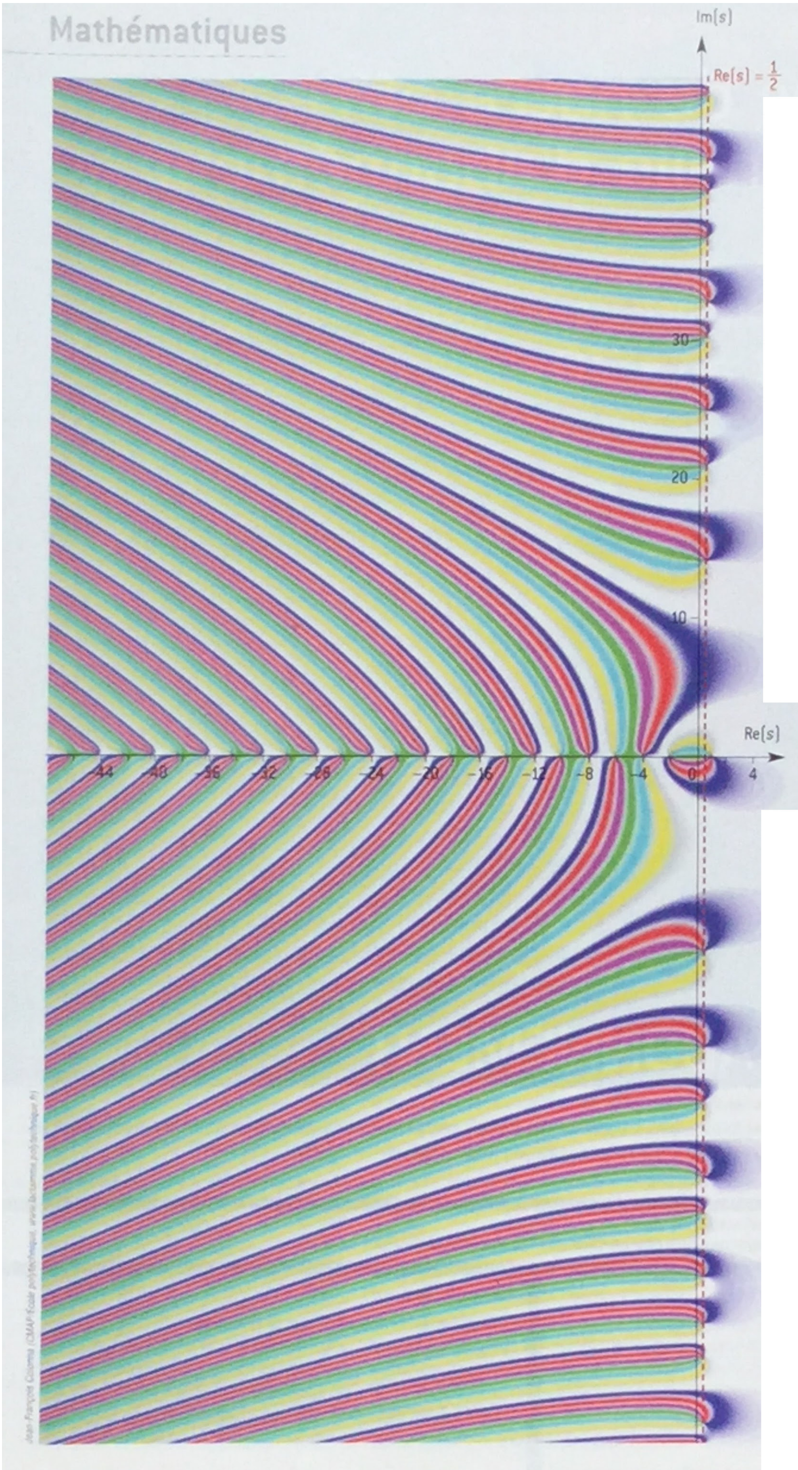
Arc tangente (Denise Vella-Chemla, 18.6.2017)

On essaie, lentement, de se familiariser avec les images représentant la fonction zêta de Riemann dans le plan complexe. En particulier, il y a deux images : l'une en couleur, l'autre bicolore de forme spirale.

