ce processus détermine les vecteurs orthonormés $\epsilon_n \in E_N \subset \mathcal{H} = L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*x)$ pour $1 < n \leq \nu(\mu)$ qui sont, par construction, les fonctions candidates naturelles pour être comparées (au signe près) avec les fonctions propres de la forme quadratique semi-locale de Weil QW_λ sur E_N .

Définition 3.1. Soit $k < \nu(\lambda^2)$. On définit $\Pi(\lambda, k)$ comme la projection orthogonale sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs ϵ_n , pour $n \in \{2, \dots, k+1\}$.

Soit γ l'opérateur de mise à l'échelle dans $\mathcal{H} = L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*x)$ qui prend les valeurs ± 1 sur les fonctions satisfaisant l'égalité $f(u^{-1}) = \pm f(u)$. Par construction, les vecteurs ϵ_n sont les vecteurs propres de γ et la relation de commutativité ci-dessous est vérifiée

$$\gamma \Pi(\lambda, k) = \Pi(\lambda, k) \gamma, \quad \forall \lambda, k \quad (3.5)$$

La série de graphiques présentée ci-dessous montre la coïncidence des ϵ_n avec les fonctions propres effectives de la forme quadratique semi-locale de Weil QW_λ pour les plus petites valeurs propres. Quand une seule courbe apparaît (en jaune sur la courbe des ϵ), cela signifie que les deux fonctions coïncident avec une grande précision, sinon, la courbe bleue de la fonction propre n'est pas cachée sous la courbe jaune. Noter qu'on s'attend à la coïncidence de ϵ_{2m} avec la fonction propre de la matrice paire pour sa m -ième valeur propre seulement quand cette valeur propre est petite et par conséquent seulement lorsque $\mu > m$. De façon similaire, on s'attend à ce que ϵ_{2m+1} coïncide avec la fonction propre de la matrice impaire pour sa m -ième valeur propre seulement quand $\mu > m + 1$ (puisque le nombre de petites valeurs propres de la matrice impaire est inférieure de 1 à celui pour la matrice paire). Nous avons cependant visualisé les courbes pour toutes les valeurs demi-entières de μ comprises entre 3.5 et 11 pour montrer la non-concordance des courbes lorsque μ est trop petit.

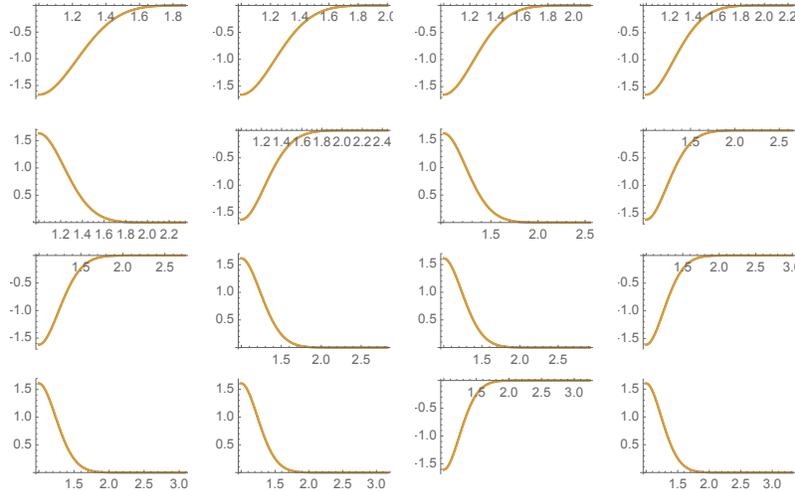


Figure 26: accord entre les fonctions propres de la matrice paire et la plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Pour $\mu = 11$, la valeur propre est 2.389×10^{-48} .

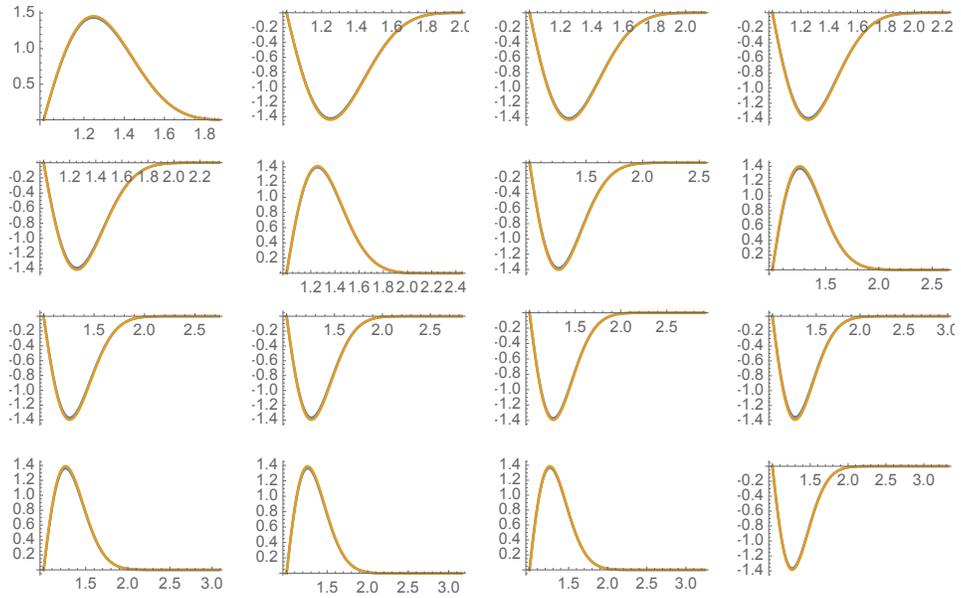


Figure 27: accord entre les fonctions propres de la matrice impaire et la plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11.

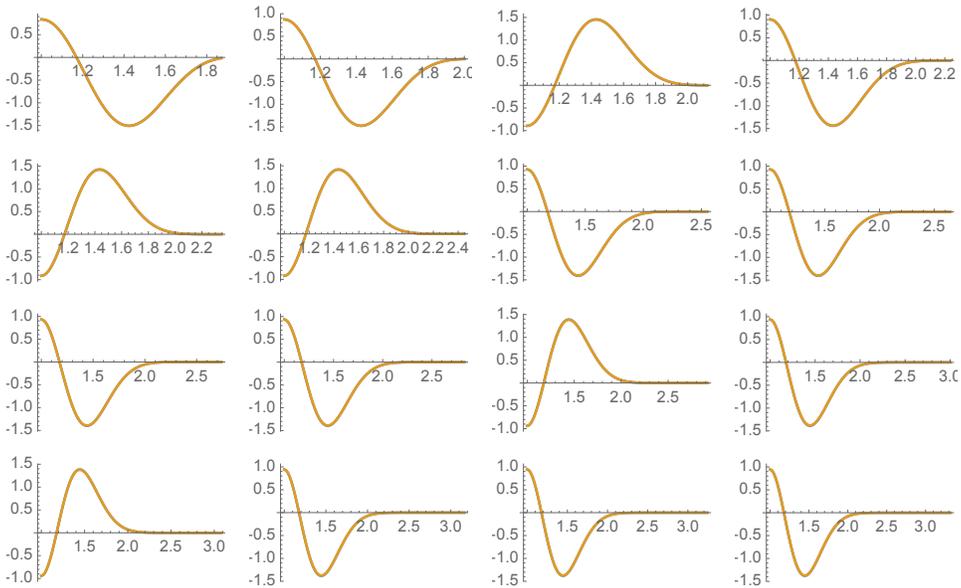


Figure 28: accord entre les fonctions propres de la matrice paire et la seconde plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11.

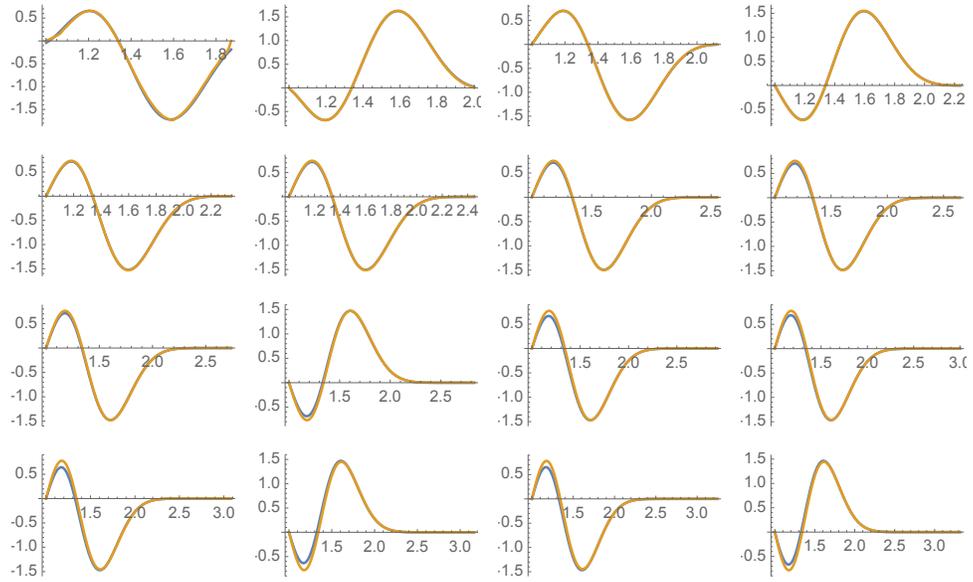


Figure 29: accord entre les fonctions propres de la matrice impaire et la seconde plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11.

