Géométrie modulaire et quantique (Denise Vella-Chemla, 12.8.2017)

Du fait de recherches récentes, on cherche à distinguer d'un point de vue géométrique (sur le cercle unité) les résidus quadratiques des résidus de puissances plus grandes que les puissances 2^{des} (les carrés) des nombres.

On constate que *la somme des résidus quadratiques du double $2p$ d'un nombre premier p de la forme $4k+1$ vaut p^2 et donc que p la divise.* On constate également que p un nombre premier impair de la forme $4k+3$ divise la somme des résidus quadratiques de son double $2p$.

On a pris l'habitude de représenter les résidus quadratiques dans des petits tableaux, par exemple modulo 11 :

10	9	8	7	6
1	2	3	4	5
1	4	9	5	3

On constate que la somme des restes $1+4+9+5+3=22$ est divisible par 11. Ce fait semble vérifié pour tout nombre p premier supérieur ou égal à 5 :

$$p \text{ est un nombre premier } \Longrightarrow \left(\sum_{x=1}^{\frac{p-1}{2}} x^2\right) \equiv 0 \ (mod\ p)$$

Malheureusement, ce fait est aussi vérifié pour 14 et pour de nombreux autres nombres. Il ne permet donc pas de discriminer les nombres premiers des nombres composés.

On cherche un élément discriminant certaines classes de nombres, on observe le fait suivant, qu'il faudrait démontrer, et qui permet de distinguer parmi les nombres pairs les doubles des nombres premiers des autres :

$$2p \text{ est le double d'un nombre premier de la forme } 4k+3 \Longrightarrow \left(\sum_{x=1}^{\frac{2p-1}{2}} x^2\right) \equiv 0 \ (mod\ 2p)$$

et

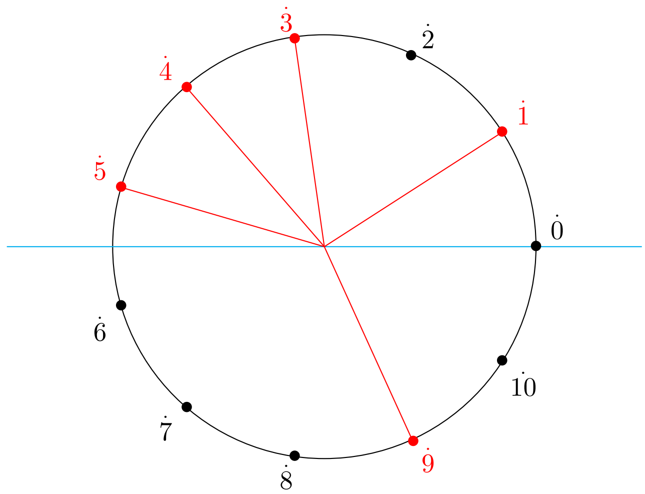
$$2p \text{ est le double d'un nombre premier de la forme } 4k+1 \Longleftrightarrow \left(\sum_{x=1}^{\frac{2p-1}{2}} x^2\right) \equiv p \ (mod\ 2p)$$

La première propriété ne permet pas de discriminer les nombres doubles de nombres premiers des nombres doubles de nombres composés (70 la vérifie par exemple).

Illustrons la propriété ci-dessus géométriquement : on positionne les classes modulaires selon le module $m=11$ sur le cercle unité. On note en rouge les résidus quadratiques et on laisse les non-résidus en noir.

La somme des angles au centre entre l'axe des abscisses et les droites qui relient les points correspondant aux résidus à l'origine est un multiple entier du tour complet. Le même phénomène semble avoir lieu pour tout module pair $m=2p$ double d'un nombre premier $p=4k+3$ mais ne pas avoir lieu pour tout nombre pair autre que ceux-là.

Cette idée de *nombre entier de tours complets* justifie l'emploi du mot *quantique* dans le titre de cette note.