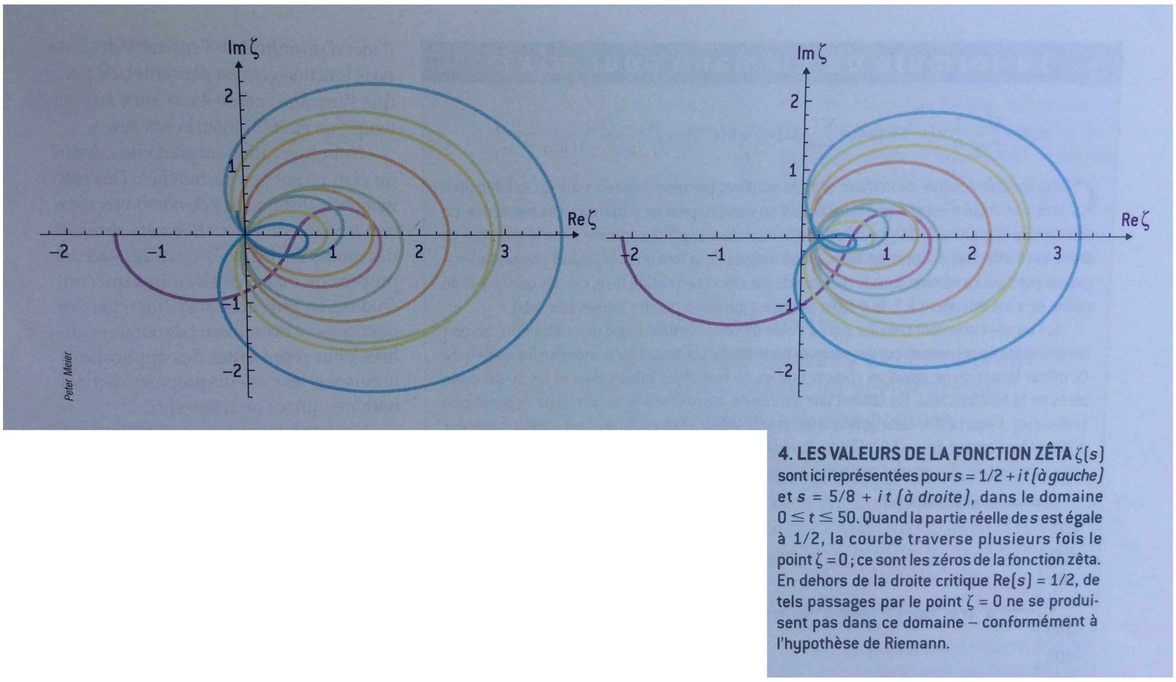
La représentation colorée de la fonction zêta permet de représenter pour chaque point antécédent complexe $a + ib$ à 2 coordonnées (a, b) une image complexe à deux coordonnées également $a' + ib'$. Comme on ne peut le faire, le $a' + ib'$ est représenté par une couleur que l'on obtient dans un disque palette, l'angle de parcours de ce disque (la coordonnée angulaire) permettant de passer subtilement d'une couleur à l'autre et la distance au centre du disque (coordonnée radiale) fournissant l'intensité de la couleur utilisée[1].



Il est très bien expliqué dans un article du magazine Pour la Science (n°377, mars 2009) de Peter Meier et

[1] cf https://en.wikipedia.org/wiki/Hue

Jörn Steuding que si l'on parcourt verticalement une droite dans la représentation colorée, on se promène en quelque sorte sur une spirale du plan complexe qui peut passer périodiquement par le point origine (zéro) ou bien ne jamais y passer (la spirale est alors décalée vers la droite).



4. LES VALEURS DE LA FONCTION ZÊTA $\zeta(s)$ sont ici représentées pour $s = 1/2 + it$ *(à gauche)* et $s = 5/8 + it$ *(à droite)*, dans le domaine $0 \leq t \leq 50$. Quand la partie réelle de s est égale à 1/2, la courbe traverse plusieurs fois le point $\zeta = 0$; ce sont les zéros de la fonction zêta. En dehors de la droite critique $\mathrm{Re}(s) = 1/2$, de tels passages par le point $\zeta = 0$ ne se produisent pas dans ce domaine – conformément à l'hypothèse de Riemann.

Ceci étudié, on a l'idée de calculer par la fonction arc-tangente l'angle associé aux zéros de la fonction zêta de Riemann.

Les valeurs des parties imaginaires des zéros sont trouvables sur la toile.
Par exemple, ici : http://lmfdb.org/zeros/zeta/?limit=100000N=1.