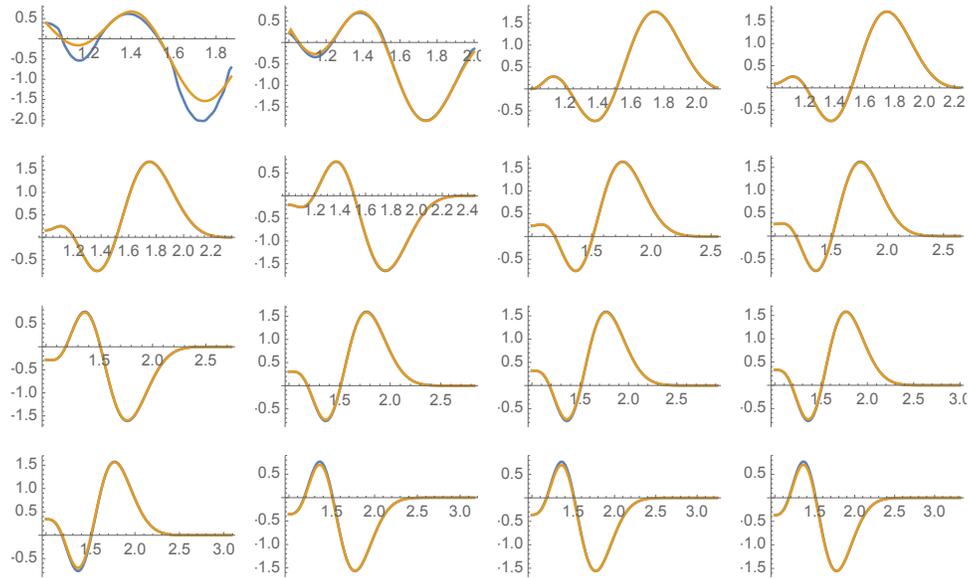


Figure 30: accord entre les fonctions propres de la matrice paire et la troisième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 4$.

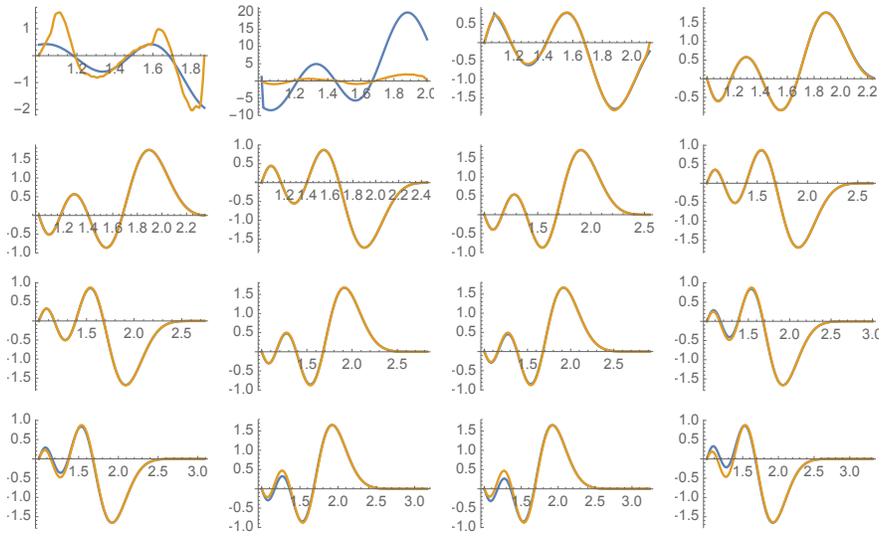


Figure 31: accord entre les fonctions propres de la matrice impaire et la troisième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 4.5$.

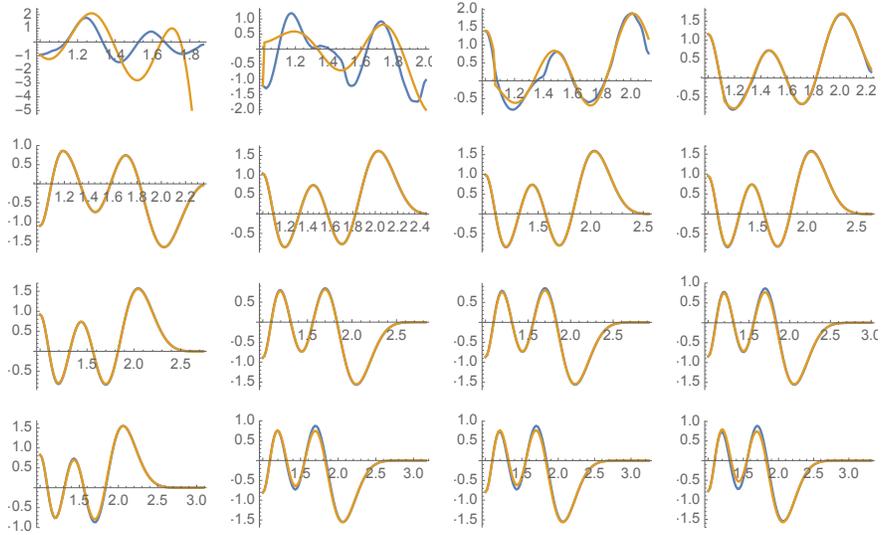


Figure 32: accord entre les fonctions propres de la matrice paire et la quatrième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 5$.

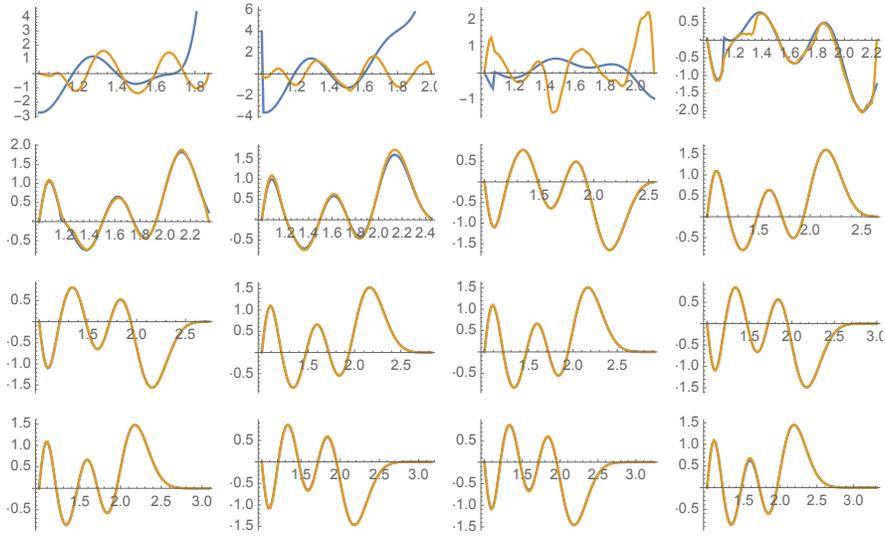


Figure 33: accord entre les fonctions propres de la matrice impaire et la quatrième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 5.5$.

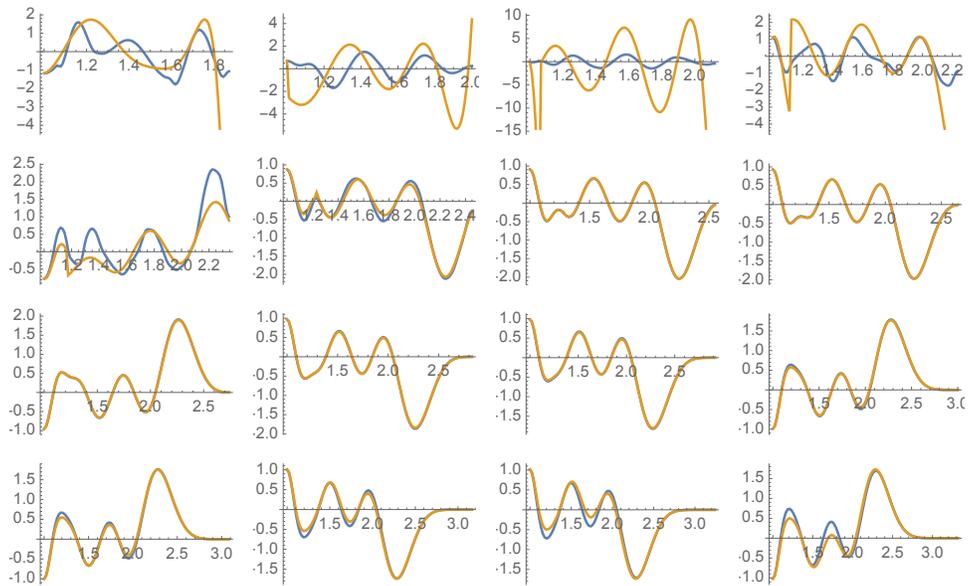


Figure 34: accord entre les fonctions propres de la matrice paire et la cinquième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 6$.

