CRITIQUES DE LIVRES

BULLETIN (Nouvelles séries)
de la Société américaine de Mathématiques
Volume 33, Numéro 4, Octobre 1996

Noncommutatine geometry, par Alain Connes, Academic Press, Paris, 1994, xiii+661 pp., ISBN 0-12-185860-X ; publié d'abord en français par les éditions InterEditions, Paris (Géométrie Non Commutative, 1990).

L'analyse abstraite est une des branches les plus jeunes des mathématiques, mais elle est maintenant assez envahissante. Pourtant, il n'y a pas si longtemps elle était considérée comme plutôt étrange. L'attitude générale des mathématiciens avant la seconde guerre mondiale peut être brièvement évoquée en racontant l'histoire suivante racontée par feu Norman Levinson. Pendant l'année post-doctorale de Levinson à Cambridge, alors qu'il étudiait avec Hardy, von Neumann est venu là donner une conférence. Hardy (représentant alors la quintessence de l'analyste classique) fit cette remarque après la conférence : "Bien sûr, ce jeune est très intelligent. Mais étaient-ce des *mathématiques* ?"

L'analyse abstraite est née dans les années 20 du défi que constituait la mécanique quantique et de la réponse apportée à ce défi par von Neumann et M. H. Stone. Le théorème de Stone-von Neumann (e.g., [1]), qui a spécifié la structure de la représentation unitaire générique des relations de Weyl, a établi l'équivalence des formalismes de la mécanique quantique de Heisenberg et de Schrödinger (il est intéressant que ces deux derniers ne l'aient jamais compris. La morale pourrait être que les physiciens rigoureux mathématiquement n'attendaient pas l'approbation des physiciens pratiques, aussi fondamental que soit leur travail). C'était le premier théorème non trivial de structure pour une représentation unitaire en dimension infinie d'un groupe non-commutatif et du coup, un prototype important de la théorie de la représentation des groupes de Lie en dimension infinie. Les écrits de Von Neumann montrent clairement qu'il avait compris l'importance de sa théorie pour la mécanique quantique, et il encouragea grandement son ami Wigner à développer la théorie dans le cas aisé du groupe de Poincaré. L'article de Wigner qui présente cela [2] vint après les travaux les plus référencés du vingtième siècle [1].

Von Neumann lui-même releva le défi plus grand encore de formaliser les mathématiques de la phénoménologie quantique. Avec Stone, il établit le théorème spectral dans un espace complexe de Hilbert et la théorie de l'extension des opérateurs hermitiens, qui fut largement un point culminant de la théorie des opérateurs hermitiens, et le fait qu'il ait eu la pré-science avec une vingtaine d'années d'avance, d'utiliser le terme "spectre", reste remarquable.

Peu de temps après, von Neumann prouva le théorème du double commutant [3], qui était à ce moment-là un problème frappant dans le contexte non-commutatif, et plus spécifiquement dans le champ de la mécanique quantique. L'article était hautement suggestif d'une théorie de dimension infinie comparable au théorème de structure de Wedderburn. Rétrospectivement, il marque le début de l'analyse abstraite et il a amené à la série classique des articles sur les *Anneaux d'opérateurs*, peut-être le travail majeur le plus original des mathématiques du vingtième siècle.

1. Une collection des travaux les plus référencés a été publiée par Springer des années après. Il est intéressant, et représentatif des relations entre les mathématiques et la physique, que l'article de Wigner ait été originellement soumis au journal de physique Springer. Il a été rejeté, et Wigner cherchait un journal de physique qui l'accepterait lorsque von Neumann lui dit de ne pas s'inquiéter, il réussit à le faire passer dans les Annales de mathématiques. Wigner fut content de cette offre (information verbale de Wigner).

Il y avait trois motivations principales pour la série des articles sur les “anneaux”, comme von Neumann les a appelés. La première était, c’est sûr, le défi posé par la mécanique quantique. En particulier, le caractère divergent de la théorie quantique des champs, bizarrement en contraste avec sa base intuitive simple, et von Neumann espérait réconcilier ces deux caractéristiques contrastées en trouvant le formalisme adéquat. Une seconde application potentielle d’importance était de structurer les représentations infini-dimensionnelles des groupes non abéliens, problème qu’il avait déjà résolu dans le cas du groupe de Heisenberg. Une troisième motivation était la généralisation des théorèmes de structure de Wedderburn.