On utilise pour calculer les arcs-tangentes pour les zéros de zêta le programme ci-dessous : le côté opposé de l'angle est la partie imaginaire du zéro, le côté adjacent vaut $\frac{1}{2}$, il s'agit donc de calculer l'arc tangente de $2.\Im(z)$ pour z parcourant les valeurs du fichier.

```
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <cmath>
#include <fstream>

int main (int argc, char* argv[])
{ int i, np ;
  float zeros[100005] ;

  std::ifstream fichier("leszeros", std::ios::in);
  if (fichier)
    {
      int entier1 ;
      float entier2 ;

      while (not fichier.eof()) {
        fichier >> entier1 >> entier2 ;
        zeros[entier1] = entier2 ;
      }
      fichier.close();
    }
  else std::cerr << "Impossible d'ouvrir le fichier !" << std::endl ;
  for (i = 1 ; i <= 100000 ; ++i) std::cout << i << " -> " << atan(2.0*zeros[i]) << "\n" ;
}
```

On trouve sur la toile ici https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule$_{de}$$_M$$achin$ quatre égalités surprenantes concernant certaines valeurs de la fonction arc-tangente :

$$\frac{\pi}{4} = 4arctan\frac{1}{5} - arctan\frac{1}{239} \qquad \text{(découverte par Machin en 1706)}$$

$$\frac{\pi}{4} = arctan\frac{1}{2} + arctan\frac{1}{3} \qquad \text{(découverte par Euler en 1706)}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2arctan\frac{1}{2} - arctan\frac{1}{7} \qquad \text{(découverte par Herman en 1706)}$$

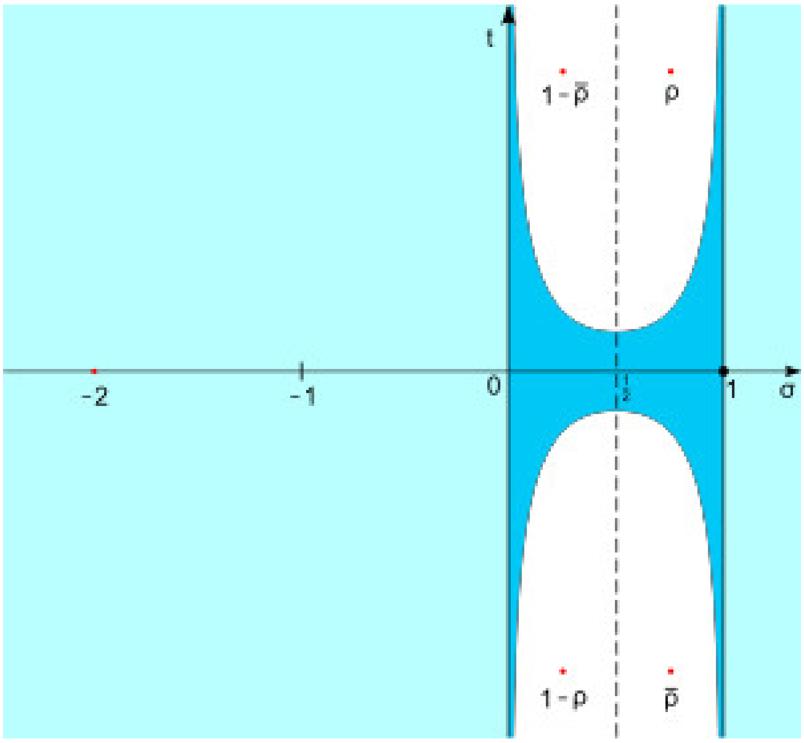
$$\frac{\pi}{4} = 2arctan\frac{1}{3} + arctan\frac{1}{7} \qquad \text{(découverte par Hutton en 1776).}$$

Pour 100000 zéros, à partir de la partie imaginaire du 55204ème zéro, on atteint la valeur 1.57079 sur laquelle le programme se stabilise. En effet, la limite de la fonction $arctan(x)$ est $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

Si on considère que les couples de "couleurs complémentaires" sont (bleu, blanc), (rouge, jaune), (turquoise, violet) et (vert, vert), on constate une symétrie colorée entre points correspondant à des nombres complexes conjugués (qui doit peut-être correspondre au fait que l'image du conjugué d'un complexe est le conjugué de son image (si $\zeta(a+ib) = c+id$ alors $\zeta(a-ib) = c-id$). On notera que, bizarrement, les couleurs de l'arc-en-ciel ne sont pas dans l'ordre quand on "chemine" (par exemple verticalement).