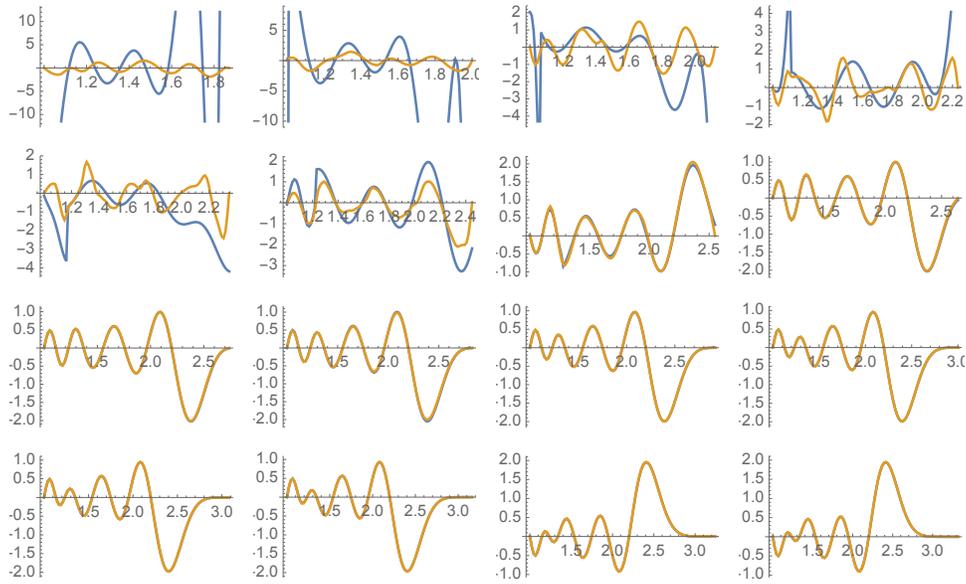


Figure 35: accord entre les fonctions propres de la matrice impaire et la cinquième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 6.5$.

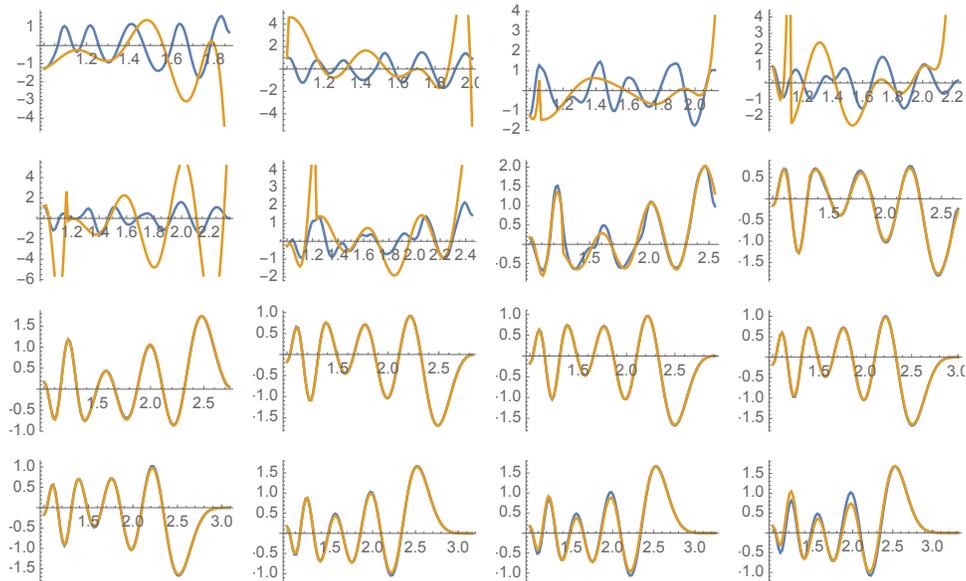


Figure 36: accord entre les fonctions propres de la matrice paire et la sixième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 7$.

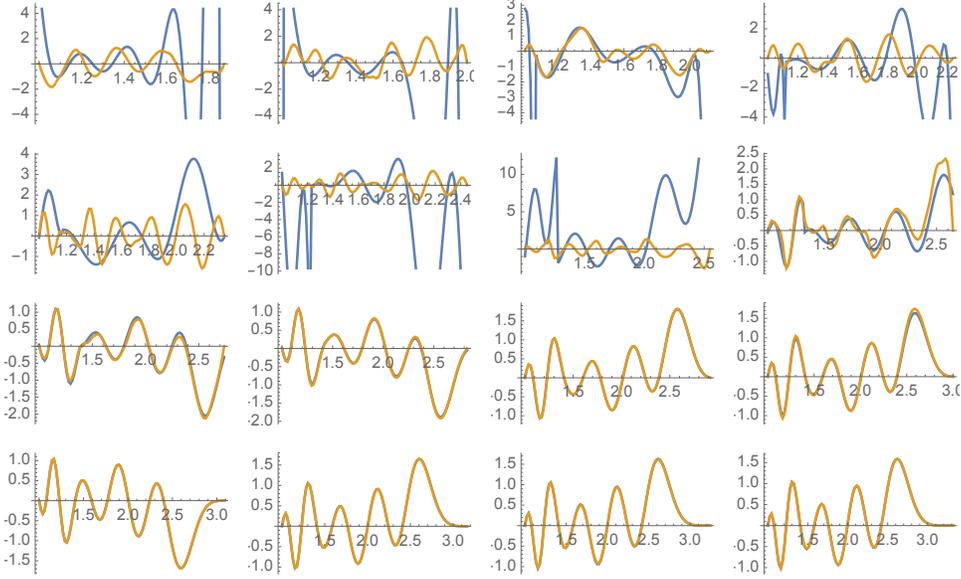


Figure 37: accord entre les fonctions propres de la matrice impaire et la sixième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 7.5$.

4 Triplet spectral $\Theta(\lambda, k) = (\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{H}(\lambda), D(\lambda, k))$

Le triplet spectral $\Theta(\lambda, k) = (\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{H}(\lambda), D(\lambda, k))$ décrit dans cette section, dont le spectre présente une similarité remarquable avec les premiers zéros de la fonction zeta de Riemann est défini à travers l'action par multiplication de l'algèbre des fonctions lisses $\mathcal{A}(\lambda) := C^\infty(\mathbb{R}_+^*/\lambda^{2\mathbb{Z}})$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(\lambda) := L^2(\mathbb{R}_+^*/\lambda^{2\mathbb{Z}}, d^*u)$. L'opérateur $D(\lambda, k)$ est défini par la formule suivante

$$D(\lambda, k) := (1 - \Pi(\lambda, k)) \circ D_0(\lambda) \circ (1 - \Pi(\lambda, k)), \quad D_0(\lambda) := (-iu\partial_u). \quad (4.1)$$

Ceci est une perturbation de rang fini de l'opérateur standard de Dirac $D_0(\lambda)$, puisque par construction le domaine de la projection prolate $\Pi(\lambda, k)$ est contenu dans le domaine de $D_0(\lambda)$, de sorte que l'on peut dériver

$$D(\lambda, k) = D_0(\lambda) - \Pi(\lambda, k)D_0(\lambda) - D_0(\lambda)\Pi(\lambda, k) + \Pi(\lambda, k)D_0(\lambda)\Pi(\lambda, k).$$

Proposition 4.1. *L'opérateur $D(\lambda, k)$, combiné avec l'action des fonctions périodiques par multiplication dans $L^2([-L/2, L/2])$ définit un triplet spectral.*

Pour comparer le spectre de $D(\lambda, k)$, pour k juste en-dessous de la borne supérieure $\nu(\lambda^2) \sim 2\lambda^2$ (discuté dans la section 3), avec les zéros de la fonction zeta de Riemann, on a besoin de sélectionner un domaine approprié de valeurs propres pour lesquelles la comparaison a du sens. Par construction, le nombre de valeurs propres de $D(\lambda, k)$ dans l'intervalle $[0, E]$ a le même comportement asymptotique que pour $D_0(\lambda)$, et ainsi diffère du comportement asymptotique du nombre $N(E)$ de zéros de la fonction zeta de partie imaginaire dans l'intervalle $[0, E]$, notamment

$$N(E) = \#\{\rho \mid \zeta(\rho) = 0, \text{ and } 0 < \Im(\rho) \leq E\}. \quad (4.2)$$

Ce nombre est la somme de deux contributions: $N(E) = \langle N(E) \rangle + N_{\text{osc}}(E)$. Le terme oscillant $N_{\text{osc}}(E)$ est de l'ordre de $\log E$ et, ce qui est plus important dans ce contexte, on sait que

$$\langle N(E) \rangle = \frac{E}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi} - \frac{E}{2\pi}. \quad (4.3)$$

Quand on considère l'opérateur $D(\lambda, k)$, avec k plus petit et proche de la borne supérieure $\nu(\lambda^2)$, on pose $\mu = \lambda^2$ et on obtient la

Proposition 4.2. *Pour $E = 2\pi\mu$, le nombre $N'(E)$ de valeurs propres non-nulles de l'opérateur $D(\lambda, k)$ dans l'intervalle $(0, E]$ vérifie $N'(E) \sim \langle N(E) \rangle$.*

4.1 Exemples $\mu = 5.5, 6.5, 7.5, 8.5, 9.5$

Dans cette partie, nous rapportons des résultats numériques montrant la proche ressemblance entre le spectre de $D(\lambda, k)$ et les premiers zéros de la fonction zeta de Riemann, pour des exemples de petites valeurs de μ .