Aujourd’hui, les divergences en théorie quantique des champs apparaissent comme des conséquences probables d’une géométrie très simple de l’espace-temps. Dans l’univers d’Einstein $R^1 \times S^3$, qui n’est pas un modèle moins raisonnable que l’espace de Minkowski et qui l’approxime bien localement, les divergences sont absentes dans le cas crucial de l’électrodynamique quantique [4] et dans toutes les probabilités de la théorie électro-faible aussi. Les extensions et les applications du lemme de Poincaré au cas en dimension infinie servent à établir des intégrales relativement invariantes des champs quantiques d’opérateurs auto-adjoints dans l’espace de Hilbert [5, 6, 7].

La théorie de l’intégration non-commutative, dans laquelle on intègre des opérateurs plutôt que des fonctions, relativement à des mesures additives calculables sur des projections plutôt que sur des ensembles [8], avec la théorie de l’intégrale directe de von Neumann (i.e., décomposition d’algèbres), comble adéquatement le besoin d’une base abstraite de théorie des groupes, e.g., l’établissement du théorème de Plancherel pour les groupes localement compacts [9]. La théorie de la structure de Wedderburn a été étendue aux anneaux arbitraires de “type Γ”, i.e. les types que l’on trouve le plus communément en pratique. Les autres types sont à peine moins rebutants qu’ils n’en ont l’air après complétion de leur théorie globale il y a quelques dizaines d’années. La théorie locale dépendant de la classification des anneaux simples centraux, ou des “facteurs”, a été étudiée attentivement avec énergie et ingéniosité, mais elle reste insaisissable et apparaît beaucoup plus réalisable qu’une classification complète des groupes discrets infinis, il n’y a d’ailleurs pas de besoin apparent d’une telle classification dans les autres parties de la science mathématique.

Ainsi, le programme de base de von Neumann a en grande partie été effectivement réalisé. Mais les algèbres d’opérateurs non-commutatifs constituent un paradigme naturel pour un certain nombre d’applications secondaires, de la théorie quantique à la topologie, l’algèbre, et la géométrie différentielle. Il y a un petit doute de l’auteur de ce livre merveilleux, et très bien imprimé, que ces applications puissent être surmontées par les analystes abstraits de sa génération. Le sujet de la “géométrie non-commutative” a son origine dans le programme de von Neumann pour les anneaux d’opérateurs ainsi que dans la théorie de la représentation pour les algèbres de Banach de Stone, Gelfand, et autres. Ce dernier travail a fourni une interprétation géométrique pour les algèbres commutatives sous la forme d’un idéal maximal ou d’un espace similaire. Ce travail d’avant-guerre a été rapidement suivi par l’extension non-commutative due à Gelfand et Neumark qui a amené la théorie des algèbres de Banach en relation proche à l’espace de Hilbert. Du point de vue de la mécanique quantique, l’idée avancée par ces travaux était que l’“espace-temps” était plus logiquement non pas un concept primaire mais plutôt un concept dérivé de l’algèbre des “observables” (ou opérateurs). Dans sa forme la plus simple, l’idée était que l’espace-temps pourrait être, à un niveau plus profond, le spectre d’une sous-algèbre commutative appropriée qui est invariante sous l’action du groupe de symétrie fondamental (e.g., [11]).

$H = L_2(M)$, consistant en une multiplication par f, agissant sur le domaine des fonctions g dans H tel que fg est aussi dans H. Inversement, tout opérateur normal dans l’espace de Hilbert (ou ensemble d’opérateurs normaux commutant) est unitairement équivalent à un tel opérateur de multiplication (ou un ensemble de tels opérateurs). De plus, l'application $f \to M_f$ est de façon évidente un "isomorphisme" algébrique, qui est essentiellement applicable à des opérateurs aussi bien non-bornés ("mesurables") que bornés. Ainsi, à nouveau, il y a une base naturelle pour remplacer les espaces de fonctions par les opérateurs.

Pour donner un exemple simple, si f est une fonction dans l'espace euclidien, sa différentielle $df = \sum_j (\partial_j f) dx_j$ (où $\partial_j = \partial/\partial x_j$) est équivalente à la "differentielle" de l'opérateur de multiplication correspondant, "dM_f" $= \sum_j [\partial_j, M_f] dx_j$. Cela amène à la formulation de la différentielle dA d'un opérateur A sur un espace donné comme l'application linéaire $X \to [X, A]$ des espaces vectoriels dans les opérateurs. Une 1-forme "quantifiée" est de manière correspondante principalement une application linéaire convenable des espaces vectoriels vers les opérateurs. Avec les restrictions qui conviennent, ainsi qu'avec les notions de fermeture et d'exactitude, des formes de degré arbitraire. Ainsi, les formes quantifiées apparaissent comme naturelles dans un modèle purement mathématique, mais elles impliquent plus que le "non-sens abstrait généralisé" qu'elles semblent représenter. Elles émergent de considérations théoriques de la théorie quantique et forment un ingrédient essentiel, dans le cas infini-dimensionnel, d'un traitement systématique des "produits" des champs quantiques, qui sont au mieux des opérateurs de distributions valuées (e.g., [5, 6, 7]).