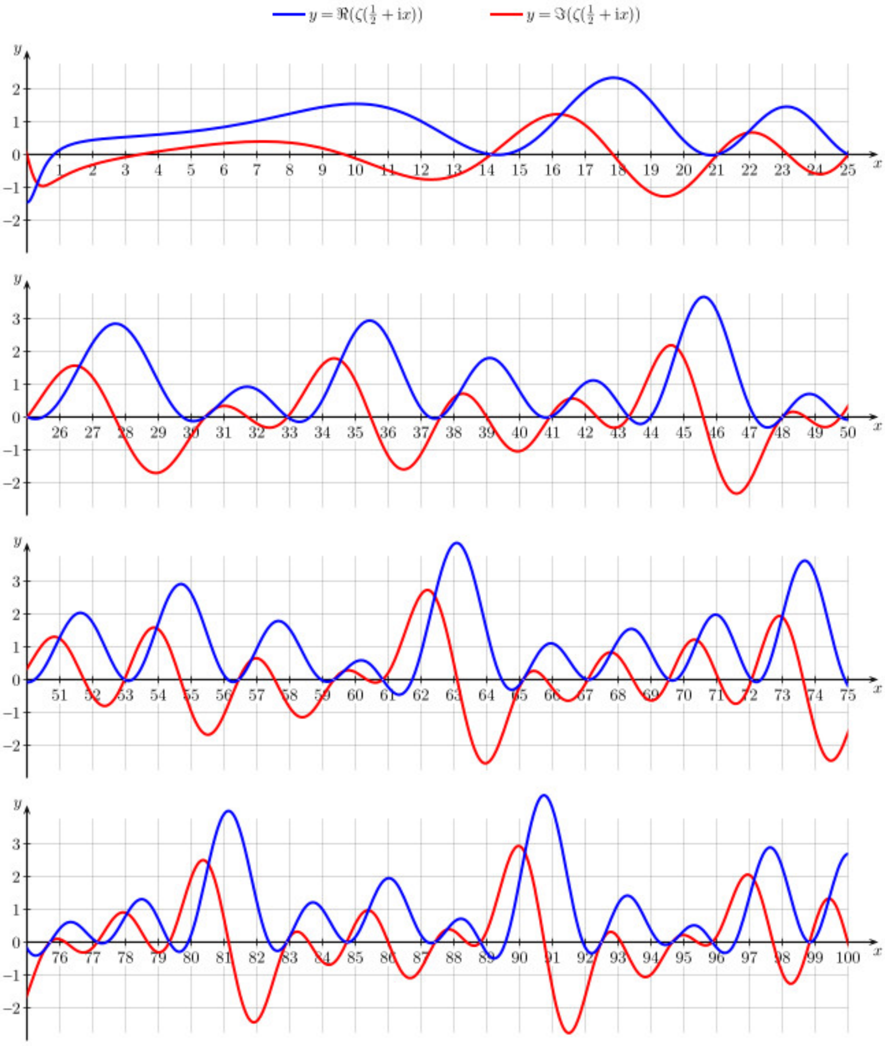
Enfin, deux graphiques à mémoriser, trouvés sur l'article de wikipedia concernant la fonction zêta de Riemann :

– le premier concernant les valeurs symétriques que prend la fonction zêta sur un complexe ρ, son conjugué $\overline{\rho}$, $1-\rho$ et $1-\overline{\rho}$;



On a $\rho = a+ib, \overline{\rho} = a-ib, 1-\overline{\rho} = (1-a)+ib$ et $1-\rho = 1-(a+ib) = (1-a)-ib = \overline{(1-\overline{\rho})}$;

