Annexe 1 : traduction d'un extrait de livre au sujet de la convergence de ζ [1]

Nous allons démontrer dans un moment que ζ peut être prolongée analytiquement à la droite $\sigma = 0$, et qu'elle est analytique excepté possiblement pour une singularité en $s = 1$. L'estimation précédente[2] implique donc que ζ a un pôle simple en $s = 1$, avec un résidu égal à 1.

Pour obtenir le prolongement analytique, on utilise une ruse simple, notamment on considère (pour $s = \sigma + it$, un nombre complexe) la fonction zeta alternée

$$\zeta_2(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \dots.$$

Les sommes partielles des coefficients de cette série de Dirichlet sont égaux à 0 ou 1, et par conséquent sont bornés. Le théorème 2 montre que $\zeta_2(s)$ est analytique pour $\mathfrak{Re}(s) > 0$. Mais

$$\frac{2}{2^s}\zeta(s) + \zeta_2(s) = \zeta(s),$$

et par conséquent

$$\zeta_2(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s).$$

Par prolongement analytique, cela donne déjà un prolongement analytique de ζ à la droite $\sigma = 0$, et l'on doit encore montrer qu'il n'y a pas de pôles excepté en $s = 1$. Cela se fait aisément en considérant

$$\zeta_r(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{(r-1)^s} - \frac{(r-1)}{r^s} + \frac{1}{(r+1)^s} + \dots$$

avec $r = 2, 3, \dots$. Alors juste comme pour $r = 2$, on voit que les sommes partielles des coefficients de ζ_r sont bornées par r, d'où que ζ_r est analytique pour $\mathfrak{Re}(s) > 0$. Par conséquent, avec un argument similaire à celui utilisé précédemment, on obtient

$$\zeta(s) = \frac{\zeta_r(s)}{1 - \frac{1}{r^{s-1}}}.$$

De l'expression avec ζ_2, on voit que les seuls pôles possibles (autre qu'en $s = 1$) apparaissent quand $2^{s-1} = 1$, ou de façon équivalente, lorsque

$$s = \frac{2\pi i n}{\log 2} + 1$$

[1] p. 157 et 158 du livre *Algebraic Number Theory* de Serge Lang (1970), chapitre VIII : Propriétés élémentaires de la fonction zeta et des L-séries, dans le paragraphe I, Lemmes sur les séries de Dirichlet.

[2] comprendre laquelle.

Pour un certain entier n. En utilisant ζ_3, on voit de la même façon que les seuls pôles possibles apparaissent lorsque

$$s = \frac{2\pi i m}{\log 3} + 1$$

En n'importe lequel de tels pôles on a $3^n = 2^m$, ce qui montre que $m = n = 0$. Cela prouve le :

Théorème 3. La fonction $\zeta(s)$ est analytique pour $\mathfrak{Re}(s) > 0$ excepté en un pôle simple en $s = 1$, avec résidu 1. Si $\delta > 0$, la série $\sum 1/n^s$ converge uniformément sur les compacts et absolument dans la région $\mathfrak{Re}(s) \geqq 1 + \delta$.

Annexe 2 : une démonstration trouvée sur la toile qui lie les fonctions zeta de Riemann et eta de Dirichlet.

Théorème : Utilisons la lettre ζ pour la fonction zeta de Riemann et la lettre η pour la fonction eta de Dirichlet. Soit $s \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de partie réelle $\sigma > 1$.

Alors $\zeta(s) = \dfrac{1}{1 - 2^{1-s}}\eta(s)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\zeta(s) - \eta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} + \frac{(-1)^n}{n^s} \right) \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\
&= 2^{1-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\
&= 2^{1-s}\zeta(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \quad (1 - 2^{1-s})\zeta(s) &= \eta(s) \\
\rightsquigarrow \quad \zeta(s) &= \frac{1}{1 - 2^{1-s}}\eta(s)
\end{aligned}$$

$\square$

Annexe 3 : Extension de la fonction ζ de Riemann à $\mathbb{C}\backslash 1$ par la fonction êta de Dirichlet[3]

On peut encore étendre la fonction ζ sur $\mathfrak{Re}(s) > 0$ à partir de la définition de la série alternée (appelée fonction êta de Dirichlet) :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} - \frac{1}{8^s} + \cdots .$$

Cette série est convergente pour s réel strictement positif, par application du critère des séries alternées ; il en est en fait de même pour $\mathfrak{Re}(s) > 0$, ce qui se démontre en utilisant le lemme d'Abel (on peut aussi montrer plus simplement la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^s - (2n-1)^s}{(2n)^s(2n-1)^s}$).

