Arbres de nombres et conjecture de Goldbach

Denise Vella

Juillet 2007

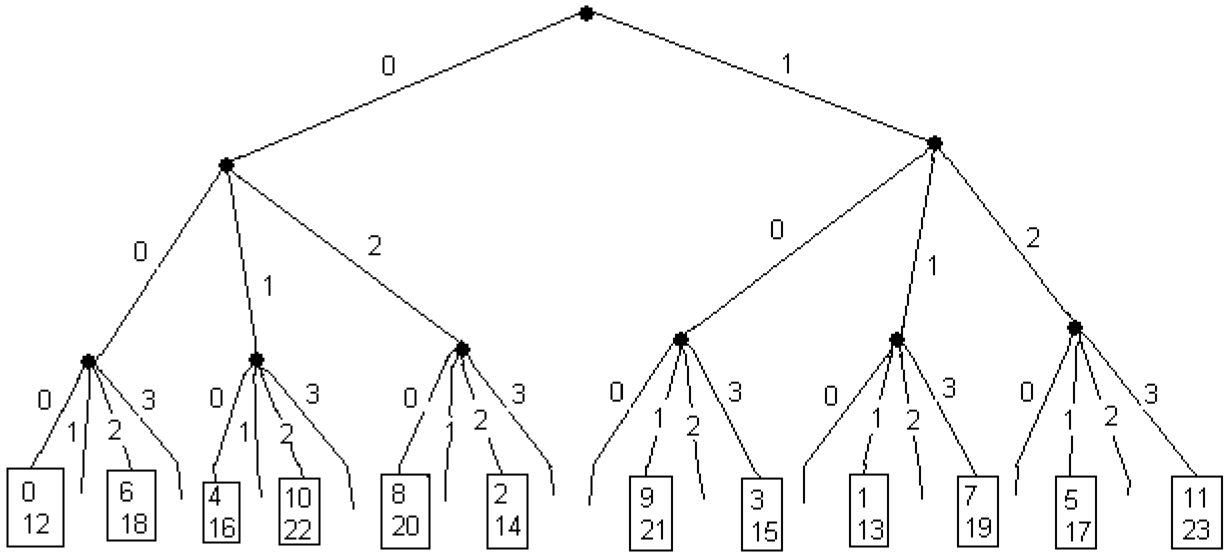
1 Introduction

La conjecture de Goldbach énonce que tout nombre pair supérieur ou égal à 6 est la somme de deux nombres premiers.
Dans une note précédente, on a constaté que tout nombre inférieur à x et dont les restes de divisions euclidiennes par les nombres de 2 à x sont différents un à un des restes de $2x$ par ces mêmes divisions a son complémentaire à $2x$ qui est premier.
En définissant des structures arborescentes qu'on appellera "arbres de restes", on "se dirigera vers" une démonstration par récurrence de la conjecture de Goldbach.

2 Arbres de restes

Les structures arborescentes sont très utilisées en informatique. Un arbre est un graphe connexe sans cycle. Ici, on va utiliser un arbre de classification selon les restes des divisions euclidiennes.
De la racine de l'arbre partiront systématiquement deux branches selon que le nombre à classer est pair ou impair. Les nombres pairs se retrouveront dans la partie gauche de l'arbre, et les impairs dans la partie droite. Des deux fils de la racine partiront trois branches selon le reste obtenu en divisant le nombre à classer par 3 (0, 1 ou 2). Des petits-fils de la racine partiront 4 branches, selon le reste obtenu dans une division par 4 (0, 1, 2 ou 3) et etc.
Par exemple, l'arbre de la figure ci-après est un arbre de classification des nombres de 0 à 23 selon leurs restes dans les divisions par 2, 3 et 4.