4.1.1 $\mu = 5.5$

Pour $\mu = 5.5$, les valeurs propres cosinusoidales sont extrêmement proches de 1 quand $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et données pour les valeurs suivantes de n dans la table ci-dessous :

n	$\chi(5.5, n)$
5	0.99999999999647719857
6	0.99999999894391115741
7	0.99999980631702676769
8	0.99997809227622865324
9	0.99852183576050441685
10	0.95065832620623051607
11	0.57197061534624863399
12	0.139174533954574303539

Ainsi on déduit que $\nu(5.5) = 10$, puisque la prochaine valeur propre 0.5719706153 est loin de 1. On a $2\pi 5.5 \sim 34.5575$. La table suivante compare les valeurs propres positives $\lambda_j = \lambda_j(D(\lambda, k))$ de $D(\lambda, k)$ (notées dans la colonne de gauche) avec les parties imaginaires ζ_j des premiers zéros de la fonction zeta de Riemann (en colonne de droite).

λ_j	ζ_j
14.781	14.1347
21.701	21.022
25.547	25.0109
29.345	30.4249
33.168	32.9351

La visualisation spectrale est montrée dans la Figure 38, avec les zéros de zeta en bas.

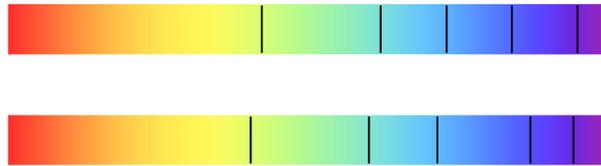


Figure 38: Les 5 premières valeurs propres non-nulles pour le Dirac dans la ligne supérieure et parties imaginaires des zéros de zeta dans la ligne inférieure.

4.1.2 $\mu = 6.5$

Pour $\mu = 6.5$, les valeurs propres cosinusoidales $\chi(6.5, n)$ sont extrêmement proches de 1 quand $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; pour $7 \leq n \leq 14$ les valeurs sont reportées dans la table suivante :

n	$\chi(6.5, n)$
7	0.9999999998668315975
8	0.9999999731589077585
9	0.9999963978717981581
10	0.9999680893668767767
11	0.99821407841789989100
12	0.94788066237037484836
13	0.57534099083086049406
14	0.14710511279564130503

Ainsi on a $\nu(6.5) = 12$, puisque la prochaine valeur propre 0.5753409908 est loin de 1. On a $2\pi 6.5 \sim 40.8407$. Une fois encore, la table suivante reporte les valeurs propres $\lambda_j = \lambda_j(D(\lambda, k))$ comparées avec les parties imaginaires ζ_j des premiers zéros de la fonction zeta.

λ_j	ζ_j
13.936	14.1347
20.580	21.022
24.690	25.0109
30.194	30.4249
33.454	32.9351
36.826	37.5862
40.259	40.9187

La visualisation spectrale est montrée dans la Figure 39 avec les zéros de zeta dans la seconde ligne



Figure 39: Les 7 premières valeurs propres non-nulles pour le Dirac dans la ligne supérieure et les parties imaginaires des zéros de zeta dans la ligne inférieure.

4.1.3 $\mu = 7.5$

Les valeurs propres cosinusoidales $\chi(7.5, n)$ sont extrêmement proches de 1 pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, et alors données par

n	$\chi(7.5, n)$
9	0.9999999996397226733
10	0.9999999453062631606
11	0.99999941709770526957
12	0.99995709581648305854
13	0.99792322303841470726
14	0.94552083061302325507
15	0.57809629788957190907
16	0.15383636015962926720

Ainsi, on a $\nu(7.5) = 14$ puisque la prochaine valeur propre 0.5780962979 est loin de 1. On a $2\pi 7.5 \sim 47.1239$. La prochaine table compare les valeurs propres $\lambda_j = \lambda_j(D(\lambda, k))$ avec les parties imaginaires ζ_j

des premiers zéros de la fonction zeta.

λ_j	ζ_j
15.060	14.1347
21.683	21.022
24.948	25.0109
30.979	30.4249
33.243	32.9351
37.406	37.5862
40.514	40.9187
43.643	43.3271
46.658	48.0052

La visualisation spectrale est montrée sur la Figure 40, avec les zéros de zeta sur la seconde ligne.

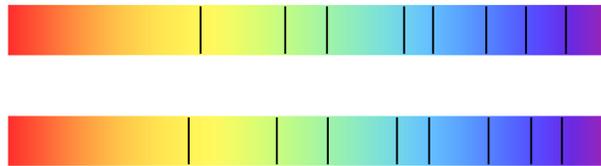


Figure 40: Les 9 premières valeurs propres non-nulles pour le Dirac dans la ligne supérieure et parties imaginaires des zéros de zeta dans la ligne inférieure.

4.1.4 $\mu = 8.5$

Les $\chi(8.5, n)$ sont extrêmement proches de 1 pour $n \leq 10$, et les suivants sont donnés par :

n	$\chi(8.5, n)$
11	0.9999999992101000288
12	0.99999999034148375362
13	0.99999913999089362040
14	0.99994536408530411219
15	0.99764801726717553636
16	0.94347292951033144975
17	0.58041289343441020661
18	0.15967051202562674536

Ainsi, on a $\nu(8.5) = 16$, (la prochaine valeur propre 0.5804128934 est loin de 1) et $2\pi 8.5 \sim 53.4071$. La table suivante fournit les valeurs propres $\lambda_j = \lambda_j(D(\lambda, k))$ comparées aux parties imaginaires ζ_j des premiers zéros de la fonction zeta de Riemann.

λ_j	ζ_j
14.887	14.1347
20.778	21.022
25.535	25.0109
29.928	30.4249
32.473	32.9351
37.965	37.5862
41.088	40.9187
43.741	43.3271
46.685	48.0052
49.910	49.7738
52.845	52.9703

La visualisation spectrale est fournie sur la Figure 41, avec les zéros de zeta dans la seconde ligne.

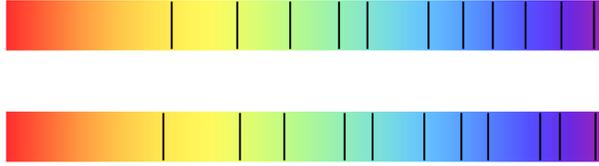


Figure 41: Les 11 premières valeurs propres non-nulles pour le Dirac sont sur la ligne supérieure et les parties imaginaires des zéros de zeta sont sur la ligne inférieure.

4.1.5 $\mu = 9.5$

Pour $\mu = 9.5$, les valeurs propres cosinusoidales $\chi(9.5, n)$ sont extrêmement proches de 1 quand $0 \leq n \leq 12$, et pour $13 \leq n \leq 20$, elles sont fournies dans la table :

n	$\chi(9.5, n)$
13	0.99999999984990646525
14	0.99999998455736228573
15	0.99999881131048713492
16	0.99993308190344158164
17	0.99738707752987412262
18	0.94166650390462098514
19	0.58240244869697875785
20	0.16480962032526478957

Ainsi, on a $\nu(9.5) = 18$, puisque la prochaine valeur propre 0.5824024487 est loin de 1. On a $2\pi 9.5 \sim 59.6903$ et la table suivante fournit les valeurs propres $\lambda_j = \lambda_j(D(\lambda, k))$ comparées aux parties imaginaires ζ_j des premiers zéros de la fonction zeta.

λ_j	ζ_j
13.998	14.1347
21.501	21.022
25.121	25.0109
30.689	30.4249
33.583	32.9351
37.813	37.5862
41.272	40.9187
43.050	43.3271
47.319	48.0052
50.190	49.7738
53.026	52.9703
55.731	56.4462
58.581	59.347

La visualisation spectrale est montrée dans la Figure 42, avec les zéros de zeta sur la seconde ligne.

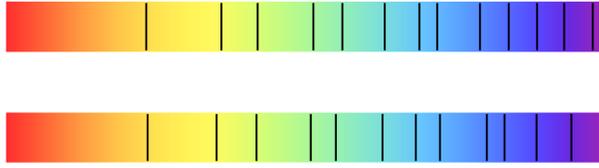


Figure 42: Les 13 premières valeurs propres non-nulles pour le Dirac dans la ligne supérieure et les parties imaginaires des zéros de zeta dans la ligne inférieure.

4.1.6 $\mu = 10.5$

Pour $\mu = 10.5$, les valeurs propres cosinusoidales $\chi(10.5, n)$ sont extrêmement proches de 1 quand $0 \leq n \leq 14$, et pour $15 \leq n \leq 22$, elles sont fournies dans la table :

n	$\chi(10.5, n)$
15	0.99999999974270022369
16	0.99999997703659571104
17	0.99999843436641476606
18	0.99992039045021729410
19	0.99713907784499135361
20	0.94005235637340584775
21	0.58413979804862029634
22	0.16939519615152177689

Ainsi, on a $\nu(10.5) = 20$, puisque la prochaine valeur propre 0.5841397980 est loin de 1. On a également $2\pi 10.5 \sim 65.9734$. La table des valeurs propres (colonne de gauche) comparée aux premiers zéros (colonne de droite) est :

λ_j	ζ_j
14.450	14.1347
21.455	21.022
25.356	25.0109
30.345	30.4249
32.600	32.9351
37.410	37.5862
40.387	40.9187
42.895	43.3271
48.095	48.0052
50.346	49.7738
53.272	52.9703
56.050	56.4462
58.737	59.347
61.386	60.8318
63.949	65.1125

La visualisation spectrale est montrée sur la Figure 43, avec les zéros de zeta sur la seconde ligne.

