Trouver un passage vers un lieu que quelqu'un connaît (Denise Vella-Chemla, 27.5.2017)

On a exposé dans une note récente une manière de paver le plan à l'aide de tuiles bicolores. Ce pavage permettait de représenter les décompositions des nombres pairs en sommes de deux impairs.

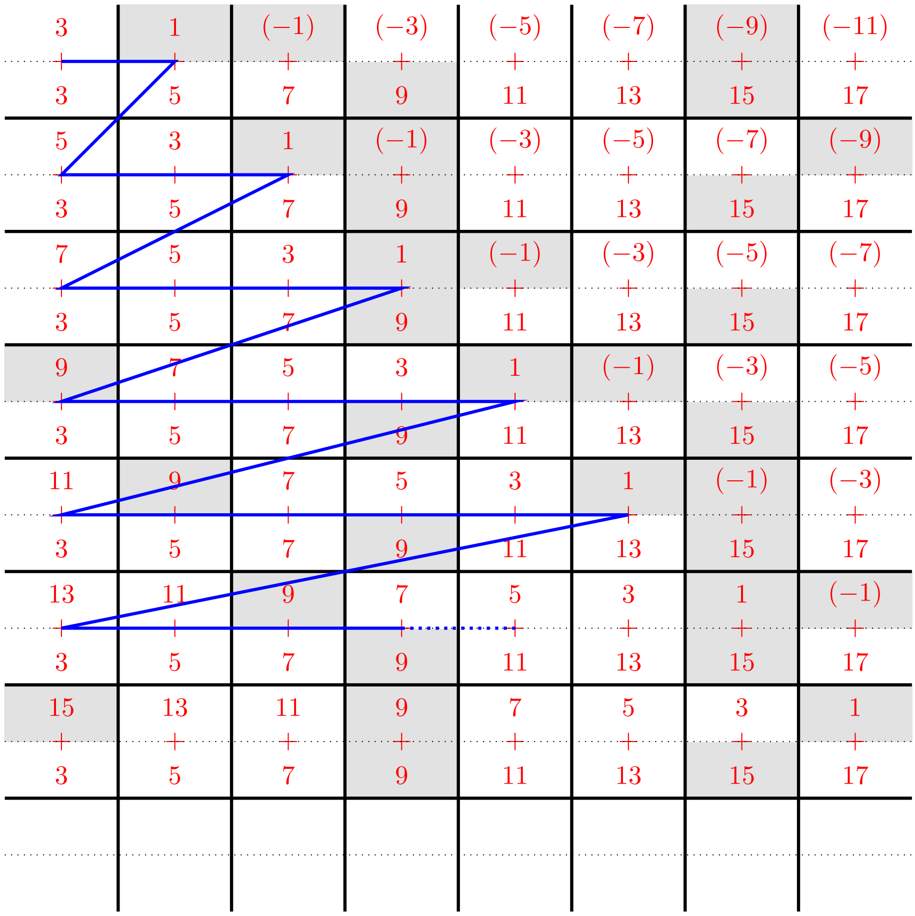
Pour transformer le pavage que l'on a proposé en un pavage de Penrose, on ne considère plus que des tuiles rectangulaires élémentaires. Un nombre premier est codé par une tuile rectangle blanche tandis qu'un nombre composé est codé par une tuile rectangle grise. Pour mémoire, on note les décompositions dans les tuiles, le premier sommant est codé par le rectangle du bas des carrés délimités et le second sommant est codé par le rectangle du haut.

Si l'on oublie les nombres codés, on note que le pavage ne doit respecter que deux contraintes : les rectangles parties hautes des tuiles (codant toutes un même nombre) doivent coïncider (i.e. être de la même couleur) le long de diagonales descendantes tandis que les rectangles parties basses des tuiles (codant toutes un même nombre) doivent coïncider (i.e. être de la même couleur) verticalement.