Comme indiqué ci-dessus, la différence entre C^*- et W^*-algèbres est non seulement technique mais aussi fonctionnelle. A cause de la caractérisation algébrique intrinsèque des C^*-algèbres, la notion naturelle d'équivalence est celle d'$*$-isomorphisme. L'équivalence unitaire implique bien sûr l'isomorphisme algébrique, mais les invariants correspondant sont trop compliqués pour être très utiles. Même selon la relation d'équivalence d'$*$-isomorphisme, les invariants ne sont pas simples. Il y a juste autant de classes d'équivalences de C^*-algèbres commutatives qu'il y a d'espaces compacts locaux, et les classes d'équivalence des C^*-algèbres non-commutatives sont beaucoup plus étendues.

Dans le cas des W^*-algèbres, l'équivalence unitaire (ou "spatiale") est une notion naturelle, et la classification est facilitée par le fait qu'un isomorphisme algébrique conjointement avec un manque adéquat de multiplicité non-triviale suffit à impliquer une équivalence unitaire. Le cas le plus simple est celui des algèbres maximales abéliennes auto-adjointes des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert, dont un isomorphisme $*$-algébrique implique l'équivalence unitaire. Mais en général, la théorie des W^*-algèbres est en relation avec les sous-espaces invariants et la réduction correspondante de l'algèbre.

Dans le cas des W^*-algèbres de "type I" dans le schéma Murray von Neumann, il y a un théorème de structure presque explicite [10] qui classe ces algèbres, selon l'équivalence unitaire. Les algèbres de type I incluent la plupart des algèbres auxquelles on a en général affaire "concrètement" en pratique, mais une exception notable est celle des algèbres de Clifford sur un espace de Hilbert. Ceci est le cas le plus simple des W^*-algèbres de type II, et leur découverte dans le début des années 30 par von Neumann (voir [13] dans une forme différente) a rendu très frappant le fait qu'il y avait des phénomènes qualitativement nouveaux dans les W^*-algèbres de dimension infinie. En particulier, les algèbres de Clifford sont des algèbres centrales simples qui sont radicalement différentes des algèbres de tous les opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert. En même temps, cette sorte d' algèbre joue un rôle fondamental dans l'analyse des champs quantiques sans fermions. Selon une notation souvent utilisée, c'est une algèbre engendrée par les Q fermions canoniques, et ainsi l'analogue d'une algèbre commutative engendrée par les observables canoniques Q bosoniques. L'algèbre de Clifford est le plus simple des facteurs qui sont des limites directes d'algèbres de matrices, et pour l'instant seules les familles de facteurs relativement accessibles ont été totalement classifiées.

Les C^*- et W^*-algèbres ont en commun qu'elles admettent toutes des notions d'intégration. Un état E d'une C^*-algèbre est une fonctionnelle linéaire positive, qui dans le cas commutatif est équivalente à une mesure sur le spectre (ou espace idéal maximal) de l'algèbre. Dans le cas non-commutatif, il n'est en général pas central, i.e., $E(AB)$ et $E(BA)$ sont génériquement non égaux. Cela limite la portée de la théorie de l'intégration C^*-algébrique, mais leur multitude d'états rend leur théorie limitée assez utile néanmoins. Par exemple, les fonctions définies positives sur les groupes déterminent les états et peuvent effectivement être traitées en fonction d'eux. Ce sont des généralisations des théorèmes de Radon-Nikodym et d'autres théorèmes de base en théorie de la mesure appliquée au contexte des C^*-algèbres, à commencer par [12, 14].

Un "poids" sur une W^*-algèbre A est une fonction non-négative additive calculable sur les projections qui est unitairement invariante et qui ainsi généralise la notion de mesure applicable dans le cas abélien. Tous les théorèmes de base et les idées de la théorie de l'intégration de Lebesgue s'étendent au cas non-commutatif, et les opérateurs "mesurables" peuvent être ajoutés et multipliés à l'envi, presque comme les fonctions mesurables et différemment des opérateurs non-bornés en général. Une application typique est la théorie de Plancherel pour les groupes généraux uni-modulaires localement compacts. Quand A a un centre trivial, i.e. est un "facteur", il y a un poids essentiellement unique, qui est la fonction dimension de Murray-von Neumann.