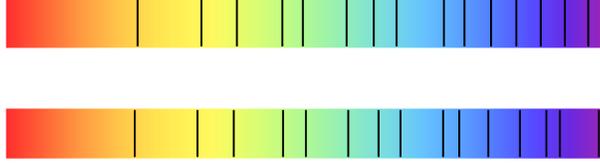


Figure 43: Les 15 premières valeurs propres non-nulles pour le Dirac dans la ligne supérieure et les parties imaginaires des zéros de zeta dans la ligne inférieure.

4.2 Divergence moyenne

Pour une comparaison objective des $N'(2\pi\mu)$ valeurs propres λ_j dont la valeur peut aller jusqu'à $2\pi\mu$, avec les parties imaginaires ζ_j des zéros de la fonction zeta de Riemann, on a à disposition les trois mesures possibles pour la divergence :

1. Erreur moyenne absolue:

$$A(\mu) := \frac{1}{N'(2\pi\mu)} \sum |\lambda_j - \zeta_j|$$

Quand on calcule cette erreur pour les valeurs de μ utilisées dans les pages précédentes, cela fournit la liste de valeurs suivantes :

$$A(5.5) = 0.635176, \quad A(6.5) = 0.44693, \quad A(7.5) = 0.528827,$$

$$A(8.5) = 0.456739, \quad A(9.5) = 0.395068$$

2. Racine carrée de la moyenne des carrés des déviations.

$$R(\mu) := \sqrt{\frac{1}{N'(2\pi\mu)} \sum (\lambda_j - \zeta_j)^2}$$

Cela donne la liste suivante de valeurs :

$$R(5.5) = 0.691088, \quad R(6.5) = 0.48858, \quad R(7.5) = 0.650648,$$

$$R(8.5) = 0.562489, \quad R(9.5) = 0.459776$$

3. Déviation normalisée. Cette déviation s'obtient en divisant la déviation précédente par le diamètre du domaine des variables. Elle est invariante par transformations affines et est ainsi une bonne mesure de la divergence, habituellement exprimée par un pourcentage. Le diamètre du domaine des variables est ici égal à $2\pi\mu - 14$, et cela donne la liste :

$$NR(5.5) = 0.0375848, \quad NR(6.5) = 0.0185609, \quad NR(7.5) = 0.0205914,$$

$$NR(8.5) = 0.0148189, \quad NR(9.5) = 0.0103126, \quad NR(10.5) = 0.00995148$$

Ces nombres montrent que la déviation normalisée s'améliore régulièrement et atteint 1% (un pourcent) pour $\mu = 9.5$ et alors tombe à moins de un pourcent pour $\mu = 10.5$.

5 Zéros de zeta à partir des valeurs propres des triplets spectraux

Dans la section précédente, on a exploré les petites valeurs propres des triplets spectraux $\Theta(\lambda, k) = (\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{H}(\lambda), D(\lambda, k))$ pour $k = 2\ell$ un nombre pair aussi proche que possible de la borne $\nu(\lambda^2) \sim 2\lambda^2$ de

l'intervalle admis. Ces résultats numériques montrent à l'évidence une profonde relation entre les valeurs basses du spectre $\lambda_n(D(\lambda, k))$ de ces triplets spectraux et les premiers zéros de la fonction zeta de Riemann. La dépendance des paramètres (λ, k) , et la différence entre la croissance des valeurs propres et celle de zeta montrent que la relation est certainement plus subtile qu'une simple égalité entre les valeurs propres $\lambda_n(D(\lambda, k))$ et les parties imaginaires ζ_n des zéros.

La principale observation de cette section est que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a des valeurs spécifiques du paramètre λ pour lesquelles la dépendance de $\lambda_n(D(\lambda, k))$ à k disparaît. Pour ces valeurs spéciales de λ , la valeur commune des $\lambda_n(D(\lambda, k))$ coïncide avec la partie imaginaire ζ_n du n -ième zéro de la fonction zeta de Riemann. De plus, ces valeurs spécifiques de λ forment une progression géométrique dont le facteur d'échelle est l'exponentielle de π/ζ_n .

Cette observation a été d'abord testée expérimentalement et elle sera complètement justifiée conceptuellement dans la section 6.

Nous allons utiliser 4 critères différents pour détecter ces valeurs spécifiques de λ . Ce sont :

- la comparaison de $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell))$ et de $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell + 1))$ (§ 5.1) ;
- l'évolution de $\lambda_n(D(\lambda, k))$ comme une fonction de λ (§ 5.2) ;
- le critère de quantification $x^{2iy} = 1$ appliqué au point $(\lambda, \lambda_n(D(\lambda, k)))$ (§ 5.3) ;
- la distance qui empêche le vecteur propre $\xi_n(D(\lambda, k))$ pour $D(\lambda, k)$ d'être un vecteur propre de $D_0(\lambda)$.

Les tests numériques de ces critères montrent leur accord, mais la précision devient plus fine quand on applique le dernier critère. En appliquant la dernière méthode pour le petit intervalle de λ dans l'intervalle $(2, 4)$, on obtient l'accord avec les 31 premiers zéros ζ_n ($n \leq 31$) de zeta avec une précision suffisante pour évaluer la probabilité d'une coïncidence fortuite 10^{-50} .

5.1 Le critère $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell)) \sim \lambda_n(D(\lambda, 2\ell + 1))$

La première étape dans le but de détecter les valeurs spécifiques de λ est de voir ce qui se produit si l'on remplace $k = 2\ell$ par le nombre impair $k + 1 = 2\ell + 1$. On voit que les valeurs propres positives $\lambda_n(D(\lambda, *))$ décroissent et coïncident effectivement avec des valeurs spécifiques de λ . Nous expliquons d'abord brièvement pourquoi $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell)) \geq \lambda_n(D(\lambda, 2\ell + 1))$ et visualisons alors quelques résultats numériques montrant la coïncidence pour des valeurs spécifiques de λ .

Par construction, le noyau de $D(\lambda, k)$ contient le domaine de $\Pi(\lambda, k)$ et est ainsi au moins de dimension k . De plus, par (3.5), on a, pour la mise à l'échelle γ de $\mathcal{H}(\lambda)$,

$$\gamma D(\lambda, k) = -D(\lambda, k) \gamma \quad (5.1)$$

Le noyau de l'opérateur $D_0(\lambda)$ est de dimension un et est donné par la fonction constante 1_λ qui est paire (*i.e.* $\gamma(1_\lambda) = 1_\lambda$).

Cela entraîne que l'index mis à l'échelle de l'opérateur $D_0(\lambda)$ est égal à 1. Alors, par stabilité de l'index, il s'ensuit que l'index mis à l'échelle de l'opérateur $D(\lambda, k)$ est aussi égal à 1. Cela signifie que la signature de la restriction de γ au noyau de $D(\lambda, k)$ est 1 et par conséquent que la dimension de $\ker(D(\lambda, k))$ est un nombre impair.

Par conséquent, pour $k = 2\ell$ pair, il est naturel de s'attendre à ce que ce noyau soit de dimension $k + 1$. On est tenté de comparer les deux valeurs propres non-nulles $\lambda_n(D(\lambda, k))$ et $\lambda_n(D(\lambda, k + 1))$. Par construction, on a $\Pi(\lambda, k) < \Pi(\lambda, k + 1)$, et nous expliquons maintenant pourquoi les valeurs positives de ces opérateurs, arrangées en ordre croissant, vérifient l'inégalité

$$\lambda_n(D(\lambda, k + 1)) \leq \lambda_n(D(\lambda, k)), \quad \forall n, \lambda \quad (5.2)$$

Lemme 5.1. Soit A une matrice auto-adjointe de dimension N , et $E \subset \text{Ker}A$ un sous-espace de son noyau. Alors les valeurs propres positives $\mu_n(A)$ arrangées en ordre décroissant vérifient

$$\mu_n(A) = \max_{\substack{F \mid \dim F = n \\ F \perp E}} \min_{\substack{\xi \in F \\ \|\xi\|=1}} \langle \xi \mid A\xi \rangle \quad (5.3)$$

Proposition 5.2. Soit $D \in M_N(\mathbb{C})$ une matrice auto-adjointe.

(i) Soit $P \in M_N(\mathbb{C})$ une projection (idempotente auto-adjointe) et $Q = 1 - P$, $D_P := QDQ$. Alors les valeurs propres positives de D_P arrangées en ordre décroissant vérifient l'égalité

$$\mu_n(D_P) = \max_{\substack{F \mid \dim F = n \\ F \perp P}} \min_{\substack{\xi \in F \\ \|\xi\|=1}} \langle \xi \mid D\xi \rangle \quad (5.4)$$

(ii) Soient $P_j \in M_N(\mathbb{C})$ des projections telles que $P_1 \leq P_2$. Alors, avec les notations de (i) les valeurs propres positives de D_{P_j} vérifient l'inégalité

$$\mu_n(D_{P_2}) \leq \mu_n(D_{P_1}) \quad (5.5)$$

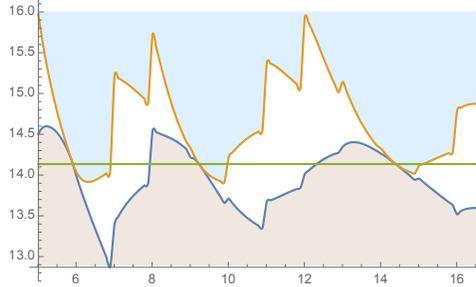


Figure 44: Pour la première valeur propre, le graphique inférieur est celui de $\lambda_1(D(\lambda, k+1))$ et le graphique supérieur est celui de $\lambda_1(D(\lambda, k))$. La ligne horizontale est la partie imaginaire du premier zéro de zeta.