On constate différentes propriétés de l'arbre qui permettront certains raisonnements.
D'abord, toutes les feuilles de l'arbre ne sont pas "étiquetées" (ne mènent pas toutes à des nombres). Par exemple, le chemin 013 ne mène à rien : il n'existe pas de nombre qui soit à la fois de la forme $2x$, $3y$ et $4z + 3$.
Le nombre de feuilles "étiquetées" est calculable : l'arbre de niveau n a $n!$ feuilles mais parmi elles, seules $PPCM(2, 3, 4, ..., n)$ sont étiquetées. Les feuilles qui sont étiquetées le sont par autant de nombres chacune.
Par exemple, l'arbre à trois niveaux a $2 \times 3 \times 4 = 24$ feuilles. Parmi elles, seules $PPCM(2, 3, 4) = 12$ sont étiquetées : une feuille sur deux est vide tandis que les feuilles étiquetées mènent à deux nombres chacune.
L'arbre à quatre niveaux quant à lui a $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ feuilles. Parmi elles,



seules $PPCM(2,3,4,5) = 60$ sont étiquetées : une feuille sur deux est vide tandis que les feuilles étiquetées mènent à deux nombres chacune.
L'arbre a cinq niveaux a $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ feuilles. Parmi elles, seules $PPCM(2,3,4,5,6) = 60$ sont étiquetées : onze feuilles sur douze sont vides tandis que les feuilles étiquetées mènent à douze nombres chacune.
Une autre propriété de l'arbre est que les nombres qui se retrouvent sur une même feuille de l'arbre constituent une progression arithmétique de nombres d'écart le PPCM des nombres de 2 au niveau de l'arbre.
Enfin, l'arbre présente une sorte de "symétrie" autour d'un axe central imaginaire. Si l'on s'intéresse à un nombre dans la partie gauche de l'arbre, auquel mène le chemin étiqueté $a_2a_3a_4$, et à son symétrique par rapport à l'axe central, auquel mène le chemin $b_2b_3b_4$, alors on a $a_2 + b_2 = 1$, $a_3 + b_3 = 2$ et $a_4 + b_4 = 3$.

3 Idée : les nombres associés à une même feuille de l'arbre "partagent" des décomposants Goldbach

Puisque les nombres qui sont associés à une même feuille selon un niveau donné ont le même chemin d'accès, et puisqu'on pense qu'un décomposant Goldbach d'un nombre a son chemin d'accès qui est différent de celui de ce nombre, lettre à lettre, les nombres d'une même feuille doivent "partager" des décomposants Goldbach.
On vérifie cela sur les arbres de niveau 3 et 4.
Pour l'arbre de niveau 3, cette constatation correspond à l'assertion "tout nombre pair i compris entre 8 et 12 a une décomposition Goldbach en commun avec $i + 12$. Tous les nombres pairs jusqu'à 24 se voient alors attribuer au moins un

décomposant Goldbach.
Pour l'arbre de niveau 4, cette constatation correspond à l'assertion "tout nombre pair i compris entre 8 et 60 a une décomposition Goldbach en commun avec $i + 60$. Tous les nombres pairs jusqu'à 120 se voient alors attribuer au moins un décomposant Goldbach.
Pour l'arbre de niveau 5, cette constatation correspond à l'assertion "tout nombre pair i compris entre 8 et 60 a une décomposition Goldbach en commun avec $i + 60j$, pour j allant de 1 à 11. Tous les nombres pairs jusqu'à 720 obéissent à la conjecture.
Pour l'arbre de niveau 6, cette constatation correspond à l'assertion "tout nombre pair i compris entre 8 et 420 a une décomposition Goldbach en commun avec $i + 420j$, pour j allant de 1 à 11. Tous les nombres pairs jusqu'à 5040 obéissent à la conjecture de Goldbach.
Pour l'arbre de niveau 7, cette constatation correspond à l'assertion "tout nombre pair i compris entre 8 et 840 a une décomposition Goldbach en commun avec $i + 840j$, pour j allant de 1 à 47.

