

Le petit baluchon

Denise Vella-Chemla

21 février 2014

On voudrait rassembler ici les cailloux trouvés durant la promenade.

1 Sinusoïdes

On s'est intéressé à elles en réalisant que $\sin(5\pi x)$ s'annule 4 fois sur l'intervalle $]0, 1[$, pour les fractions $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$. De même, la sinusoïde $\sin(p\pi x)$ s'annule exactement $p - 1$ fois sur l'intervalle $]0, 1[$ et ce jamais sur un point sur lequel s'annule la sinusoïde d'un nombre premier p' inférieur à \sqrt{p} . On saisit ainsi bien l'infinité de l'intervalle $]0, 1[$, les sinusoïdes d'une infinité de nombres premiers réussissant à s'intercaler sans les toucher entre toutes les sinusoïdes correspondant à des nombres premiers plus petits et déjà placées sur l'intervalle.

Si on se place sur la droite réelle habituelle au lieu de se focaliser sur l'intervalle $]0, 1[$, les décomposants de Goldbach se calculent très simplement ; ce sont les seuls nombres entiers inférieurs à $n/2$ qui n'annulent pas le produit suivant :

$$\prod_{p \text{ un nb } 1^{er} \leq \sqrt{n}} \sin\left(\frac{x\pi}{p}\right) \cdot \sin\left(\frac{(n-x)\pi}{p}\right)$$

En annexe sont fournis de tels produits de sinusoïdes présentant le fait que 5 est décomposant de Goldbach de 16, que 7, 11, 17 et 19 sont décomposants de Goldbach de 48 ou encore que 19, 31 et 37 sont décomposants de Goldbach de 98.

On est tenté de relier ces interférences entre sinusoïdes à l'expérience de mécanique quantique dite des "fentes de Young".

2 Essayer de suivre les professeurs : rechercher la limpidité et la sincérité

Nathalie Charraud signale le souci du style de présentation des résultats et de la transmission qui motive Cantor. Il insiste en effet sur l'effort de présenter le cheminement de pensée aussi clairement que possible" et admire particulièrement les exposés d'Hermite pour leur limpidité : "Le style personnel de Cantor va avec le souci de communiquer de la façon la plus transparente possible le processus et les étapes de sa découverte."

Ce souci de limpidité se retrouve chez Hilbert, dans un extrait de sa conférence de 1900 : "On peut néanmoins se demander s'il n'existe pas des attributs généraux caractérisant un bon problème de mathématiques. Un mathématicien des temps passés a dit : "une théorie mathématique ne doit être regardée comme parfaite que si elle a été rendue tellement claire qu'on puisse la faire comprendre au premier individu rencontré dans la rue". Cette clarté, cette limpidité si énergiquement exigée ici d'une théorie mathématique, je l'exigerai encore davantage d'un problème mathématique parfait ; ce qui est clair et limpide nous attire en effet, ce qui est embrouillé nous rebute".

L'extrait particulièrement émouvant de Galois : "On doit prévoir que, traitant des sujets aussi nouveaux, hasardé dans une voie aussi insolite, bien souvent des difficultés se sont présentées que je n'ai su vaincre.

Aussi, dans ces deux mémoires et surtout dans le second qui est plus récent, trouvera-t-on souvent la formule : “Je ne sais pas”. La classe des lecteurs dont j’ai parlé au commencement ne manquera pas d’y trouver à rire. C’est que malheureusement on ne se doute pas que le livre le plus précieux du plus savant serait celui où il dirait tout ce qu’il ne sait pas, c’est qu’on ne se doute pas qu’un auteur ne nuit jamais tant à ses lecteurs que quand il dissimule une difficulté. Quand la concurrence, c’est à dire l’égoïsme, ne régnera plus dans les sciences, quand on s’associera pour étudier, au lieu d’envoyer aux Académies des paquets cachetés, on s’empressera de publier les moindres observations pour peu qu’elles soient nouvelles, et on ajoutera : Je ne sais pas le reste.”.

En cherchant à suivre Galois, on a trouvé que les décomposants de Goldbach de n sont les solutions communes et inférieures à $n/2$ de l’inéquation $x^2 - nx \neq 0$ que l’on doit résoudre simultanément dans tous les corps premiers $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ avec p_i un nombre premier quelconque inférieur à \sqrt{n} .

Traisons l’exemple de la recherche des décompositions de Goldbach de 98. Le polynôme $x^2 - 98x$ est égal à $x^2 - 2x$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tandis qu’il est égal à $x^2 - 3x$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, ou encore égal à x^2 tout simplement dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ puisque 7 divise 98.

Notons dans un tableau pour les nombres premiers supérieurs à $\sqrt{98}$ et inférieurs à 49 la moitié de 98 les valeurs des polynômes en question et voyons ceux qui sont éliminés dans chacun des corps premiers.

	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
x^2 (dont on teste la nullité dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$)	121	169	289	361	529	841	961	1369	1681	1849	2209
$x^2 - 2x$ (dont on teste la nullité dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$)	99	143	255	323	483	783	899	1295	1599	1763	2115
$x^2 - 3x$ (dont on teste la nullité dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$)	88	130	238	304	460	754	868	1258	1558	1720	2068

On voit que ne sont conservés que les nombres 19, 31 et 37 qui sont comme attendu les décomposants de Goldbach de 98.