Si $\mathfrak{Re}(s) > 1$, $\quad \displaystyle\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \eta(s) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \eta(s) + \frac{2}{2^s}\zeta(s)$,

donc[4] $(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \eta(s)$,

d'où $\displaystyle\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}$.

Cela réalise ainsi le prolongement de la fonction ζ sur $\mathfrak{Re}(s) > 0$, sauf pour

$$s = 1 + \mathrm{i}\frac{2k\pi}{\ln(2)} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

qui sont les zéros de $1 - 2^{1-s}$.

À partir du prolongement pour $\mathfrak{Re}(s) > 0$ et en appliquant la relation fonctionnelle (voir plus loin), on obtient le prolongement partout sauf en ces points.

Pour ces points, on peut appliquer soit la série de Dirichlet de $\frac{1}{\zeta}$, qui converge sur $\mathfrak{Re}(s) = 1$, soit une autre relation du même genre[5].

De ce que

$$0 < \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n} = \frac{1}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

---

[3] Référence : un paragraphe de l'article wikipedia en français sur la fonction zêta de Riemann.

[4] Le pôle en 1 de ζ est annulé par le terme $1 - 2^{1-s}$; on a $\displaystyle\eta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ (la série harmonique alternée).

[5] La référence fournie est David Vernon Widder, The Laplace Transforms, PUP, 1946, p. 230 :

où O est la notation de Landau, on déduit que la série

$$\zeta_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(3n-2)^s} + \frac{1}{(3n-1)^s} - \frac{2}{(3n)^s} \right) = 1 + \frac{1}{2^s} - \frac{2}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{2}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} - \frac{2}{9^s} + \cdots$$

est convergente pour $\mathfrak{Re}(s) = 1$[6]. En procédant comme pour la fonction η, on montre que :

$$\zeta(s) = \frac{\zeta_3(s)}{1 - 3^{1-s}}.$$

Il suffit donc de calculer la série seulement pour ces points car $\frac{ln3}{ln2}$ se trouvant irrationnel, le dénominateur $1 - 3^{1-s}$ ne peut être nul en même temps que $1 - 2^{1-s}$ (sauf pour $s = 1$).

Puisque

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s} \qquad (\sigma > 1),$$
$$(1 - 3^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(3n-2)^s} + \frac{1}{(3n-1)^s} - \frac{2}{(3n)^s} \right\} \qquad (\sigma > 1),$$

les deux séries convergeant vers des fonctions analytiques pour $\sigma > 0$, on voit à partir de la première équation que $\zeta(s)$ est analytique pour $\sigma > 0$ excepté peut-être en

$$s = 1 + \frac{2k\pi i}{\log 2} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

et à partir de la seconde équation que $\zeta(s)$ est analytique pour $\sigma > 0$ excepté peut-être en

$$s = 1 + \frac{2k\pi i}{\log 3} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

C'est-à-dire que $\zeta(s)$ doit être analytique pour $\sigma > 0$ excepté pour un pôle simple en $s = 1$.

[6] Il existe d'autres démonstrations : on peut par exemple montrer que la série est en fait convergente pour $\mathfrak{Re}(s) > 0$ en appliquant la formule de Cahen pour l'abscisse de convergence simple, les sommes partielles des coefficients ne prenant que l'une des trois valeurs 0, 1, 2. On peut aussi effectuer sur la série un regroupement des termes de la forme $\frac{1}{(3n-2)^s} + \frac{1}{(3n-1)^s}$ en laissant le terme négatif à part. Ce faisant, la série est alors une série alternée dont les termes sont décroissants (cela se montre facilement car on a $3n-2 < 3n-1 < 3n < 3n+1 < 3n+2$ donc $\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} > \frac{2}{3n}$ d'une part et $\frac{2}{3n} > \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2}$ d'autre part) et qui converge donc par application du critère des séries alternées pour s réel. On montre facilement que la série ne converge pas en 0 car ses sommes partielles ne tendent pas vers 0.

Annexe 4 : extrait d'un article (traduit) pour l'inégalité de Dragomir [7]

Observons que pour tout k fixé tel que $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \alpha_k \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_k) x_j.$$

Alors, on a, évidemment

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \alpha_k \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_j) x_j.$$

et donc, en utilisant la propriété de continuité de la norme, on a aussi

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\| &\geq \left| \left\| \alpha_k \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| - \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_j) x_j \right\| \right| \\
&\geq \left\| \alpha_k \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| - \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_k) x_j \right\| \\
&\geq |\alpha_k| \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| - \sum_{j=1}^{n} |(\alpha_j - \alpha_k)| \, \|x_j\|
\end{aligned}$$

[7] p. 3 de Sever Silvestru Dragomir, *A generalisation of the Pečarić-Rajić inequality in normed linear spaces*, Math. Inequal. Appl., 12:53-65, 2009.