Pour corroborer cette idée, j'ai fait deux tests.
Dans l'arbre 6, j'ai pris le nombre 122 au hasard, j'ai trouvé ses décomposants Goldbach et j'ai vérifié qu"il en "partageait" toujours au moins un avec les nombres de la forme $122 + 420j$, j allant de 1 à 11.
122 a pour décomposants Goldbach les nombres premiers 13, 19, 43, 61, 79, 103 et 109. Les nombres de la forme $122 + 420j$ pour j de 1 à 11 sont 542, 962, 1382, 1802, 2222, 2642, 3062, 3482, 3902, 4322, 4742.
Les partages de décomposants Goldbach sont les suivants :
Avec 542, 122 partage 19, 43, 79, 103 et 109.
Avec 962, 122 partage 43, 79, 103 et 109.
Avec 1382, 122 partage 61, 79 et 103.
Avec 1802, 122 partage tous ses décomposants !
Avec 2222, 122 partage 19, 43, 61, 79, et 109.
Avec 2642, 122 ne partage que 103.
Avec 3062, 122 partage 13, 43, 61 et 109.
Avec 3482, 122 partage 13, 19 et 109.
Avec 3902, 122 partage 13, 79 et 109.
Avec 4322, 122 partage 61, 79 et 103.
Avec 4742, 122 partage 13, 19, 79 et 103.

Dans l'arbre 7, j'ai vérifié que le nombre 632 partageait avec tous les nombres de la forme $632 + 840j$ pour j allant de 1 à 47 au moins un décomposant Goldbach.

Par le "partage" des décompositions, on atteint à chaque niveau d'arbre successifs la factorielle de n alors que l'arbre de niveau suivant a besoin seulement des PPCM premiers nombres pairs (toujours inférieur à la factorielle) pour en engendrer encore et encore.

4 Conclusion

Les petits nombres “donnent” certains de leurs décomposants Goldbach à d’autres nombres qui appartiennent à certaines progressions arithmétiques[1].

Annexe 1 : L’arbre de niveau 5

Pour condenser l’écriture, on écrit sur une même ligne, suivi du symbole de l’ensemble vide $\emptyset$ les chemins qui n’amènent à aucun nombre. Dans la partie droite de l’arbre (chemins commençant par un 1 pour les nombres impairs), on

[1] La croissance de l’arbre des restes fait penser à la croissance d’un chou Romanesco...

a souligné les nombres premiers.

$0000 : 0, 60(7), 120(7)$
$0001 : 36(7), 96(7)$
$0002 : 12(5), 72(5)$
$0003 : 48(5), 108(5)$
$0004 : 24(5), 84(5)$

$0010 : \emptyset$ $0011 : \emptyset$ $0012 : \emptyset$ $0013 : \emptyset$ $0014 : \emptyset$

$0020 : 30(7), 90(7)$
$0021 : 6, 66$
$0022 : 42(5), 102(5)$
$0023 : 18(5), 78(5)$
$0024 : 54(7), 114(7)$

$0030 : \emptyset$ $0031 : \emptyset$ $0032 : \emptyset$ $0033 : \emptyset$ $0034 : \emptyset$

$0100 : 40(3), 100(3)$
$0101 : 16(3), 76(3)$
$0102 : 52(5), 112(5)$
$0103 : 28(5), 88(5)$
$0104 : 4, 64$

$0110 : \emptyset$ $0111 : \emptyset$ $0112 : \emptyset$ $0113 : \emptyset$ $0114 : \emptyset$

$0120 : 10(3), 70(3)$
$0121 : 46(3), 106(3)$
$0122 : 22(3), 82(3)$
$0123 : 58(5), 118(5)$
$0124 : 34(5), 94(5)$

$0130 : \emptyset$ $0131 : \emptyset$ $0132 : \emptyset$ $0133 : \emptyset$ $0134 : \emptyset$

$0200 : 20(7), 80(7)$
$0201 : 56(3), 116(3)$
$0202 : 32(3), 92(3)$
$0203 : 8, 68$
$0204 : 44(3), 104(3)$

$0210 : \emptyset$ $0211 : \emptyset$ $0212 : \emptyset$ $0213 : \emptyset$ $0214 : \emptyset$

$0220 : 50(3), 110(3)$
$0221 : 26(3), 86(3)$
$0222 : 2, 62$
$0223 : 38(19), 98(19)$
$0224 : 14(3), 74(3)$