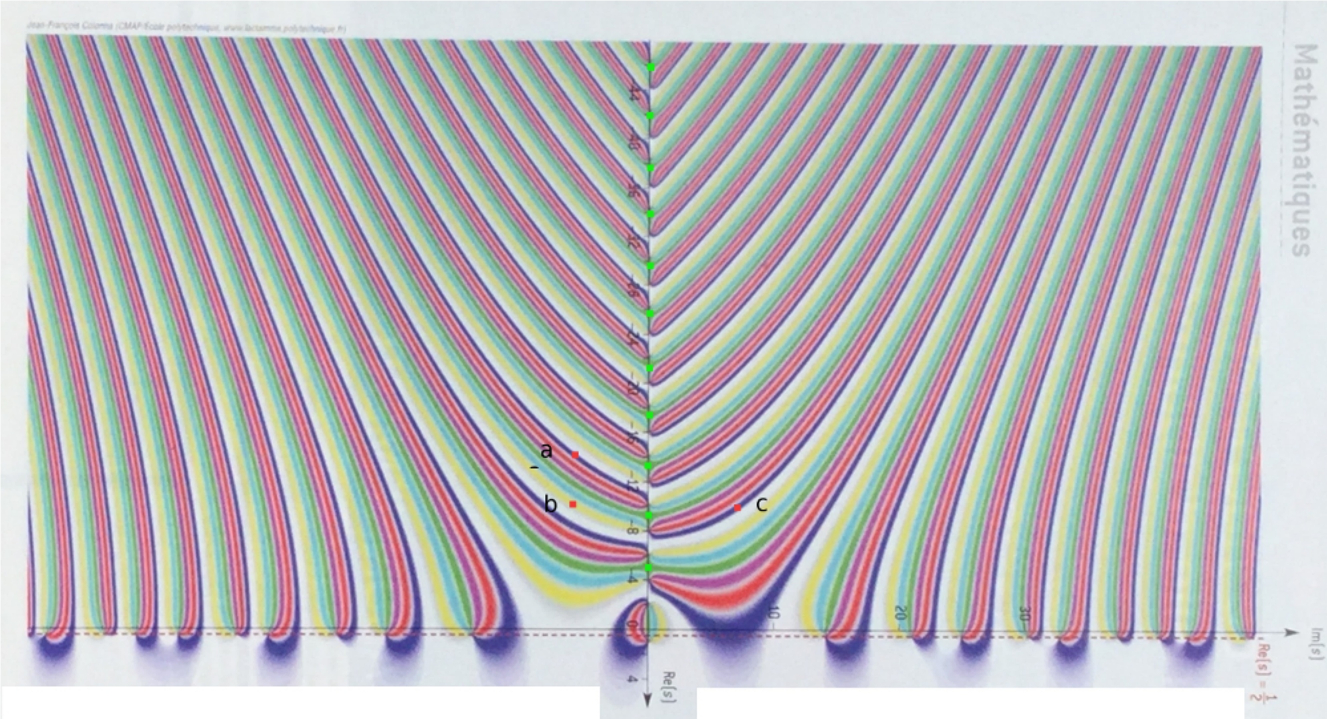
– le second montrant séparément les parties réelles et imaginaires des complexes le long de la droite critique ; la courbe rouge ressemble étrangement à la courbe bleue qu'on aurait décalée vers le bas et la gauche, en l'écrasant à moitié (au dessus de l'axe des abscisses, la courbe rouge semble systématiquement croiser la courbe bleue à la moitié des hauteurs des pics). Il faut aussi trouver un moyen d'aligner horizontalement ses minima.



A la recherche d'une transformation de la représentation graphique colorée de la fonction zêta, on voit qu'il faudrait peut-être considérer plein de petites symétries centrales à appliquer sur des portions du graphique, autour des points marqués de petits carrés verts ci-dessous, avec une inversion des couleurs, que l'on schématise par le passage du point a au point b au point c. Cette transformation s'applique sur l'axe de partie réelle $\dfrac{1}{2}$ pour lequel la symétrie s'effectue par rapport au point origine.

Pour avoir à l'esprit des réels plutôt que des complexes, on définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ ainsi : si r est la partie imaginaire d'un nombre complexe annulant zêta,

$$\begin{aligned} z(r) &= 1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}+ri}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}+ri}} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}(cos(r\ ln\ 2) + i\ sin(r\ ln\ 2))} + \frac{1}{\sqrt{3}(cos(r\ ln\ 3) + i\ sin(r\ ln\ 3))} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(r\ ln\ n) - i\ sin(r\ ln\ n)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$



La configuration de la représentation colorée ainsi que les positions des ρ et $1-\overline{\rho}$ autour de la droite critique dans la figure à dominante turquoise plus haut nous amène à la réflexion suivante : admettons qu'on ait deux zéros (puisqu'ils vont par 2) qui "tombent" hors de la droite, par exemple $1/4+ai$ et $3/4+ai$, pour que la fonction ζ s'annule, si ρ est l'angle correspondant à a, les dénominateurs identiques des formules fournies de $z(a)$ pour ces points doivent être nuls (les $\sum_{n=1}^{\infty} cos(\rho\ ln\ n) - i\ sin(\rho\ ln\ n)$ vus plus haut, les dénominateurs valant $\sqrt[4]{n}$ pour le point $1/4+ai$ et $\sqrt[4]{n^3}$ pour le point $3/4+ai$).