Voici les fondations sur lesquelles est basée la Géométrie non-commutative. La partie "géométrie" du titre est un peu programmatique ; un titre plus descriptif pourrait être Sujets d'algèbres d'opérateurs et leurs applications. L'approche est suggestive et informelle, bien que techniquement hautement sophistiquée. L'auteur se promène de ses principaux domaines et travaux afférents à une attention minimale (ou des références) aux travaux précédents, incluant quelques travaux idéalement basiques. Le résultat apparaît comme un tour de force brillant et soutenu qui fascinera les personnes travaillant dans ce domaine et ayant un bagage suffisant concernant les principaux axes d'investigation de l'auteur mais pourrait rebuter des non-spécialistes. Ce serait dommage, car le livre établit des relations entre divers aspects de son sujet qui ne sont pas très bien représentés dans la littérature, spécialement ceux concernant les directions topologique et homologique.

Chacun des six chapitres a son propre thème, représentant un intérêt majeur de l'auteur : I, "Espaces non-commutatifs et théorie de la mesure" ; II, "Topologie et K-théorie" ; III, "Cohomologie cyclique et géométrie différentielle" ; IV, "Calcul quantifié" ; V, "Algèbres d'opérateurs" ; VI, "Aspect métrique de la géométrie non-commutative". Tous les chapitres contiennent les $*$-algèbres de façon plus ou moins étendue mais sont sinon reliés de manière assez libre. Une introduction fournit une vue globale de chaque chapitre. Parmi les thèmes favoris qui sont récurrents, on trouve (i) les feuilletages, (ii) la cohomologie, (iii) la K-théorie, (iv) la classification des facteurs, et (v) les interprétations des aspects de la physique mathématique.

Le dernier chapitre est peut-être le plus nouveau. Il contient une tentative courageuse et intéressante d'amener la considérable expertise de l'auteur et sa flexibilité sur une grande variété de sujets en physique, sujets qu'il voit reliés aux algèbres d'opérateurs. Ceux-ci incluent les états KMS (Kubo-Martin-Schwinger), dont il considère apparemment la théorie comme fondamentale en mécanique statistique. Malheureusement, il n'y pas de base empirique apparente pour ça, et jusqu'à maintenant, la théorie apparaît comme une abstraction d'une initiative physique qui n'a pas été très fructueuse.

Un sujet physique plus vivant se manifeste par le caractère discret (ou rationnel) de certaines quantités observables. Une grande variété d'hypothèses mathématiques a été avancée dans la littérature de la physique mathématique pour expliquer ces observations. Le livre présente une théorie mathématique frappante et intriquée due à Bellissard qui traite les cas entiers. Ceci est basé sur le "tore non-commutatif", une application de la cohomologie cyclique.

L'initiative la plus remarquable dans la direction de la physique est une interprétation de l'unification de l'électromagnétisme et des interactions faibles. Le "modèle standard" dû à Glashow, Weinberg, et Salam a eu un certain succès empirique, modulo certaines prescriptions adéquates de renormalisation et de corrections des énergies des hauts rayons. Comme l'explique l'auteur, ce modèle est à la base un modèle phénoménologique et il est difficilement acceptable comme théorie ultime. Le livre présente une reformulation mathématique sophistiquée du modèle standard, qui pourrait avoir le potentiel espéré d'aller au-delà de lui. C'est exemplaire que l'auteur applique son immense expertise mathématique à la physique théorique ; les mathématiques pures de haut niveau sont devenues trop repliées sur elles-mêmes et elles ont besoin du défi des connexions avec d'autres domaines. Cependant, l'interprétation donnée est essentiellement plus *descriptive* qu'*explicative.* Il n'est pas proposé de résolution de la question ancienne de savoir pourquoi l'interaction électromagnétique est invariante par inversion alors qu'il est proposé que les interactions faibles soient essentiellement non-invariantes. De plus, les efforts vers la physique mathématique semblent ignorer quelques principes physique de base - la causalité, la stabilité (effectivement, la positivité de l'énergie), etc. - pour obtenir une solution technique rapide. Cela semble représenter une sorte de naïveté qui contraste bizarrement avec le très haut niveau de connaissances mathématiques.