$3 + 3$	$1 + 5$	$(-1) + 7$	$(-3) + 9$	$(-5) + 11$	$(-7) + 13$	$(-9) + 15$	$(-11) + 17$
$5 + 3$	$3 + 5$	$1 + 7$	$(-1) + 9$	$(-3) + 11$	$(-5) + 13$	$(-7) + 15$	$(-9) + 17$
$7 + 3$	$5 + 5$	$3 + 7$	$1 + 9$	$(-1) + 11$	$(-3) + 13$	$(-5) + 15$	$(-7) + 17$
$9 + 3$	$7 + 5$	$5 + 7$	$3 + 9$	$1 + 11$	$(-1) + 13$	$(-3) + 15$	$(-5) + 17$
$11 + 3$	$9 + 5$	$7 + 7$	$5 + 9$	$3 + 11$	$1 + 13$	$(-1) + 15$	$(-3) + 17$
$13 + 3$	$11 + 5$	$9 + 7$	$7 + 9$	$5 + 11$	$3 + 13$	$1 + 15$	$(-1) + 17$
$15 + 3$	$13 + 5$	$11 + 7$	$9 + 9$	$7 + 11$	$5 + 13$	$3 + 15$	$1 + 17$
$17 + 3$	$15 + 5$	$13 + 7$	$11 + 9$	$9 + 11$	$7 + 13$	$5 + 15$	$3 + 17$
$19 + 3$	$17 + 5$	$15 + 7$	$13 + 9$	$11 + 11$	$9 + 13$	$7 + 15$	$5 + 17$
$21 + 3$	$19 + 5$	$17 + 7$	$15 + 9$	$13 + 11$	$11 + 13$	$9 + 15$	$7 + 17$

On cherche à transformer ce pavage en un pavage de Penrose à base de triangles. On va pour cela associer au pavage une chaîne de booléens. Ensuite, on associera à cette chaîne de booléens un pavage de Penrose en appliquant l'opération inverse de celle fournie par Grünbaum et Shephard dans *Tilings and patterns* [3] : dans ce cadre, la chaîne de booléens associée à une petite tuile code la forme des tuiles qui la contiennent lors des modifications successives du pavage qui rendent les tuiles du pavage de plus en plus grosses.

Le codage du pavage qu'on a proposé par une chaîne de booléens s'effectuera en ayant à l'esprit celui de la diagonale de Cantor : on fait par exemple le choix arbitraire de ne s'intéresser qu'à la partie du pavage dont les 2 sommants sont positifs, dont on parcourt les éléments dans l'ordre indiqué par la ligne brisée bleue. Pour chaque tuile carrée, on code d'abord le premier sommant (rectangle inférieur) puis le second sommant (rectangle supérieur) par un 0 s'il est blanc et par un 1 s'il est gris.



On obtient la suite de booléens suivante :

$$0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, \ldots$$

à mettre en regard de la suite de nombres :

$$3, 3, 5, 1, 3, 5, 5, 3, 7, 1, 3, 7, 5, 5, 7, 3, 9, 1, 9, 3, 9, \ldots$$

Nota : on aurait pu au lieu de ce choix parcourir les décompositions selon une spirale "à la Ulam", à partir de la décomposition $1 + (-1)$ par exemple.

Comment maintenant "repartir en arrière" de la chaîne de booléens trouvée à une portion d'un pavage de Penrose ?

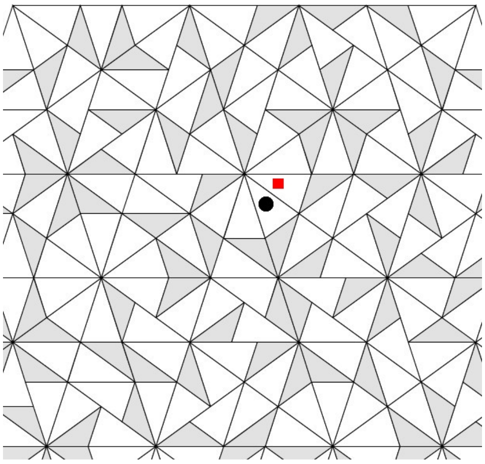
On rappelle comment une chaîne de booléens est associée à une petite tuile du pavage initial : cette chaîne exprime la manière dont la petite tuile est progressivement "absorbée" dans des tuiles de plus en plus grosses.

Un pavage de Penrose à base de triangles est constitué de deux sortes de tuiles : les grosses tuiles (de la forme du chapeau du clown blanc, triangles isocèles à deux grands côtés et un petit côté) et les petites tuiles (de la forme d'un chapeau chinois, triangles isocèles à deux petits côtés et un grand côté). Chaque triangle a deux sommets d'une couleur et un sommet d'une autre, une flèche oriente l'arc entre deux sommets de même couleur d'une tuile. Deux tuiles peuvent être accolées si leur arête commune a ses deux sommets de la même couleur dans les 2 tuiles ainsi que la même orientation.