Mais alors, en prenant de manière dichotomique un troisième zéro entre les 2 premiers (ou plutôt deux autres zéros plus proches de la droite autour d'elle), on peut restreindre l'intervalle sur lequel l'annulation est forcée d'avoir lieu. On réitère le procédé de fois en fois de façon dichotomique et on voit alors la droite critique comme la limite sur laquelle les zéros doivent fatalement se trouver, les points extrémités de l'intervalle ayant pour partie réelle des $\frac{1}{2}+\varepsilon$ et $\frac{1}{2}-\varepsilon$, avec ε qui tend vers zéro. Ce raisonnement fait penser à une descente infinie de Fermat mais contrairement à elle, il ne permet pas d'aboutir à une contradiction car la descente infinie a lieu sur des réels et non sur des entiers.

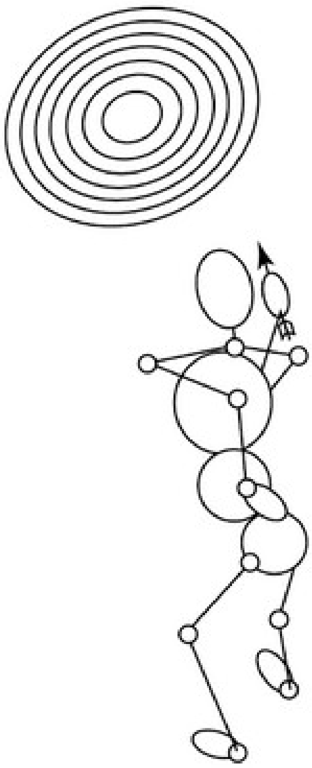
Ci-dessous, deux illustrations :

– la photo est la propriété de Jean-François Dars ; on peut la regarder à cette adresse : http://www.savoirs.essonne.fr/sections/ressources/photos/photo/michael-atiyah-et-alain-connes/ ainsi que dans le livre Les déchiffreurs [3] ; le geste des doigts illustre bien l'idée d'élément infinitésimal de distance ;

– la seconde illustration peut être trouvée dans des articles (dont on fournit les références en bibliographie) dans lesquels Alain Connes fournit sa vision des infinitésimaux.

On peut relier, de loin, cette idée de droite-critique-limite au paradoxe de Zénon d'une part (les zéros s'en approcheraient infiniment mais on n'arriverait pas à prouver qu'ils lui appartiennent) ; cela nous fait également penser à une anecdote vécue en enseignant à des élèves de niveau élémentaire : on peut jouer avec eux à "devine mon nombre", dès que sont abordés les décimaux, et ils comprennent vite grâce à ce jeu qu'entre deux nombres, on peut toujours en intercaler un troisième. Pour des élèves petits, il n'y a pas de nombre entre 4 et 5, dans la mesure où ils ont en tête la suite numérique ; plus tard, entre 13,4 et 13,5, transposant leur raisonnement initial, certains pensent qu'il n'y a pas de nombre non plus. Le jeu consiste pour les élèves à poser à l'enseignant des questions fermées : "le nombre est-il plus grand (ou plus petit) que tant ?" pour tenter de deviner le nombre que l'enseignante a choisi. Le fait pour l'enseignant de “tricher” en ajoutant des décimales leur fait petit à petit comprendre que de même que la suite des nombres est infinie, entre 2 nombres, il y a une infinité de nombres.

You play a game of throwing darts at some target called Ω



and the question which is asked is: what is the probability $dp(x)$ that actually when you throw the dart it lands exactly at a given point $x \in \Omega$?

Bibliographie

[1] Noncommutative geometry and reality, Journal of mathematical physics, 36, p.6194, (1995).

[2] Visions in mathematics : GAFA (Geometrical Functional Analysis) 2000, Special Volume, part II, p.506, edité par Noga Alon, Jean Bourgain, Alain Connes, Mikhaïl Gromov, Vitali D. Milman.

[3] Les déchiffreurs, voyage en mathématiques, Jean-François Dars, Annick Lesne, Anne Papillault, Belin, 2008.