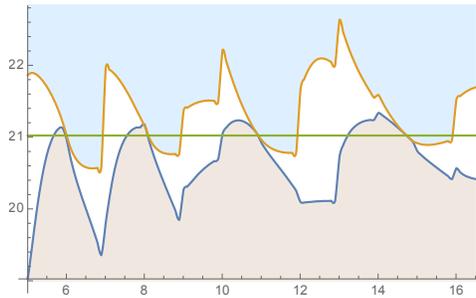


Figure 45: Pour la seconde valeur propre, le graphique inférieur est celui de $\lambda_2(D(\lambda, k+1))$ et le graphique supérieur est celui de $\lambda_2(D(\lambda, k))$. La ligne horizontale est la partie imaginaire du second zéro de zeta.

En appliquant le critère $\lambda_n(D(\lambda, k)) \sim \lambda_n(D(\lambda, k+1))$ pour déterminer les valeurs correspondant à $\mu \in I = [5, 16.5]$, *i.e.* en minimisant la différence $\lambda_n(D(\lambda, k)) - \lambda_n(D(\lambda, k+1))$ sur l'ensemble fini de $\mu \in \frac{1}{10}\mathbb{Z} \cap I$, on obtient la liste approximative des 31 premiers zéros de zeta montrés dans la Figure 46.

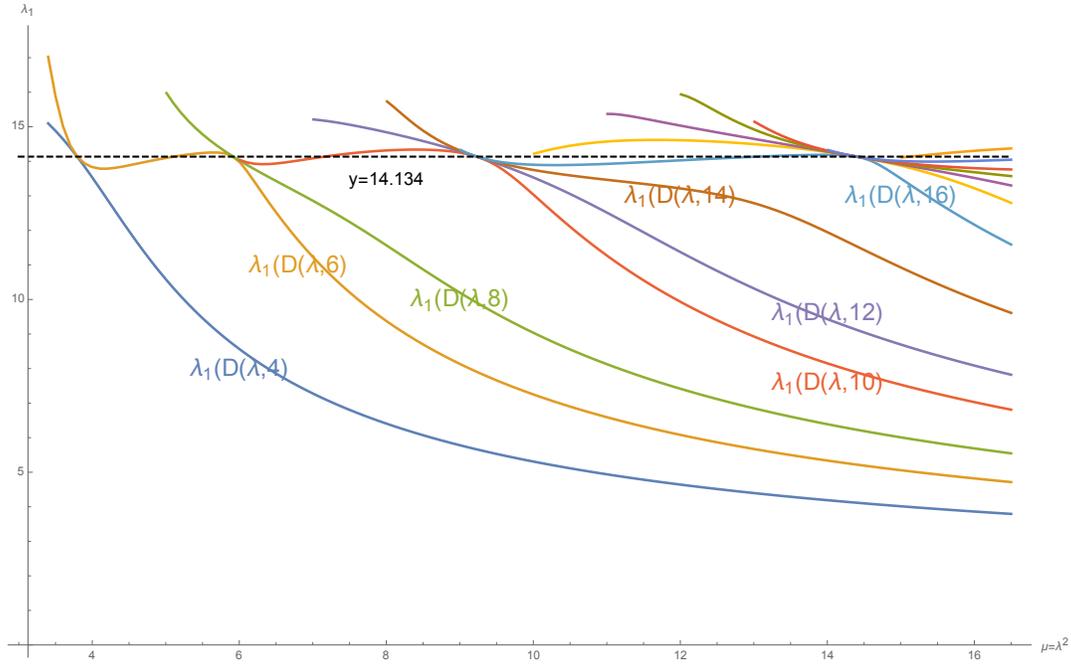


Figure 47: Evolution de la première valeur propre non-nulle de $D(\lambda, 2\ell)$. La ligne horizontale pointillée est la valeur de la partie imaginaire ζ_1 du premier zéro de zeta.

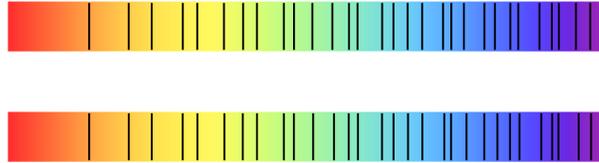


Figure 46: En utilisant le critère $\lambda_n(D(\lambda, k)) \sim \lambda_n(D(\lambda, k + 1))$.

5.2 Evolution continue des valeurs propres non-nulles pour un nombre fixé de conditions prolates

Quand on travaille avec les opérateurs $D(\lambda, k)$, avec k proche de la plus grande valeur autorisée $\nu(\lambda^2) \sim 2\lambda^2$, on introduit nécessairement une discontinuité due à la nature discrète de la variable k . Pour éviter cela, on peut, pour k fixé, considérer la dépendance des valeurs propres $\lambda_n(D(\lambda, k))$ tant que λ est suffisamment grand pour que $k < \nu(\lambda^2)$. On trouve que, pour les valeurs $\ell = 2, 3$, les $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell))$ coïncident aux alentours de $\mu \sim 3.8$ et que leur valeur commune est proche de ζ_1 . Ce fait est d'autant plus remarquable que quand $\mu < 4$ *i.e.* $\lambda < 2$, il n'y a pas de sommation impliquée dans l'équation (3.4). Pour $\ell = 3, 4, 5$, les $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell))$ coïncident aux alentours de $\mu \sim 5.95$ et à nouveau, nous trouvons que leur valeur est proche de ζ_1 . Pour $\ell = 5, 6, 7, 8$, les $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell))$ coïncident autour de $\mu \sim 9.2$ et à nouveau, leur valeur est proche de ζ_1 . Pour $\ell = 8, 9, 10, 11, 12, 13$, les $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell))$ coïncident aux alentours de $\mu \sim 14.4$ et leur valeur est proche de ζ_1 . Les valeurs spécifiques de μ auxquelles les courbes coïncident semblent former une progression géométrique. On trouve que le ratio de deux termes consécutifs est $\sim \exp(2\pi/\zeta_1)$ et, plus généralement, pour la n -ième valeur propre de μ elles forment une progression géométrique de ratio $\sim \exp(2\pi/\zeta_n)$ où ζ_n est la partie imaginaire du n -ième zéro de zeta. Ces faits "expérimentaux" seront expliqués théoriquement par le Théorème 6.4.

5.3 Quantification de la longueur $\log \mu$

Le fait que plusieurs courbes des valeurs propres $\lambda_n(D(\lambda, k))$ coïncident en des points spécifiques du plan suggère qu'on pourrait pousser la comparaison plus avant encore et comparer ces points avec le spectre de l'opérateur non perturbé $D_0(\lambda)$. En fonction des coordonnées (x, y) où $x = \mu = \lambda^2$ et $y = \lambda_n(D(\lambda, k))$, le spectre de $D_0(\lambda)$ est caractérisé par la condition de quantification $x^{iy} = 1$. Le sous-ensemble du plan défini par cette condition est l'union des graphiques des fonctions $2\pi n / \log x$.

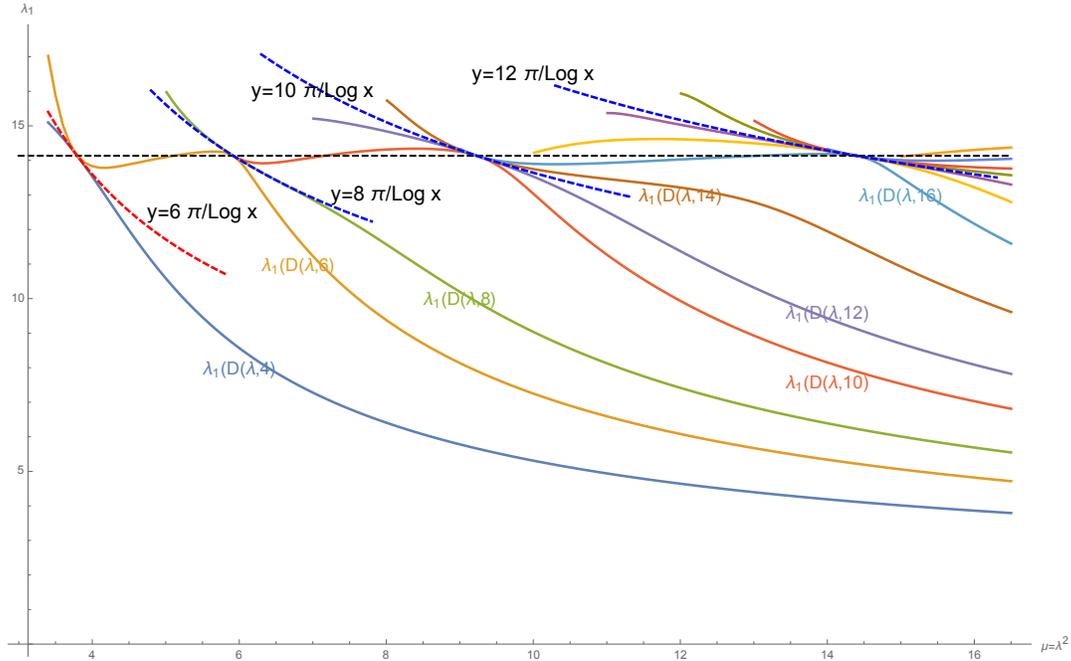


Figure 48: Coïncidence avec les solutions de $x^{iy} = 1$.