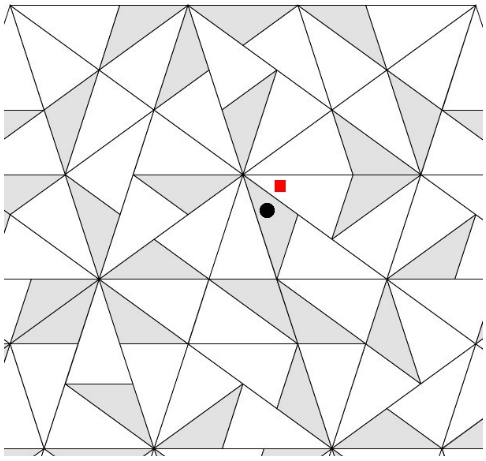
On peut transformer un pavage en faisant grossir ses pièces. Pour cela, on applique successivement et alternativement 2 transformations :

— l'une consiste à effacer toutes les arêtes courtes du pavage qui relient deux sommets qui sont de la même couleur ;
— l'autre consiste à effacer toutes les arêtes courtes du pavage qui relient des sommets de couleur différente.

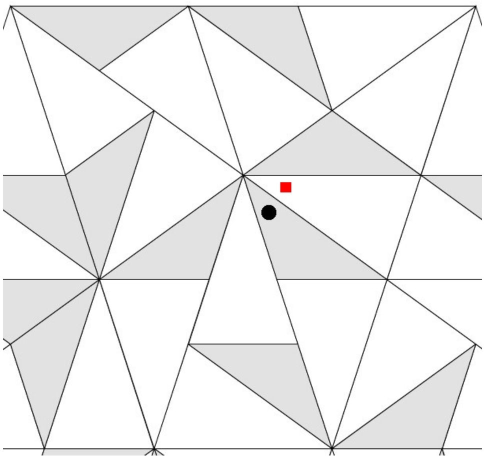
On associe une séquence de booléens à l'une des petites tuiles initiales du pavage en regardant la forme des pièces dans lesquelles elle se retrouve au fur et à mesure que sont effectuées les deux transformations du pavage explicitées ci-dessus : un booléen 1 à la position n de la séquence code que la pièce est dans un gros triangle (de la taille courante) au bout de n transformations tandis qu'un booléen 0 code que la pièce est dans un petit triangle (de la taille courante).



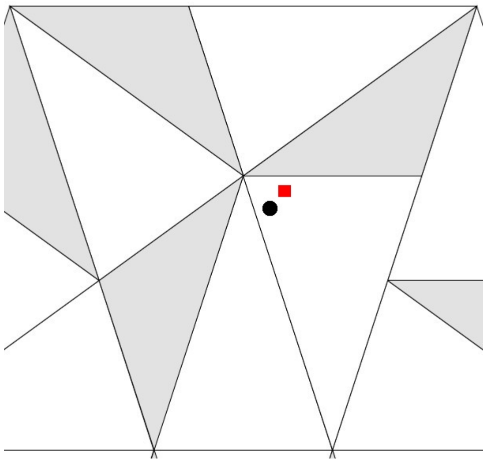
(1)



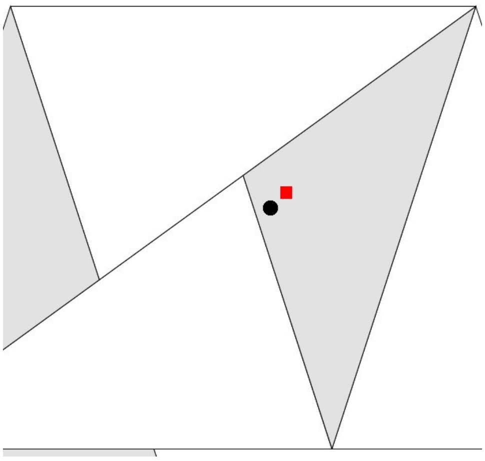
(2)



(3)



(4)



(5)

On a utilisé pour dessiner les figures ci-dessus le codage en Tikz du pavage de Penrose fourni par Paul Gaborit, que l'on remercie, dans cette page : http://www.texample.net/tikz/examples/penrose-tiling/.

La séquence de booléens associé à la forme marquée d'un petit disque noir est 10010 car cette pièce se trouve dans une petite pièce à la première étape, dans une grosse pièce aux seconde et troisième étape, dans une petite pièce à la quatrième étape et dans une grosse pièce à la cinquième étape.

La séquence de booléens associé à la forme marquée d'un petit carré rouge est 11110 car cette pièce se trouve dans une petite pièce aux quatre premières étapes et dans une grosse pièce à la cinquième étape.

Il est difficile de dessiner un pavage de Penrose tel que la séquence de booléens qu'on a identifiée par notre sorte de numérotation des pièces "à la Cantor" serait exactement associée à l'une de ses pièces mais cela doit être théoriquement envisageable.

Bibliographie

[2] A. Connes, *Géométrie non-commutative*, Dunod, 1990.

[3] B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Tilings and patterns*, Freeman and company, New York, 1987.