La propriété pour les doubles de premiers ($4k+1$ ou $4k+3$) est également vérifiée pour d'autres résidus que les résidus quadratiques (les résidus cubiques et quintiques par exemple) mais pour les résidus en question, elle est aussi vérifiée par d'autres nombres pairs et n'est donc pas discriminative de ces pairs particuliers (les doubles de nombres premiers). On fournit en annexe les calculs effectués pour de petites valeurs qui illustrent cela.

Annexe 1 : Résidus quadratiques pour les modules $m \leqslant 20$ des nombres $x \leqslant \frac{m-1}{2}$ et leur somme

Remarque : on ne note ni les restes nuls, ni le fait que certains restes sont images de plusieurs nombres (multiplicités), la somme n'est donc pas toujours celle des nombres apparaissant sur chaque ligne.

2 :	1	$\sum = 1$
3 :	1	$\sum = 1$
4 :	1	$\sum = 1$
5 :	1 4	$\sum = 5$ $(\equiv 0)$
6 :	1 3 4	$\sum = 8$ $(\equiv 2)$
7 :	1 2 4	$\sum = 7$ $(\equiv 0)$
8 :	1 4	$\sum = 6$
9 :	1 4 7	$\sum = 12$ $(\equiv 3)$
10 :	1 4 5 6 9	$\sum = 25$ $(\equiv 5)$
11 :	1 3 4 5 9	$\sum = 22$ $(\equiv 0)$
12 :	1 4 9	$\sum = 19$ $(\equiv 7)$
13 :	1 3 4 9 10 12	$\sum = 39$ $(\equiv 0)$
14 :	1 2 4 7 8 9 11	$\sum = 42$ $(\equiv 0)$
15 :	1 4 6 9 10	$\sum = 35$ $(\equiv 5)$
16 :	1 4 9	$\sum = 28$ $(\equiv 12)$
17 :	1 2 4 8 9 13 15 16	$\sum = 68$ $(\equiv 0)$
18 :	1 4 7 9 10 13 16	$\sum = 69$ $(\equiv 15)$
19 :	1 4 5 6 7 9 11 16 17	$\sum = 76$ $(\equiv 0)$
20 :	1 4 5 9 16	$\sum = 65$ $(\equiv 5)$

Annexe 2 : Résidus cubiques pour les modules $m \leqslant 20$ des nombres $x \leqslant \frac{m-1}{2}$ et leur somme

2 :	1	$\sum = 1$
3 :	1	$\sum = 1$
4 :	1	$\sum = 1$
5 :	1 3	$\sum = 4$
6 :	1 2 3	$\sum = 6\ (\equiv 0)$
7 :	1 6	$\sum = 8\ (\equiv 1)$
8 :	1 3	$\sum = 4$
9 :	1 8	$\sum = 10\ (\equiv 1)$
10 :	1 4 5 7 8	$\sum = 25\ (\equiv 5)$
11 :	1 4 5 8 9	$\sum = 27\ (\equiv 5)$
12 :	1 3 4 5 8	$\sum = 21\ (\equiv 9)$
13 :	1 8 12	$\sum = 38\ (\equiv 12)$
14 :	1 6 7 8 13	$\sum = 56\ (\equiv 0)$
15 :	1 4 5 6 8 12 13	$\sum = 49\ (\equiv 4)$
16 :	1 7 8 11 13	$\sum = 48\ (\equiv 0)$
17 :	1 2 3 6 8 10 12 13	$\sum = 55\ (\equiv 4)$
18 :	1 8 9 10 17	$\sum = 63\ (\equiv 9)$
19 :	1 7 8 11 18	$\sum = 68\ (\equiv 11)$
20 :	1 3 4 5 7 8 9 12 16	$\sum = 65\ (\equiv 5)$

