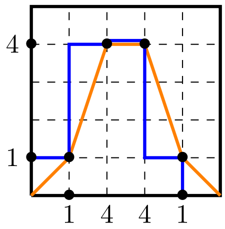
Nombres premiers et aires dans un carré (Denise Vella-Chemla, 20.5.2019)

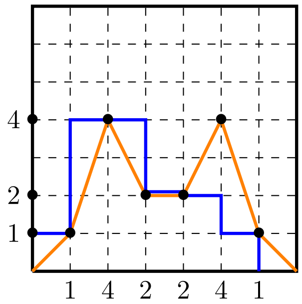
Dans les dessins ci-dessous, on représente sur un carré les résidus modulaires quadratiques de Gauss.

Résidus quadratiques modulo 5



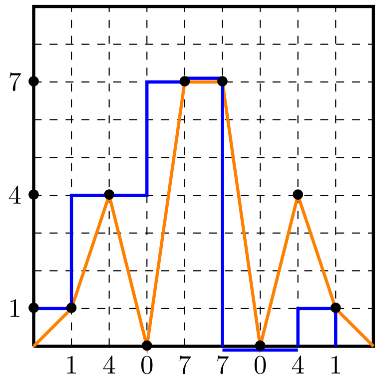
$$Aire = 10 = p\left(\frac{p-1}{2}\right)$$

Résidus quadratiques modulo 7



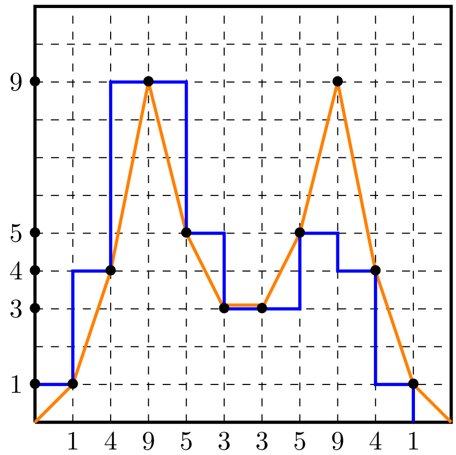
$$Aire = 14 = p\left(\frac{p-3}{2}\right)$$

Résidus quadratiques modulo 9



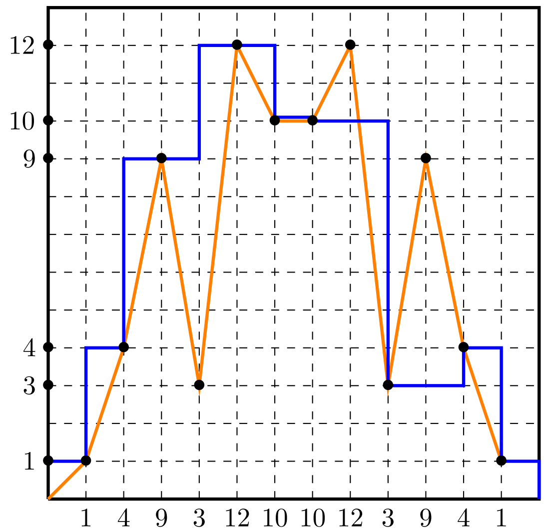
$$Aire = 24 < p\left(\frac{p-1}{2}\right)$$

Résidus quadratiques modulo 11



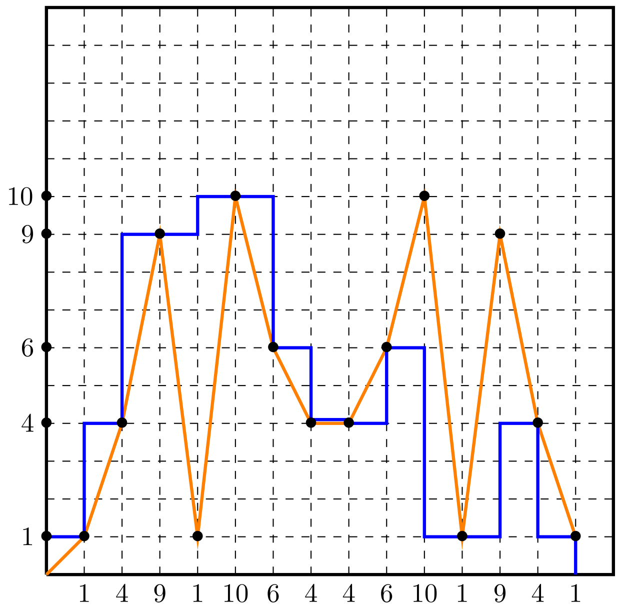
$$Aire = 44 = p\left(\frac{p-3}{2}\right)$$

Résidus quadratiques modulo 13



$$Aire = 78 = p\left(\frac{p-1}{2}\right)$$

Résidus quadratiques modulo 15



$$Aire = 70 < p\left(\frac{p-3}{2}\right)$$

Les dessins semblent indiquer que si un nombre de la forme $4k+1$ a sa somme des carrés inférieure à $p\left(\frac{p-1}{2}\right)$ alors il est composé tandis qu'il est premier si elle est égale à la valeur en question.

