

Bon tempo ou bon, tant pis...

Denise Vella-Chemla, 24 novembre 2024

Lors de sa conférence en l'honneur des 25 ans du Séminaire nord-atlantique de Géométrie non-commutative ¹, mais également des 60 ans de Piotr Hajac, un chercheur de Varsovie ², Alain Connes a parlé de trouver le bon tempo, et c'est bien ce dont il s'agit quand on essaie de comprendre pourquoi les parties imaginaires des zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann adviennent sur la droite critique à tel ou tel rythme.

En compulsant les articles notamment d'Alain Connes et Henri Moscovici, j'ai fini par mettre hier au point une fonction, qui semble avoir presque trouvé ce tempo. Voici le programme utilisé pour "voir" cette fonction à l'œuvre.

```
import cmath
import math
from scipy.special import lambertw

"""
print('les zeros du cosinus hyperbolique sont ')
for n in range(100):
    print('i pi (n + 0.5)', 1j*pi*(n+0.5))
"""

def f(z):
    return((cmath.exp(lambertw(-((z/2)**2)*(2*cmath.pi)/180))).real)

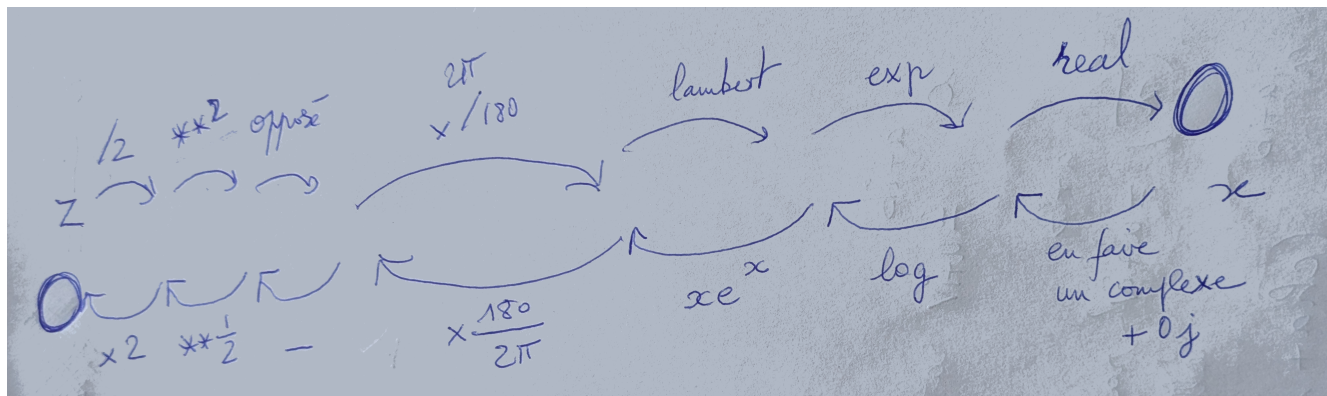
def frecipro(x):
    return(2*((-(cmath.log(x+0*1j)*cmath.exp(cmath.log(x+0*1j)))*180/(2*cmath.pi)))**0.5))

for k in range(1,10000):
    print(k, ' --> ', f(k))
for k in range(1,1000):
    print(k, ' --> ', frecipro(k))
for x in range(2,1000):
    res1 = -frecipro(x).imag
    res2 = zetazero(x-1).imag
    print(x, ' --> ', res1, ' ', res2)
    plt.scatter(x, res1, s=25, color='red')
    plt.scatter(x, res2, s=25, color='blue')
plt.show()
```

Trouver la réciproque de cette fonction donne un peu de peine, il faut savoir que la réciproque de la fonction de Lambert est xe^x et tout bien réciproquer (sic !) dans le bon ordre. Des extraits du résultat du calcul de la fonction f et de sa réciproque $frecipro$ sont fournis en annexe. Ci-dessous, l'image de la recherche de la fonction réciproque, étape par étape.