Annexe 3 : résultats d'exécution (résidus quadratiques, cubiques, quintiques) jusqu'à 100 ; pour les nombres jusqu'à 20, détails des puissances ; en résultat global, la somme des résidus, puis son reste modulo le nombre considéré, après les ":"

quadratiques

$1^2 = 1\ (mod\ 3)$.
$3- > 1 : 1$

$1^2 = 1\ (mod\ 4)$.
$2^2 = 0\ (mod\ 4)$.
$4- > 1 : 1$

$1^2 = 1\ (mod\ 5)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 5)$.
$5- > 5 : 0$

$1^2 = 1\ (mod\ 6)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 6)$.
$3^2 = 3\ (mod\ 6)$.
$6- > 8 : 2$

$1^2 = 1\ (mod\ 7)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 7)$.
$3^2 = 2\ (mod\ 7)$.
$7- > 7 : 0$

$1^2 = 1\ (mod\ 8)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 8)$.
$3^2 = 1\ (mod\ 8)$.
$4^2 = 0\ (mod\ 8)$.
$8- > 6 : 6$

$1^2 = 1\ (mod\ 9)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 9)$.
$3^2 = 0\ (mod\ 9)$.
$4^2 = 7\ (mod\ 9)$.
$9- > 12 : 3$

$1^2 = 1\ (mod\ 10)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 10)$.
$3^2 = 9\ (mod\ 10)$.
$4^2 = 6\ (mod\ 10)$.

$5^2 = 5\ (mod\ 10)$.
$10- > 25 : 5$

$1^2 = 1\ (mod\ 11)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 11)$.
$3^2 = 9\ (mod\ 11)$.
$4^2 = 5\ (mod\ 11)$.
$5^2 = 3\ (mod\ 11)$.
$11- > 22 : 0$

$1^2 = 1\ (mod\ 12)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 12)$.
$3^2 = 9\ (mod\ 12)$.
$4^2 = 4\ (mod\ 12)$.
$5^2 = 1\ (mod\ 12)$.
$6^2 = 0\ (mod\ 12)$.
$12- > 19 : 7$

$1^2 = 1\ (mod\ 13)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 13)$.
$3^2 = 9\ (mod\ 13)$.
$4^2 = 3\ (mod\ 13)$.
$5^2 = 12\ (mod\ 13)$.
$6^2 = 10\ (mod\ 13)$.
$13- > 39 : 0$

$1^2 = 1\ (mod\ 14)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 14)$.
$3^2 = 9\ (mod\ 14)$.
$4^2 = 2\ (mod\ 14)$.
$5^2 = 11\ (mod\ 14)$.
$6^2 = 8\ (mod\ 14)$.
$7^2 = 7\ (mod\ 14)$.
$14- > 42 : 0$

$1^2 = 1\ (mod\ 15)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 15)$.
$3^2 = 9\ (mod\ 15)$.
$4^2 = 1\ (mod\ 15)$.
$5^2 = 10\ (mod\ 15)$.
$6^2 = 6\ (mod\ 15)$.
$7^2 = 4\ (mod\ 15)$.
$15- > 35 : 5$

$1^2 = 1\ (mod\ 16)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 16)$.
$3^2 = 9\ (mod\ 16)$.
$4^2 = 0\ (mod\ 16)$.
$5^2 = 9\ (mod\ 16)$.
$6^2 = 4\ (mod\ 16)$.
$7^2 = 1\ (mod\ 16)$.
$8^2 = 0\ (mod\ 16)$.
$16- > 28 : 12$

$1^2 = 1\ (mod\ 17)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 17)$.
$3^2 = 9\ (mod\ 17)$.
$4^2 = 16\ (mod\ 17)$.
$5^2 = 8\ (mod\ 17)$.
$6^2 = 2\ (mod\ 17)$.
$7^2 = 15\ (mod\ 17)$.
$8^2 = 13\ (mod\ 17)$.
$17- > 68 : 0$