Mathématiquement, le chapitre du livre le plus original est celui qui traite de cohomologie cyclique, qui subsume les formes quantifiées décrites plus tôt mais qui est plus général. C'est, pourtant, loin d'être un exposé systématique du sujet, et cela n'est pas destiné à l'être. C'est plutôt un essai sur plusieurs ramifications, applications aux feuilletages, topologie et autres. Cela apparaît techniquement très ingénieux mais peut-être un peu court sur chaque problème externe intéressant à son propre titre.

Le chapitre qui fait le plus autorité est celui sur les W^*-algèbres, qui traite principalement de la classification des facteurs. L'idée initiale de Murray von Neumann était que la structure de la W^*-algèbre de l'effet de Hall quantique (en deux dimensions) peut en général être réduite à celle de ses facteurs via la décomposition d'une algèbre par rapport à son centre. La théorie de la réduction de von Neumann fournit une décomposition de toute W^*-algèbre donnée (sur un espace séparable) relativement à toute algèbre booléenne donnée de ses sous-espaces invariants. Cela implique en particulier que toute W^*-algèbre est une "intégrale directe" de facteurs. De manière formelle, cette "théorie locale" réduit le problème au cas des facteurs, mais la théorie "globale" est plus puissante et illustrante en pratique et présente moins de difficultés en terme de mesurabilité. Ainsi, en analyse harmonique sur les groupes de Lie simples non-compacts, le seul facteur impliqué est celui de tous les opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert séparable, comme cela découle du travail fondateur d'Harish-Chandra, mais on est encore loin de savoir établir la théorie de Plancherel pour de tels groupes.

Le livre fournit effectivement l'esprit et le goût de la théorie de Connes et devrait être assez stimulant et utile pour ceux qui font de la recherche dans ce domaine. D'un autre côté, l'insistance technique et le peu d'éléments fournis quant à son aspect idéel et ses origines historiques pourrait repousser les non-spécialistes. Il serait probablement difficile d'utiliser ce livre comme référence ou source d'information précise, en partie du fait du manque des numéros de pages de l'index. C'est plutôt un livre ressemblant à un long discours ou à une lettre à des amis. Par exemple, son style informel est à peu près à l'opposé du style crispant définition-théorème-preuve que l'on pourrait attendre de Connes, et cela peut être un peu frustrant pour ceux qui ne sont pas déjà au top quant à la maîtrise du matériau. Est fournie, cependant, une bibliographie longue ainsi qu'un bref résumé des notations.

Comme compte-rendu effervescent et déjà soutenu d'une grande étendue d'aspects avancés et subtils de l'analyse abstraite, ce livre apparaît d'une qualité précieuse et est certainement unique en son genre.

Bibliographie

1. J. von Neumann, *Die Bindeutigket der Schrodingerschen Operatoren*, Math. Ann. **104** (1931), 570-578.

2. E. Wigner, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Ann. Math. **40** (1939), 149-204.

3, J. von Neumann, *Zur Algebra der Funktionoperatoren*, Math. Ann. **102** (1920), 370-427.

4. I. Segal and Z. Zhou, *Convergence of quantum electrodynamics in a curved deformation of Minkowski space*, Ann, Phys. *232* (1904), 61-87. MR **95c** :81174

5. J. Pedersen, I. Segal, and Z. Zhou, *Nonlinear quantum fields in ≥ 4 dimensions and cohomology of the infinite Heisenberg group*, Trans. Amer. Math. Soc. **345** (1994), 73-95. MR.**95a** :81158

6. I. Segal, *Rigorous covariant form of the correspondence principle*, Proceedings, 1094 J. von Neumann Symposium (W. Arveson, T. Branson, I. Segal, eds.), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 175-202.

7. ________, *Complex noncommutative infinite-dimensional analysis*, Proceedings, 1994 Norbert Wiener Symposium (D. Jerison, I Singer, and D. Stroock, eds.) (in preparation).

8. ________, *A non-commutative extension of abstract integration*, Ann. Math. (2) **57** (1953), 401-457. MR **14** :991f

9. ________, *An extension of Plancherel's theorem to separable unimodular groups*, Ann. Math. (2) **52** (1950), 272-292. MR **12** :157F

10. ________, *Decompositions of operator algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 9 (1951). MR **13** :472b

11. ________, *A class of operator algebras which are determined by groups*, Duke Math, J. **18** (1951), 221-265. MR **13** :534b

12. ________, *Irreducible representations of operator algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 73-88, MR **8** :520b

13. J. von Neumann, *Continuous geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **22** (1936), 92-100.

14. H. A. Dye, *The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 243-280. MR **13** :662b

Irving Segal
Massachusetts Institute of Technology