De même, si un nombre de la forme $4k+3$ a sa somme des carrés inférieure à $p\left(\frac{p-3}{2}\right)$ alors il est composé tandis qu'il est premier si elle est égale à la valeur en question.

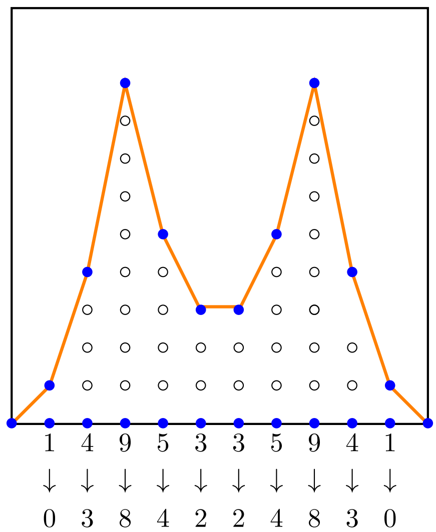
Cela pourrait s'expliquer par le fait que lorsque n est composé, certains nombres qui ne sont pas premiers à n ont leur carré qui peut s'annuler (cf. le dessin associé à 9). Ce n'est pas le cas pour l'exemple du nombre composé 15, il faudrait trouver comment préciser l'explication.

On essaie de trouver une formule qui permettrait de calculer l'aire plus rapidement, les dessins aident visuellement à la trouver.

On a le théorème de Pick qui fournit l'aire d'une surface en fonction du nombre de ses points intérieurs et du nombre de ses points sur le bord de la forme, ces points appartenant tous à un réseau de points équidistants. Mais il faut que la forme n'ait pas de trous. La formule est $Aire = Int + \frac{1}{2}Bord - 1$. Si la forme comporte des trous (ici dans le cas de 9 où la forme est coupée en 3), il faut soustraire $\chi(F)$, la caractéristique d'Euler de la forme, au lieu de 1 (dans le cas de 9, il y a 2 coupures de la forme, qui la coupent en 3 morceaux). *Note :* dans le cas de coupures, les points du bord appartenant à deux morceaux différents doivent être comptés en double.

Le nombre de points du bord du polygone associé à m vaut clairement $2m$. Le nombre de points intérieurs, en le comptant une verticale après l'autre, est nul pour un carré nul, et vaut $c - 1$ dans le cas d'un carré égal à c.

Explicitons sur le dessin de 11.



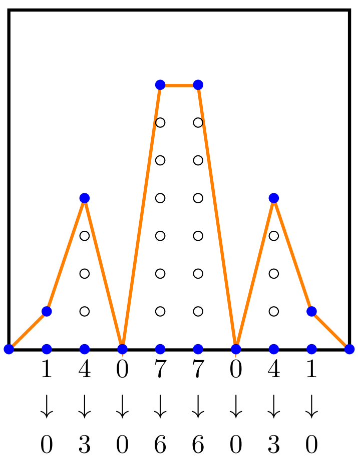
$$Bord = 22$$
$$Int = 34$$
$$Aire = 0.5 \times 22 + 34 - 1 = 44$$

On obtient ainsi l'aire directement en ajoutant $2n - 1$ à la somme des résidus quadratiques auxquels on a soustrait 1 s'ils sont non nuls.

Tableau des nombres de points pour appliquer la formule de Pick aux dessins présentés

5	10	6	10	
7	14	8	14	
9	18	18	26	au lieu de 24
11	22	34	44	
13	26	66	78	
15	30	56	70	

Illustration des coupures par l'exemple du module 9



$$Aire = 5 + 14 + 5 = Int + \frac{1}{2}Bord - 3$$

Malheureusement, nos conjectures tombent dès $p = 23$, pour lequel l'aire vaut 207, inférieure à $230 = p\left(\frac{p-3}{2}\right)$.

Elles sont aussi invalidées par de nombreux autres petits nombres premiers (31, 47, etc.) et les formules sont de plus vérifiées par des nombres composés (comme 65 ou 85).

Résidus quadratiques modulo 23