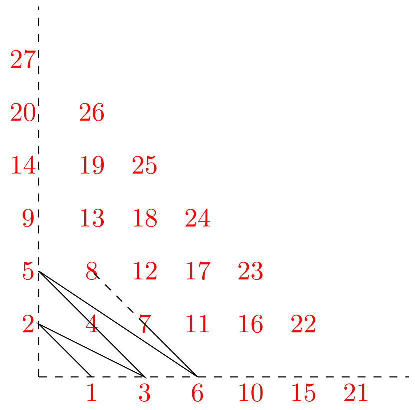
Picorer l'aléa (Denise Vella-Chemla, 22.4.2019)

On voudrait montrer ici, de façon imagée ainsi que par programme, l'aléa qui gouverne le fait d'être premier ou pas pour les nombres. On utilise une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, utilisée par Cantor, qu'on illustre ainsi :



Voici le programme qui permet d'obtenir une telle numérotation [1] :

```
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#define GREEN    "\033[0;32m"
#define WHITE     "\033[1;37m"

int main (int argc, char* argv[])
{ int x, y, res, nmax, nbprime, nbprimedanscarreCantor ;

  nmax = 17 ;
  nbprime = 1 ;
  for (x = 3 ; x <= nmax*nmax ; x = x+2)
    if (prime(x)) nbprime = nbprime+1 ;
  nbprimedanscarreCantor = 0 ;
  for (y = 0 ; y <= nmax ; ++y) {
      for (x = 0 ; x <= nmax ; ++x) {
          res = y+((x+y)*(x+y+1))/2 ;
          if (prime(res)) {
              std::cout << "\033[0;32m" ;
              nbprimedanscarreCantor = nbprimedanscarreCantor+1 ;
          }
          else std::cout << "\033[1;37m" ;
            printf("%5d   ",res) ;
      }
      std::cout << "\n\n" ;
  }
  std::cout << "vrai nombre de premiers " << nbprime ;
  std::cout << " nb premiers dans carre Cantor " ;
  std::cout << nbprimedanscarreCantor << "\n" ;
}
```

1. pour gagner en lisibilité, on a supprimé du programme la fonction booléenne *prime* qui est à ajouter.

et son résultat pour $n = 17$:

0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153
2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79	92	106	121	137	154	172
5	8	12	17	23	30	38	47	57	68	80	93	107	122	138	155	173	192
9	13	18	24	31	39	48	58	69	81	94	108	123	139	156	174	193	213
14	19	25	32	40	49	59	70	82	95	109	124	140	157	175	194	214	235
20	26	33	41	50	60	71	83	96	110	125	141	158	176	195	215	236	258
27	34	42	51	61	72	84	97	111	126	142	159	177	196	216	237	259	282
35	43	52	62	73	85	98	112	127	143	160	178	197	217	238	260	283	307
44	53	63	74	86	99	113	128	144	161	179	198	218	239	261	284	308	333
54	64	75	87	100	114	129	145	162	180	199	219	240	262	285	309	334	360
65	76	88	101	115	130	146	163	181	200	220	241	263	286	310	335	361	388
77	89	102	116	131	147	164	182	201	221	242	264	287	311	336	362	389	417
90	103	117	132	148	165	183	202	222	243	265	288	312	337	363	390	418	447
104	118	133	149	166	184	203	223	244	266	289	313	338	364	391	419	448	478
119	134	150	167	185	204	224	245	267	290	314	339	365	392	420	449	479	510
135	151	168	186	205	225	246	268	291	315	340	366	393	421	450	480	511	543
152	169	187	206	226	247	269	292	316	341	367	394	422	451	481	512	544	577
170	188	207	227	248	270	293	317	342	368	395	423	452	482	513	545	578	612

On voit qu'"il manque" des nombres de la suite séquentielle des entiers et qui sont compris entre 1 et n^2 si on prend n la longueur du côté du carré considéré (par exemple, ici, 153, 171, n'apparaissent pas) tandis que des nombres sont présents qui sont supérieurs à n^2 (par exemple 334).

Pour avoir une image en tête, c'est un peu comme si on avait pris pour une bonne part le début de la suite séquentielle des entiers mais qu'à partir d'un certain rang [2], au lieu de poursuivre la séquence, on avait décidé d'aller picorer un peu au hasard des nombres au-delà de n^2.

L'idée est alors de comparer le nombre de nombres premiers contenus dans ce qu'on appellera le "carré de Cantor" avec $\pi(n^2)$ (le nombre de nombres premiers inférieurs à n^2).

n	*nb premiers dans le carré de Cantor*	*nb premiers*	*ratio*
10^4	1236	1229	0.00566343042
10^6	78094	78498	0.00514662793
10^8	5739288	5761455	0.00384746561

Il semblerait que picorer au hasard dans la suite des entiers à partir d'un certain rang ne modifie pas sensiblement le comptage des nombres premiers, ce qui est déjà connu : deux nombres assez proches ont à peu près la même "chance" d'être premiers.

On peut peut-être "abaisser l'aléa" en utilisant certaines suites de nombres. Par exemple, si on s'intéresse à la suite diagonale de nombres commençant par 3, 11, etc. et définie par

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ \Delta_0 = 8 \\ \Delta_{n+1} = \Delta_n + 4 \\ U_{n+1} = U_n + \Delta_n \end{cases}$$

et qu'on compte le nombre de nombres premiers que cette suite contient, on en trouve environ 16 % alors que la proportion fournie par le théorème des nombres premiers $\dfrac{10000}{ln\ 10000}$ est d'environ 10 %.

2. Ici, à partir de 152 alors que $17^2 = 289$.