$0230 : \emptyset$ $0231 : \emptyset$ $0232 : \emptyset$ $0233 : \emptyset$ $0234 : \emptyset$

$1000 : \emptyset$ $1001 : \emptyset$ $1002 : \emptyset$ $1003 : \emptyset$ $1004 : \emptyset$

$1010 : 45, 105$
$1011 : 21, 81$
$1012 : 57, 117$
$1013 : 33, 93$
$1014 : 9, 69$

$1020 : \emptyset$ $1021 : \emptyset$ $1022 : \emptyset$ $1023 : \emptyset$ $1024 : \emptyset$

$1030 : 15, 75$
$1031 : 51, 111$
$1032 : 27, 87$
$1033 : 3, 63$
$1034 : 39, 99$

$1100 : \emptyset$ $1101 : \emptyset$ $1102 : \emptyset$ $1103 : \emptyset$ $1104 : \emptyset$

$1110 : 25, 85$
$1111 : 1, \underline{61}$
$1112 : \underline{37}, \underline{97}$
$1113 : \underline{13}, \underline{73}$
$1114 : 49, \underline{109}$

$1120 : \emptyset$ $1121 : \emptyset$ $1122 : \emptyset$ $1123 : \emptyset$ $1124 : \emptyset$

$1130 : 55, 115$
$1131 : \underline{31}, 91$
$1132 : \underline{7}, \underline{67}$
$1133 : \underline{43}, \underline{103}$
$1134 : \underline{19}, \underline{79}$

$1200 : \emptyset$ $1201 : \emptyset$ $1202 : \emptyset$ $1203 : \emptyset$ $1204 : \emptyset$

$1210 : \underline{5}, 65$
$1211 : \underline{41}, \underline{101}$
$1212 : \underline{17}, 77$
$1213 : \underline{53}, \underline{113}$
$1214 : \underline{29}, \underline{89}$

$1220 : \emptyset$ $1221 : \emptyset$ $1222 : \emptyset$ $1223 : \emptyset$ $1224 : \emptyset$

$1230 : 35, 95$
$1231 : \underline{11}, \underline{71}$
$1232 : \underline{47}, \underline{107}$
$1233 : \underline{23}, \underline{93}$
$1234 : \underline{59}, 119$

Annexe 2 : Extrait d'une biographie de Poincaré concernant la démonstration par récurrence

Le texte qui suit est extrait de la biographie "Poincaré : philosophe et mathématicien" d'Umberto Bottazzini aux éditions Belin Pour la Science.

Le raisonnement par récurrence : le terrain le plus naturel et le plus favorable pour cette étude est l'arithmétique élémentaire, c'est à dire les opérations mettant en jeu des nombres entiers. Quand nous analysons des opérations telles que l'addition et la multiplication, nous nous rendons compte qu'un type de raisonnement se "retrouve à chaque pas", c'est la démonstration "par récurrence" : "on établit d'abord un théorème pour n égal à 1 ; on montre ensuite que, s'il est vrai de $n-1$, il est vrai de n, et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers." C'est là le "raisonnement mathématique par excellence", déclare Poincaré. Sa particularité est "qu'il contient, sous une forme condensée, une infinité de syllogismes", et qu'il permet de passer du particulier au général, du fini à l'infini, concept qui apparaît dès les premiers pas de l'arithmétique élémentaire et sans lequel "il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général", mais uniquement des énoncés particuliers.

D'où nous vient ce "raisonnement pas récurrence", s'interroge Poincaré ? Certainement pas de l'expérience. Celle-ci peut nous suggérer que la règle est vraie pour les dix ou les cent premiers nombres, mais elle est désarmée face à l'infinité de tous les nombres naturels. Le principe de contradiction (on dirait aujourd'hui le raisonnement par l'absurde) est aussi impuissant : il nous permet d'obtenir certaines vérités, mais non d'en enfermer une infinité en une seule formule. "Cette règle (le raisonnement par récurrence), inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique *a priori*, conclut Poincaré. L'"'irrésistible évidence" avec laquelle ce "principe" s'impose n'est autre que "l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible"...