$1^2 = 1\ (mod\ 18)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 18)$.
$3^2 = 9\ (mod\ 18)$.
$4^2 = 16\ (mod\ 18)$.
$5^2 = 7\ (mod\ 18)$.
$6^2 = 0\ (mod\ 18)$.
$7^2 = 13\ (mod\ 18)$.
$8^2 = 10\ (mod\ 18)$.
$9^2 = 9\ (mod\ 18)$.
$18- > 69 : 15$

$1^2 = 1\ (mod\ 19)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 19)$.
$3^2 = 9\ (mod\ 19)$.
$4^2 = 16\ (mod\ 19)$.
$5^2 = 6\ (mod\ 19)$.
$6^2 = 17\ (mod\ 19)$.
$7^2 = 11\ (mod\ 19)$.
$8^2 = 7\ (mod\ 19)$.
$9^2 = 5\ (mod\ 19)$.
$19- > 76 : 0$

$1^2 = 1\ (mod\ 20)$.
$2^2 = 4\ (mod\ 20)$.
$3^2 = 9\ (mod\ 20)$.
$4^2 = 16\ (mod\ 20)$.
$5^2 = 5\ (mod\ 20)$.
$6^2 = 16\ (mod\ 20)$.
$7^2 = 9\ (mod\ 20)$.
$8^2 = 4\ (mod\ 20)$.
$9^2 = 1\ (mod\ 20)$.
$10^2 = 0\ (mod\ 20)$.
$20- > 65 : 5$

21 -> 91 : 7
22 -> 110 : 0
23 -> 92 : 0
24 -> 74 : 2
25 -> 125 : 0
26 -> 169 : 13
27 -> 144 : 9
28 -> 147 : 7
29 -> 203 : 0
30 -> 190 : 10
31 -> 186 : 0
32 -> 152 : 24
33 -> 242 : 11
34 -> 289 : 17
35 -> 245 : 0
36 -> 201 : 21
37 -> 333 : 0
38 -> 342 : 0
39 -> 286 : 13
40 -> 270 : 30
41 -> 410 : 0
42 -> 413 : 35
43 -> 430 : 0
44 -> 363 : 11
45 -> 420 : 15
46 -> 460 : 0
47 -> 423 : 0

48 -> 340 : 4
49 -> 490 : 0
50 -> 575 : 25
51 -> 578 : 17
52 -> 585 : 13
53 -> 689 : 0
54 -> 666 : 18
55 -> 605 : 0
56 -> 546 : 42
57 -> 760 : 19
58 -> 841 : 29
59 -> 767 : 0
60 -> 635 : 35
61 -> 915 : 0
62 -> 868 : 0
63 -> 777 : 21
64 -> 688 : 48
65 -> 1040 : 0
66 -> 1045 : 55
67 -> 1072 : 0
68 -> 969 : 17
69 -> 1058 : 23
70 -> 1120 : 0
71 -> 994 : 0
72 -> 870 : 6
73 -> 1314 : 0
74 -> 1369 : 37
75 -> 1150 : 25
76 -> 1235 : 19
77 -> 1386 : 0
78 -> 1352 : 26
79 -> 1343 : 0
80 -> 1100 : 60
81 -> 1404 : 27
82 -> 1681 : 41
83 -> 1577 : 0
84 -> 1393 : 49
85 -> 1785 : 0
86 -> 1806 : 0
87 -> 1595 : 29
88 -> 1562 : 66
89 -> 1958 : 0
90 -> 1875 : 75
91 -> 1911 : 0
92 -> 1771 : 23
93 -> 1984 : 31
94 -> 1974 : 0
95 -> 1805 : 0
96 -> 1544 : 8
97 -> 2328 : 0
98 -> 2205 : 49
99 -> 2211 : 33
100 -> 2025 : 25