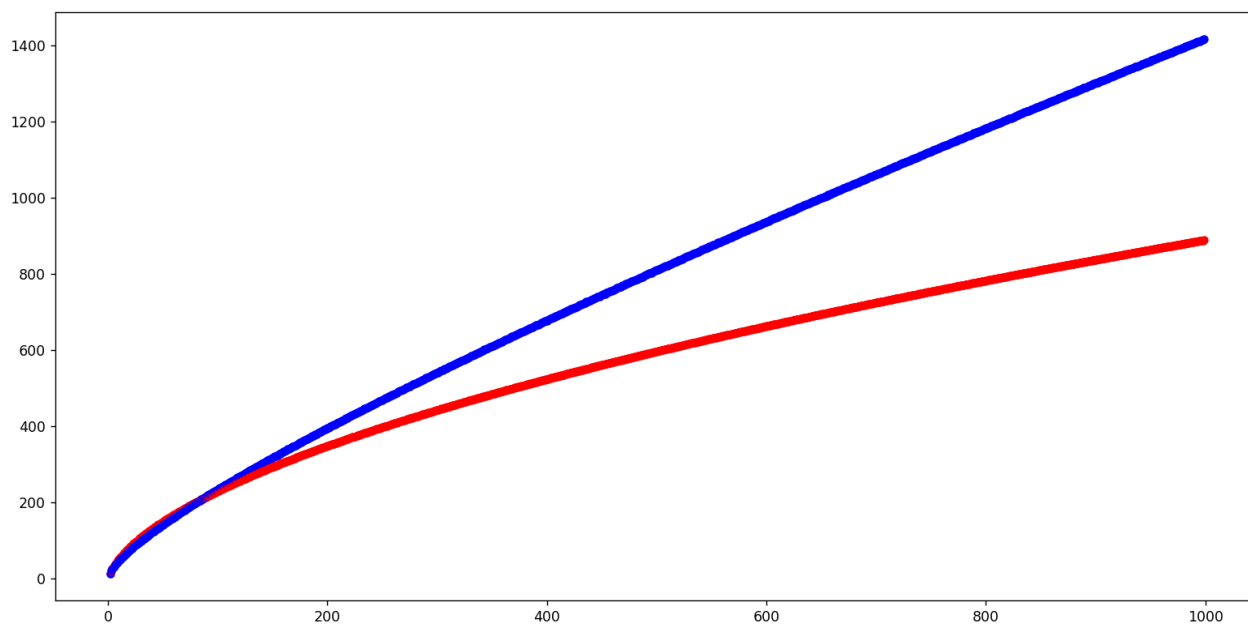
¹North Atlantic Noncommutative Geometry Seminar <https://www.mimuw.edu.pl/en/seminars/north-atlantic-noncommutative-geometry-seminar/>.

²visionnable ici : <https://www.youtube-nocookie.com/embed/1yvSeCmcsJU>.



Ce qui est agréable à regarder, concernant la fonction elle-même, c'est qu'elle semble avoir un rythme, un tempo donc, qui s'accélère. Les parties imaginaires des images des entiers successifs, séparées, dans le bas de la droite des entiers, d'un espacement approximatif de 6.5 vont petit à petit s'espacer de plus en plus : on voit un espacement de 1 environ aux alentours de 100, de 0.5 aux alentours de 500, etc. Ce comportement est provoqué par la définition même de cette fonction réciproque de la fonction de Lambert, qui est $x e^x$.

Mais quand on teste la fonction, si au début, on a l'impression que c'est une bonne idée, on se rend bien vite compte que non.



Annexe : images des entiers successifs par f et par $frecipro$

Le résultat complet du programme est à trouver ici : <https://denisevellachemla.eu/reszerosdecosh.pdf>. On en fournit quelques extraits ci-après.