3 Somme des diviseurs d’Euler¹, minimiser / maximiser

L’article d’Euler *Découverte d’une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs* est magique. On reste subjugué par la manière dont le mathématicien a trouvé la formule récurrente de la somme des diviseurs. Même le fait de la programmer la laisse hermétique. On trouve particulièrement esthétique la manière dont les nombres pentagonaux surgissent de la combinaison par différence de la suite des entiers et de la suite des impairs. Ci-dessous une formule récurrente plus simple que celle d’Euler pour calculer la somme des diviseurs d’un entier $\sigma(n)$.

$$\sigma(n) = \frac{12}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{k=n-1} (5k(n-k) - n^2)\sigma(k)\sigma(n-k)$$

On peut voir les nombres premiers comme des minima locaux de la fonction somme des diviseurs.

Puisque la somme des diviseurs d’un nombre premier p vaut $p+1$, $p+q$ est une décomposition de Goldbach de n si et seulement si $\sigma(p) + \sigma(q) = n + 2$. Les décomposants de Goldbach minimisent donc la somme de la somme des diviseurs de p et de la somme des diviseurs de q .

L’idée duale consiste à trouver les décomposants de Goldbach en maximisant le produit des indicateurs d’Euler des deux décomposants. Dominique Ceugniet a vérifié cette idée par programme jusqu’à 7.10^6 ².

1. M. Giard, qui fournit cette formule récurrente différente de celle d’Euler sur la toile dans les notes de la séquence A000203 de l’OEIS fournit comme explication que cette formule provient d’un résultat de Chazy mais ceci serait à confirmer par des spécialistes des fonctions modulaires.

2. une cacahuète devant l’infini.

4 Ma conjecture

Tout nombre pair supérieur à 14 partage un décomposant de Goldbach avec $n - 6$.

5 Addition disjointe

La définition réursive $x \oplus y = x + y - xy$ simplifie considérablement les calculs provenant de l'application du principe d'inclusion-exclusion.

Par exemple,

$$\begin{aligned}((a \oplus b) \oplus c) \oplus d &= ((a + b - ab) \oplus c) \oplus d \\ &= ((a + b - ab) + c - (a + b - ab)c) \oplus d \\ &= (a + b - ab + c - ac - bc + abc) \oplus d \\ &= a + b + c + d - ab - ac - ad - bc - bd - cd + abc + abd + acd + bcd - abcd\end{aligned}$$

6 Rêves d'un prince

On peut trouver sur la toile le journal mathématique de Gauss. On y lit que Gauss a étudié la conjecture de Goldbach le 14 mai 1796 à Göttingen. On peut imaginer que les deux premières lettres mystérieuses du mot GEGAN qui apparaît dans la citation "Vicimus GEGAN" du 11 octobre 1796 sont les initiales respectives de Goldbach et Euler...

Ci-dessous l'extrait de la lettre qu'il a adressée à Sophie Germain, qui s'était fait passer pour un homme M. Leblanc, pour lui envoyer les résultats de ses travaux en théorie des nombres.

Le goût pour les sciences abstraites en général et surtout pour les mystères des nombres est fort rare : on ne s'en étonne pas ; les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de les approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos moeurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés que les hommes à se familiariser avec ces recherches épineuses, sait néanmoins franchir ces entraves et pénétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute qu'elle ait le plus noble courage, des talents tout à fait extraordinaires, le génie supérieur. En effet, rien ne pourrait me prouver d'une manière plus flatteuse et moins équivoque, que les attraits de cette science, qui ont embelli ma vie de tant de jouissances, ne sont pas chimériques, que la prédilection dont vous l'avez honorée.

Plus loin ou dans une autre lettre :

Les notes savantes, dont toutes vos lettres sont si richement remplies, m'ont donné mille plaisirs. Je les ai étudiées avec attention, et j'admire la facilité, avec laquelle vous avez pénétré toutes les branches de l'Arithmétique, et la sagacité avec laquelle vous les avez su généraliser et perfectionner.

Enfin, dans la note 146 de son journal, Gauss écrit :

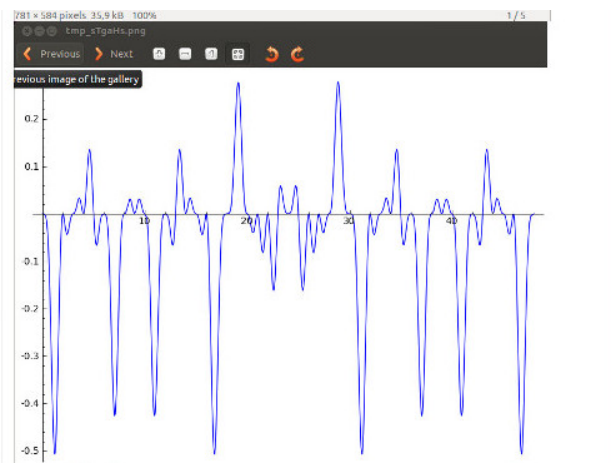
Dedekind a de cette manière vérifié la propriété pour tous les nombres premiers inférieurs à 100.

Annexe : 3 exemples de calculs de produits de sinusoides pour trouver les décomposants de Goldbach des nombres pairs 16, 48 et 98

5 est décomposant de Goldbach de 16.



7, 11, 17 et 19 sont décomposants de Goldbach de 48.



19, 31 et 37 sont décomposants de Goldbach de 98.