La Figure 48 montre une coïncidence parfaite entre les courbes et les points de rencontre des graphiques des valeurs propres. Indépendamment de ce résultat, on peut mesurer la distance séparant le point $(\mu, \lambda_n(D(\lambda, k)))$ du fait de vérifier la condition de quantification en l'écrivant sous la forme

$$\mu^{i\lambda_n(D(\lambda, k))} = 1 \iff |\mu^{i\lambda_n(D(\lambda, k))} - 1| = 0$$

et en dessinant les graphiques de ces fonctions pour chaque entier n . Ils sont montrés sur la Figure 49 pour $n = 1$ et sur la Figure 50 pour $n = 2$. Le fait-clé est que les valeurs de μ en lesquelles ces fonctions s'évanouissent coïncident avec les valeurs déterminées précédemment pour lesquelles on avait $\lambda_1(D(\lambda, k + 1)) \sim \lambda_1(D(\lambda, k))$ des Figures 44 et 45.

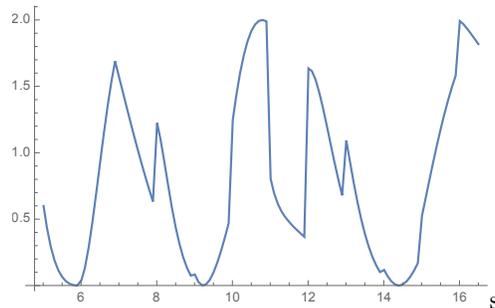


Figure 49: Graphe de $|\mu^{i\lambda_1(\mu)} - 1|$.

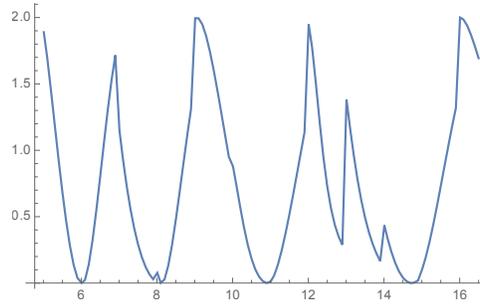


Figure 50: Graphe de $|\mu^{i\lambda_2(\mu)} - 1|$.

5.4 Le critère du vecteur propre commun pour $D(\lambda, k)$ et $D_0(\lambda)$

L'accord de la quantification avec les points de rencontre des courbes des valeurs propres suggère que tous les vecteurs propres des $D(\lambda, k)$ impliqués s'accordent les uns aux autres et sont en fait les vecteurs propres de l'opérateur non perturbé $D_0(\lambda)$. Cela donne un critère très fort obtenu en mesurant la distance dans l'espace de Hilbert d'un vecteur propre $\xi_n(D(\lambda, k))$ pour $D(\lambda, k)$ avec le vecteur propre de $D_0(\lambda)$ qui a le même nombre de rotation. Dans les Figures 51 et 52, la norme de la différence est visualisée et on obtient accord entre les zéros dont les valeurs ont été déterminées par les trois précédents critères. Finalement, la Figure 53 compare les 31 premières valeurs propres sélectionnées en utilisant le dernier critère avec les parties imaginaires des 31 premiers zéros de la fonction zeta de Riemann.

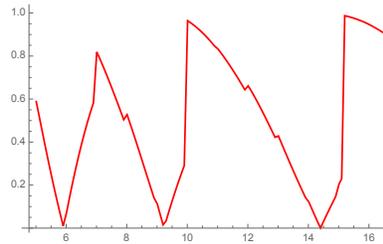


Figure 51: Distance du vecteur propre de $D(\lambda, k)$ pour λ_1 aux vecteurs propres de $D_0(\lambda)$.

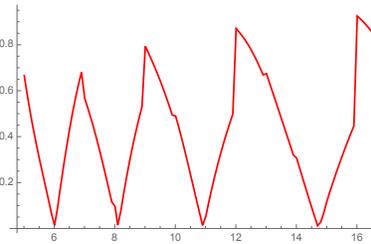


Figure 52: Distance du vecteur propre de $\xi_2(D(\lambda, k))$ aux vecteurs propres de $D_0(\lambda)$.

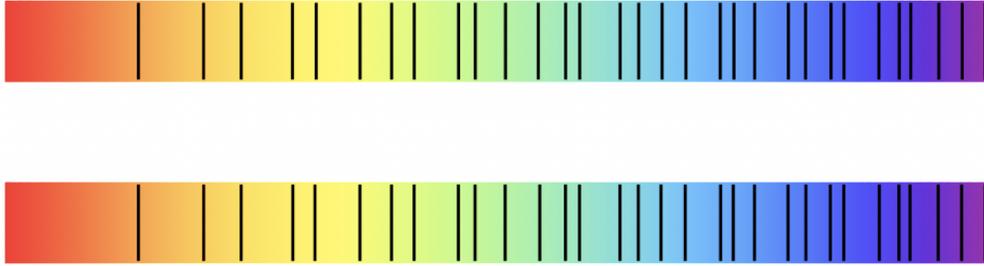


Figure 53: En utilisant le critère $\xi_n(D(\lambda, k))$ vecteur propre de $D_0(\lambda)$, on obtient les 31 valeurs propres ci-dessus à comparer aux parties imaginaires des 31 premiers zéros de la fonction zeta de Riemann.

6 ζ -cycles

Le but de cette section est de fournir une explication théorique pour les calculs numériques rapportés dans la section précédente, et en particulier de donner une justification théorique de la proche similarité entre les valeurs du spectre de l'opérateur $D(\lambda, k)$ dans le triplet spectral $\theta(\lambda, k)$ (voir la Section 4) et les premiers zéros de la fonction zeta de Riemann. Le but que nous poursuivrons ici sera de relier ces résultats numériques surprenants avec la réalisation spectrale des zéros de la fonction zeta de Riemann telle que présentée en [3]. Le nouveau concept qui émerge est celui de ζ -cycle C . Dans la prochaine partie, nous expliquons d'abord comment définir des sommes de Riemann invariantes par mise à l'échelle pour les fonctions définies sur $[0, \infty)$ dont l'intégrale s'évanouit. Cette technique est implémentée en définissant une fonction linéaire $\Sigma_\mu \mathcal{E} : \mathcal{S}_0^{\text{ev}} \rightarrow L^2(C)$ qui joue un rôle central dans le développement et qui entre dans la définition de la notion de ζ -cycle (Définition 6.1). Au § 6.2, nous prouvons que les ζ -cycles sont stables selon des recouvrements finis, et finalement, nous établissons et prouvons le principal résultat de cet article, qui est le théorème 6.4. Ce résultat sélectionne naturellement une famille d'espaces de Hilbert $\mathcal{H}(L) := \Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})^\perp$ qui sont associés aux zéros de la fonction zeta de Riemann qui sont sur la droite critique.

6.1 Sommes de Riemann invariantes par mise à l'échelle et fonction $\Sigma_\mu \mathcal{E}$

Soient $\mu > 1$ et Σ_μ la fonction linéaire définie sur les fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule suivante :

$$(\Sigma_\mu g)(u) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(\mu^k u). \quad (6.1)$$

Cette définition a du sens point par point sous la contrainte que g décroît suffisamment rapidement en 0 et en $l'∞$ dans \mathbb{R}_+^* . La fonction \mathcal{E} est définie comme suit :

$$(\mathcal{E}f)(u) := u^{1/2} \sum_{n>0} f(nu). \quad (6.2)$$

Elle est, par construction, proportionnelle à une somme de Riemann pour l'intégrale de f .

On dénote par $\mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ l'espace linéaire des fonctions de Schwartz paires à valeurs réelles $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0 = \int f(x)dx$. Le lemme suivant décrit le "bon comportement" de la fonction \mathcal{E} .

Lemme 6.1. *Soit f une fonction de variation bornée sur $(0, \infty)$, de décroissance rapide pour $u \rightarrow \infty$, $O(u^2)$ quand $u \rightarrow 0$, et telle que $\int_0^\infty f(t)dt = 0$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $\mathcal{E}(f)(u)$ est bien définie point par point, elle est $O(u^{1/2})$ quand $u \rightarrow 0$ et elle est de décroissance rapide pour $u \rightarrow \infty$.

(ii) La série (6.1) définissant $\Sigma_\mu \mathcal{E}(f)$ est géométriquement convergente, et elle définit une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}_+^*/\mu^{\mathbb{Z}}$.

L'action de mise à l'échelle de \mathbb{R}_+^* sur les fonctions est définie par $(\vartheta(\lambda)f)(x) := f(\lambda^{-1}x)$. Le lemme ci-dessous décrit le comportement de l'action de mise à l'échelle en relation avec la fonction \mathcal{E} .

Lemme 6.2.