1 -- > 0.9912348268801342
2 -- > 0.9644540357471738
3 -- > 0.9180025427227111
4 -- > 0.8482243107574337
5 -- > 0.7466135076004062
6 -- > 0.5838866863880804
7 -- > 0.3481077986242361
8 -- > 0.3056143726364006
9 -- > 0.25859059087137415
10 -- > 0.2071778721224076
11 -- > 0.15150031731965438
12 -- > 0.09166789462909816
13 -- > 0.027778873206799243
14 -- > -0.04007828248811789
15 -- > -0.11182341456840304
16 -- > -0.18738347028476096
17 -- > -0.26669152656999356
18 -- > -0.3496859892935394
19 -- > -0.436309929400325
20 -- > -0.5265105275876397
21 -- > -0.6202386059793928
22 -- > -0.7174482302212594
23 -- > -0.8180963690934133
24 -- > -0.9221426014911805
25 -- > -1.0295488627128189
26 -- > -1.140279223595692
27 -- > -1.2542996972831746
28 -- > -1.3715780693750057
29 -- > -1.4920837479792026
30 -- > -1.6157876307921266
31 -- > -1.7426619868207462
32 -- > -1.8726803507543799
33 -- > -2.005817428312508
34 -- > -2.1420490111561543
35 -- > -2.281351900164793
36 -- > -2.423703836057907
37 -- > -2.5690834364876456
38 -- > -2.71747013885181
39 -- > -2.8688441481796096
40 -- > -3.0231863895294113
41 -- > -3.1804784644112702
42 -- > -3.340702610809375
43 -- > -3.5038416664328578
44 -- > -3.6698790348689867
45 -- > -3.838798654351816
46 -- > -4.010584968893243
47 -- > -4.185222901552433
48 -- > -4.362697829644998
49 -- > -4.54299556171524
50 -- > -4.726102316113952
51 -- > -4.912004701041146
52 -- > -5.100689695927654
53 -- > -5.29214463404265
54 -- > -5.486357186225385
55 -- > -5.683315345649647

56 -- > -5.8830074135382615
57 -- > -6.08542198575295
58 -- > -6.290547940191839
59 -- > -6.498374424933205
60 -- > -6.708890847069639
61 -- > -6.922086862181849
62 -- > -7.137952364405712
63 -- > -7.356477477050363
64 -- > -7.577652543728509
65 -- > -7.801468119963704
66 -- > -8.027914965242005
67 -- > -8.256984035478203
68 -- > -8.488666475869238
69 -- > -8.722953614109562
70 -- > -8.95983695394518
71 -- > -9.199308169044896
72 -- > -9.441359097169006
73 -- > -9.685981734617023
74 -- > -9.933168230937522
75 -- > -10.182910883884384
76 -- > -10.435202134604795
77 -- > -10.690034563045531
78 -- > -10.947400883564793
79 -- > -11.207293940738156
80 -- > -11.469706705347306
81 -- > -11.734632270541857
82 -- > -12.002063848164369
83 -- > -12.271994765229948
84 -- > -12.544418460552015
85 -- > -12.819328481506654
86 -- > -13.096718480928091
87 -- > -13.37658221412866
88 -- > -13.658913536036852
89 -- > -13.943706398447485
90 -- > -14.23095484737837
91 -- > -14.520653020528178
92 -- > -14.812795144830618
93 -- > -15.107375534100303
94 -- > -15.404388586765734
95 -- > -15.703828783685484
96 -- > -16.005690686043554
97 -- > -16.309968933320334
98 -- > -16.616658241335497
99 -- > -16.925753400359895
100 -- > -17.237249273292928
101 -- > -17.551140793902906
102 -- > -17.867422965127293
103 -- > -18.186090857430333
...