cubiques

$1^3 = 1 \ (mod\ 3)$.
$3- > 1 : 1$

$1^3 = 1 \ (mod\ 4)$.
$2^3 = 0 \ (mod\ 4)$.
$4- > 1 : 1$

$1^3 = 1 \ (mod\ 5)$.
$2^3 = 3 \ (mod\ 5)$.
$5- > 4 : 4$

$1^3 = 1 \ (mod\ 6)$.
$2^3 = 2 \ (mod\ 6)$.
$3^3 = 3 \ (mod\ 6)$.
$6- > 6 : 0$

$1^3 = 1 \ (mod\ 7)$.
$2^3 = 1 \ (mod\ 7)$.
$3^3 = 6 \ (mod\ 7)$.
$7- > 8 : 1$

$1^3 = 1 \ (mod\ 8)$.
$2^3 = 0 \ (mod\ 8)$.
$3^3 = 3 \ (mod\ 8)$.
$4^3 = 0 \ (mod\ 8)$.
$8- > 4 : 4$

$1^3 = 1 \ (mod\ 9)$.
$2^3 = 8 \ (mod\ 9)$.
$3^3 = 0 \ (mod\ 9)$.
$4^3 = 1 \ (mod\ 9)$.
$9- > 10 : 1$

$1^3 = 1 \ (mod\ 10)$.
$2^3 = 8 \ (mod\ 10)$.
$3^3 = 7 \ (mod\ 10)$.
$4^3 = 4 \ (mod\ 10)$.
$5^3 = 5 \ (mod\ 10)$.
$10- > 25 : 5$

$1^3 = 1 \ (mod\ 11)$.
$2^3 = 8 \ (mod\ 11)$.
$3^3 = 5 \ (mod\ 11)$.
$4^3 = 9 \ (mod\ 11)$.
$5^3 = 4 \ (mod\ 11)$.
$11- > 27 : 5$

$1^3 = 1 \ (mod\ 12)$.
$2^3 = 8 \ (mod\ 12)$.
$3^3 = 3 \ (mod\ 12)$.
$4^3 = 4 \ (mod\ 12)$.
$5^3 = 5 \ (mod\ 12)$.
$6^3 = 0 \ (mod\ 12)$.
$12- > 21 : 9$

$1^3 = 1 \ (mod\ 13)$.
$2^3 = 8 \ (mod\ 13)$.
$3^3 = 1 \ (mod\ 13)$.
$4^3 = 12 \ (mod\ 13)$.
$5^3 = 8 \ (mod\ 13)$.
$6^3 = 8 \ (mod\ 13)$.
$13- > 38 : 12$

$1^3 = 1\ (mod\ 14)$.
$2^3 = 8\ (mod\ 14)$.
$3^3 = 13\ (mod\ 14)$.
$4^3 = 8\ (mod\ 14)$.
$5^3 = 13\ (mod\ 14)$.
$6^3 = 6\ (mod\ 14)$.
$7^3 = 7\ (mod\ 14)$.
$14- > 56 : 0$

$1^3 = 1\ (mod\ 15)$.
$2^3 = 8\ (mod\ 15)$.
$3^3 = 12\ (mod\ 15)$.
$4^3 = 4\ (mod\ 15)$.
$5^3 = 5\ (mod\ 15)$.
$6^3 = 6\ (mod\ 15)$.
$7^3 = 13\ (mod\ 15)$.
$15- > 49 : 4$

$1^3 = 1\ (mod\ 16)$.
$2^3 = 8\ (mod\ 16)$.
$3^3 = 11\ (mod\ 16)$.
$4^3 = 0\ (mod\ 16)$.
$5^3 = 13\ (mod\ 16)$.
$6^3 = 8\ (mod\ 16)$.
$7^3 = 7\ (mod\ 16)$.
$8^3 = 0\ (mod\ 16)$.
$16- > 48 : 0$

$1^3 = 1\ (mod\ 17)$.
$2^3 = 8\ (mod\ 17)$.
$3^3 = 10\ (mod\ 17)$.
$4^3 = 13\ (mod\ 17)$.
$5^3 = 6\ (mod\ 17)$.
$6^3 = 12\ (mod\ 17)$.
$7^3 = 3\ (mod\ 17)$.
$8^3 = 2\ (mod\ 17)$.
$17- > 55 : 4$