(i) L'espace de Schwartz $\mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ est globalement invariant sous l'action de mise à l'échelle ϑ et si $\mu > 1$, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{E} \circ \lambda^{-1/2} \vartheta(\lambda) = \vartheta(\lambda) \circ \mathcal{E}, \quad \vartheta(\lambda) \Sigma_\mu = \Sigma_\mu \vartheta(\lambda) \tag{6.3}$$

(ii) L'action de mise à l'échelle ϑ induit une action du groupe multiplicatif $C_\mu = \mathbb{R}_+^*/\mu^{\mathbb{Z}}$ sur $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})$.

(iii) Soit f une fonction comme dans le lemme 6.1 qui coïncide au voisinage de 0 avec une fonction paire lisse, alors $\Sigma_\mu \mathcal{E}(f)$ appartient à la fermeture de $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})$ dans $L^2(C_\mu)$.

6.2 Zéros de zeta et ζ -cycles

Nous identifions un cercle de longueur $L = \log \mu > 0$ avec l'espace-quotient $C_\mu := \mathbb{R}_+^*/\mu^{\mathbb{Z}}$ vu comme un espace homogène sur le groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* . Cet espace est doté de la mesure d^*u associée à la mesure de Haar du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* . On obtient ainsi un fibré canonique des espaces \mathbb{R}_+^* -homogènes sur la base $(0, \infty)$.

On conserve les notations introduites dans la partie précédente.

Définition 6.1. Un ζ -cycle est un cercle C de longueur $L = \log \mu$ tel que le sous-espace $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})$ n'est pas dense dans l'espace de Hilbert $L^2(C)$.

Comme pour les géodésiques fermées, les ζ -cycles sont stables selon les recouvrements finis.

Proposition 6.3. Soit C un ζ -cycle de longueur $L = \log \mu$, alors pour tout entier positif $n > 0$, le recouvrement plié n -fois de C est un ζ -cycle.

Nous sommes maintenant prêts à énoncer et prouver notre résultat principal. La réalisation spectrale des zéros de la fonction zeta de Riemann de [3] admet la variante géométrique suivante :

Théorème 6.4.

(i) Soit C un ζ -cycle. Alors le spectre de l'action du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* sur le complément orthogonal de $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})$ dans $L^2(C)$ est constitué des parties imaginaires des zéros de zeta sur la droite critique.

Inversement :

(ii) Soit $s > 0$ tel que $\zeta(\frac{1}{2} + is) = 0$, alors tout cercle réel C de longueur un multiple entier de $2\pi/s$ est un ζ -cycle et son spectre, pour l'action de \mathbb{R}_+^* sur $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}}) \subset L^2(C)$, contient is .

Le développement ci-dessus nous fournit une famille d'espaces de Hilbert $\mathcal{H}(L) := \Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})^\perp \subset L^2(C)$ et, pour chaque entier $n > 0$, des fonctions $\pi_n^* : \mathcal{H}(L) \rightarrow \mathcal{H}(nL)$ qui font monter (lift) l'action de \mathbb{N}^\times sur $(0, \infty)$. De plus, on a également une action $\vartheta(\lambda)$ de \mathbb{R}_+^* sur $\mathcal{H}(L)$ et on a montré que les fonctions linéaires π_n^* sont équivariantes. Soit Z l'ensemble des parties imaginaires des zéros critiques de la fonction zeta, on déduit finalement le

Corollaire 2.4.

$$\mathcal{H}(L) \neq \{0\} \iff \exists s \in Z, n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } sL = 2\pi n. \tag{6.4}$$

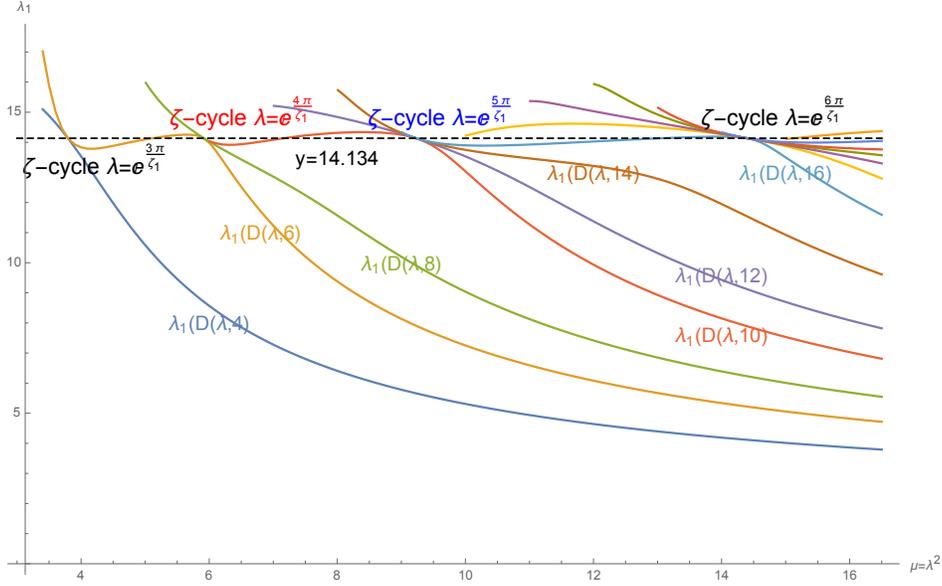


Figure 54: Exemple de ζ -cycles. Ils sont montrés ici pour la première valeur propre non-nulle $\lambda_1(D(\lambda, k))$. Les courbes se touchent les unes les autres en les points $P(k) = (\exp(\frac{2\pi k}{\zeta_1}), \zeta_1)$.

7 Perspectives

Dans cet article, nous avons dévoilé une nouvelle relation entre la géométrie non-commutative et la fonction zeta de Riemann en utilisant le concept de triplet spectral. Les relations précédentes sont :

- Le système de Bost-Connes est un système de mécanique quantique statistique avec brisure spontanée de symétrie qui admet la fonction zeta de Riemann comme fonction de partition.
- L'espace des classes d'adèles de \mathbb{Q} est un espace non-commutatif, dual du système de Bost-Connes et directement relié aux zéros des L -fonctions à Grossencharacter [3].
- Le calcul quantifié est un ingrédient-clé de la formule de trace semi-locale et il fournit une cause de la positivité de la forme quadratique de Weil [6].

Il s'avère que l'espace des classes d'adèles de \mathbb{Q} dans son incarnation dans la théorie des topos en tant que Site de mise à l'échelle (le topos $\mathcal{S} = [0, \infty) \times \mathbb{N}^\times$) est l'espace paramètre naturel pour les cercles de longueur L qui jouent un rôle essentiel dans le présent article. La Proposition 6.3 fournit la compatibilité des ζ -cycles avec l'action de \mathbb{N}^\times par multiplication sur le paramètre L . L'action de \mathbb{N}^\times provenant des recouvrements transforme $L^2(C)$ en un faisceau sur le Site de mise à l'échelle \mathcal{S} . La famille des sous-espaces $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0) \subset L^2(C)$ engendre un sous-faisceau de modules sur le faisceau des fonctions lisses et on est alors en droit de considérer la cohomologie du faisceau quotient sur \mathcal{S} . Dotée de la \mathbb{R}_+^* -équivariance, cette cohomologie fournit la réalisation spectrale des zéros de zeta sur la droite critique, en prenant garde, en particulier, aux multiplicités éventuelles. Nous discuterons de ce fait en détail dans un article à venir, qui, donnera notamment une application de la géométrie algébrique sur \mathbb{S} développée dans [4].

Finalement, la stabilité des ζ -cycles sous les recouvrements rappelle le comportement des géodésiques fermées dans une variété riemannienne, suggérant de rechercher un mystérieux "rebroussement" dont les géodésiques fermées correspondraient aux ζ -cycles.

Références

- [1] E. Bombieri, *The Riemann hypothesis*. The millennium prize problems, 107–124, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006.
- [2] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.
- [3] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*. *Selecta Math.* (N.S.) 5 (1999), no. 1, 29–106.
- [4] A. Connes, C. Consani, *On Absolute Algebraic Geometry, the affine case*, Preprint (2019).
<https://arxiv.org/abs/1909.09796>
- [5] A. Connes, C. Consani, *The Scaling Hamiltonian*, *J. Operator Theory*, 85 (1), pp. 257–276, 2019.
- [6] A. Connes, C. Consani, *Weil positivity and Trace formula, the archimedean place*, (2020).
<https://arxiv.org/abs/2006.13771>.
- [7] A. Connes, C. Consani, *Quasi-inner functions and local factors*, *Journal of Number Theory*, 226, pp. 139–167, 2021.
- [8] W. Rudin, *Real and Complex analysis*, Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
- [9] K. Schmudgen, *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*. Graduate Texts in Mathematics, 265. Springer, Dordrecht, 2012.
- [10] B. Simon, *Lower semi-continuity of positive quadratic forms*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 79, (1977), 267–273.
- [11] D. Slepian, H. Pollack, *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty*, The Bell System technical Journal (1961), 43–63.
- [12] D. Slepian, *Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions*, *J. Math. Phys.* Vol. 44 (1965), 99–140.
- [13] D. Slepian, *Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling*, *Siam Review*. Vol. 23 (1983), 379–393.
- [14] H. Yoshida, *On Hermitian forms attached to zeta functions*. *Zeta functions in geometry* (Tokyo, 1990), 281–325, *Adv. Stud. Pure Math.*, 21, Kinokuniya, Tokyo, 1992.