990 -- > -1053.2890600685012
991 -- > -1055.212982768467
992 -- > -1057.138497669953
993 -- > -1059.0656045282565
994 -- > -1060.9943030989818
995 -- > -1062.9245931380528
996 -- > -1064.8564744017012
997 -- > -1066.7899466464721
998 -- > -1068.725009629221
999 -- > -1070.6616631071133
1000 -- > -1072.5999068376248
1001 -- > -1074.5397405785397
1002 -- > -1076.4811640879486
1003 -- > -1078.424177124251
1004 -- > -1080.3687794461532
1005 -- > -1082.3149708126655
1006 -- > -1084.2627509831066
1007 -- > -1086.212119717097
1008 -- > -1088.16307677456
1009 -- > -1090.115621915727
1010 -- > -1092.0697549011256
...
1989 -- > -3737.5076391823313
1990 -- > -3740.9338999148313
1991 -- > -3744.3615984337125
1992 -- > -3747.7907346374673
1993 -- > -3751.221308424673
1994 -- > -3754.653319693938
1995 -- > -3758.0867683439715
1996 -- > -3761.521654273504
1997 -- > -3764.9579773813775
1998 -- > -3768.3957375664536
1999 -- > -3771.834934727687
2000 -- > -3775.27556876408
2001 -- > -3778.7176395747015
2002 -- > -3782.1611470586963
2003 -- > -3785.6060911152476
2004 -- > -3789.052471643631
2005 -- > -3792.5002885431563
2006 -- > -3795.9495417132216
2007 -- > -3799.400231053265
2008 -- > -3802.8523564627976
2009 -- > -3806.305917841411
2010 -- > -3809.760915088721
2011 -- > -3813.217348104442
2012 -- > -3816.6752167883355
2013 -- > -3820.1345210402137
2014 -- > -3823.5952607599766
2015 -- > -3827.0574358475747
2016 -- > -3830.521046203009
2017 -- > -3833.98609172636
2018 -- > -3837.4525723177603
2019 -- > -3840.9204878774153
2020 -- > -3844.389838305574
2021 -- > -3847.8606235025686
2022 -- > -3851.3328433687793
2023 -- > -3854.806497804648
2024 -- > -3858.2815867106797
...

```

4990 -- > -20167.625249904388
4991 -- > -20175.070099202432
4992 -- > -20182.516220011603
4993 -- > -20189.96361229951
4994 -- > -20197.412276033723
4995 -- > -20204.862211181917
4996 -- > -20212.31341771169
4997 -- > -20219.76589559067
4998 -- > -20227.219644786517
4999 -- > -20234.674665266917
5000 -- > -20242.130956999485
5001 -- > -20249.58851995189
5002 -- > -20257.04735409184
5003 -- > -20264.507459387005
5004 -- > -20271.968835805073
5005 -- > -20279.431483313765
5006 -- > -20286.89540188079
5007 -- > -20294.360591473825
5008 -- > -20301.827052060602
5009 -- > -20309.294783608908
5010 -- > -20316.763786086394
...
9990 -- > -72754.41433297312
9991 -- > -72767.92075381812
9992 -- > -72781.428342346
9993 -- > -72794.93709854277
9994 -- > -72808.44702239452
9995 -- > -72821.9581138876
9996 -- > -72835.47037300812
9997 -- > -72848.98379974208
9998 -- > -72862.49839407588
9999 -- > -72876.01415599539

```

.....

frecipro

```

1 -- > 0j
2 -- > (7.717646788486349e-16 - 12.603873694619013j)
3 -- > (1.189980990450552e-15 - 19.433864380800458j)
4 -- > (1.5435293576972698e-15 - 25.207747389238026j)
5 -- > (1.859427655588307e-15 - 30.36675810336357j)
6 -- > (2.1491793023901847e-15 - 35.09876160026756j)
7 -- > (2.419176648194077e-15 - 39.50815287931838j)
8 -- > (2.6734712705058265e-15 - 43.661099222521976j)
9 -- > (2.9148462302155932e-15 - 47.60305146341007j)
10 -- > (3.1453212888868673e-15 - 51.36699481151239j)
11 -- > (3.3664224815068552e-15 - 54.97785130946637j)
12 -- > (3.579338998300489e-15 - 58.45504190747184j)
13 -- > (3.78502056644971e-15 - 61.814076827457335j)
14 -- > (3.984241000110738e-15 - 65.06759341362296j)
15 -- > (4.1776413689147936e-15 - 68.22606112755825j)
16 -- > (4.365760303153023e-15 - 71.29827646947079j)
17 -- > (4.549055863290198e-15 - 74.29172013444902j)
18 -- > (4.727921696397809e-15 - 77.2128208670381j)
19 -- > (4.9026992156546346e-15 - 80.06715436757904j)
20 -- > (5.0736869449970256e-15 - 82.85959590192901j)

```

| | | | | |
|----|-----|-------------------------|---|----------------------|
| 21 | --> | (5.2411478007148705e-15 | - | 85.59443921894805j) |
| 22 | --> | (5.405314843993018e-15 | - | 88.27549049662986j) |
| 23 | --> | (5.5663958816368065e-15 | - | 90.90614347765165j) |
| 24 | --> | (5.724577186459236e-15 | - | 93.4894402279075j) |
| 25 | --> | (5.880026535966167e-15 | - | 96.02812076200371j) |
| 26 | --> | (6.032895716870378e-15 | - | 98.52466394507731j) |
| 27 | --> | (6.183322606504471e-15 | - | 100.9813214848484j) |
| 28 | --> | (6.331432915792723e-15 | - | 103.40014639651062j) |