$1^3 = 1\ (mod\ 18)$.
$2^3 = 8\ (mod\ 18)$.
$3^3 = 9\ (mod\ 18)$.
$4^3 = 10\ (mod\ 18)$.
$5^3 = 17\ (mod\ 18)$.
$6^3 = 0\ (mod\ 18)$.
$7^3 = 1\ (mod\ 18)$.
$8^3 = 8\ (mod\ 18)$.
$9^3 = 9\ (mod\ 18)$.
$18- > 63 : 9$

$1^3 = 1\ (mod\ 19)$.
$2^3 = 8\ (mod\ 19)$.
$3^3 = 8\ (mod\ 19)$.
$4^3 = 7\ (mod\ 19)$.
$5^3 = 11\ (mod\ 19)$.
$6^3 = 7\ (mod\ 19)$.
$7^3 = 1\ (mod\ 19)$.
$8^3 = 18\ (mod\ 19)$.
$9^3 = 7\ (mod\ 19)$.
$19- > 68 : 11$

$1^3 = 1\ (mod\ 20)$.
$2^3 = 8\ (mod\ 20)$.

$3^3 = 7 \ (mod\ 20)$.
$4^3 = 4 \ (mod\ 20)$.
$5^3 = 5 \ (mod\ 20)$.
$6^3 = 16 \ (mod\ 20)$.
$7^3 = 3 \ (mod\ 20)$.
$8^3 = 12 \ (mod\ 20)$.
$9^3 = 9 \ (mod\ 20)$.
$10^3 = 0 \ (mod\ 20)$.
$20- > 65 : 5$

21 -> 85 : 1
22 -> 110 : 0
23 -> 124 : 9
24 -> 84 : 12
25 -> 84 : 9
26 -> 117 : 13
27 -> 100 : 19
28 -> 161 : 21
29 -> 208 : 5
30 -> 150 : 0
31 -> 233 : 16
32 -> 224 : 0
33 -> 214 : 16
34 -> 255 : 17
35 -> 274 : 29
36 -> 261 : 9
37 -> 344 : 11
38 -> 304 : 0
39 -> 337 : 25
40 -> 340 : 20
41 -> 353 : 25
42 -> 399 : 21
43 -> 428 : 41
44 -> 517 : 33
45 -> 469 : 19
46 -> 552 : 0
47 -> 506 : 36
48 -> 528 : 0
49 -> 428 : 36
50 -> 575 : 25
51 -> 514 : 4
52 -> 637 : 13
53 -> 718 : 29
54 -> 540 : 0
55 -> 599 : 49
56 -> 588 : 28
57 -> 619 : 49
58 -> 841 : 29
59 -> 779 : 12
60 -> 765 : 45
61 -> 834 : 41
62 -> 682 : 0
63 -> 883 : 1
64 -> 704 : 0
65 -> 974 : 64
66 -> 825 : 33
67 -> 1094 : 22
68 -> 1105 : 17
69 -> 1159 : 55
70 -> 980 : 0

71 -> 1146 : 10
72 -> 1044 : 36
73 -> 1322 : 8
74 -> 1517 : 37
75 -> 1234 : 34
76 -> 1501 : 57
77 -> 1611 : 71
78 -> 1482 : 0
79 -> 1759 : 21
80 -> 1360 : 0
81 -> 1315 : 19
82 -> 1599 : 41
83 -> 1459 : 48
84 -> 1533 : 21
85 -> 1959 : 4
86 -> 1892 : 0
87 -> 1861 : 34
88 -> 1716 : 44
89 -> 1723 : 32
90 -> 1845 : 45
91 -> 1884 : 64
92 -> 2093 : 69
93 -> 2062 : 16
94 -> 1880 : 0
95 -> 1854 : 49
96 -> 2016 : 0
97 -> 2084 : 47
98 -> 2009 : 49
99 -> 2062 : 82
100 -> 2125 : 25

quintiques

$1^5 = 1\ (mod\ 3)$.
$3- > 1 : 1$

$1^5 = 1\ (mod\ 4)$.
$2^5 = 0\ (mod\ 4)$.
$4- > 1 : 1$

$1^5 = 1\ (mod\ 5)$.
$2^5 = 2\ (mod\ 5)$.
$5- > 3 : 3$

$1^5 = 1\ (mod\ 6)$.
$2^5 = 2\ (mod\ 6)$.
$3^5 = 3\ (mod\ 6)$.
$6- > 6 : 0$

$1^5 = 1\ (mod\ 7)$.
$2^5 = 4\ (mod\ 7)$.
$3^5 = 5\ (mod\ 7)$.
$7- > 10 : 3$

$1^5 = 1\ (mod\ 8)$.
$2^5 = 0\ (mod\ 8)$.
$3^5 = 3\ (mod\ 8)$.
$4^5 = 0\ (mod\ 8)$.
$8- > 4 : 4$

$1^5 = 1\ (mod\ 9)$.
$2^5 = 5\ (mod\ 9)$.
$3^5 = 0\ (mod\ 9)$.

$4^5 = 7\ (mod\ 9)$.
$9 -> 13 : 4$

$1^5 = 1\ (mod\ 10)$.
$2^5 = 2\ (mod\ 10)$.
$3^5 = 3\ (mod\ 10)$.
$4^5 = 4\ (mod\ 10)$.
$5^5 = 5\ (mod\ 10)$.
$10 -> 15 : 5$

$1^5 = 1\ (mod\ 11)$.
$2^5 = 10\ (mod\ 11)$.
$3^5 = 1\ (mod\ 11)$.
$4^5 = 1\ (mod\ 11)$.
$5^5 = 1\ (mod\ 11)$.
$11 -> 14 : 3$

$1^5 = 1\ (mod\ 12)$.
$2^5 = 8\ (mod\ 12)$.
$3^5 = 3\ (mod\ 12)$.
$4^5 = 4\ (mod\ 12)$.
$5^5 = 5\ (mod\ 12)$.
$6^5 = 0\ (mod\ 12)$.
$12 -> 21 : 9$

$1^5 = 1\ (mod\ 13)$.
$2^5 = 6\ (mod\ 13)$.
$3^5 = 9\ (mod\ 13)$.
$4^5 = 10\ (mod\ 13)$.
$5^5 = 5\ (mod\ 13)$.
$6^5 = 2\ (mod\ 13)$.
$13 -> 33 : 7$

$1^5 = 1\ (mod\ 14)$.
$2^5 = 4\ (mod\ 14)$.
$3^5 = 5\ (mod\ 14)$.
$4^5 = 2\ (mod\ 14)$.
$5^5 = 3\ (mod\ 14)$.
$6^5 = 6\ (mod\ 14)$.
$7^5 = 7\ (mod\ 14)$.
$14 -> 28 : 0$

$1^5 = 1\ (mod\ 15)$.
$2^5 = 2\ (mod\ 15)$.
$3^5 = 3\ (mod\ 15)$.
$4^5 = 4\ (mod\ 15)$.
$5^5 = 5\ (mod\ 15)$.
$6^5 = 6\ (mod\ 15)$.
$7^5 = 7\ (mod\ 15)$.
$15 -> 28 : 13$

$1^5 = 1\ (mod\ 16)$.
$2^5 = 0\ (mod\ 16)$.
$3^5 = 3\ (mod\ 16)$.
$4^5 = 0\ (mod\ 16)$.
$5^5 = 5\ (mod\ 16)$.
$6^5 = 0\ (mod\ 16)$.
$7^5 = 7\ (mod\ 16)$.
$8^5 = 0\ (mod\ 16)$.
$16 -> 16 : 0$

$1^5 = 1\ (mod\ 17)$.
$2^5 = 15\ (mod\ 17)$.

$3^5 = 5\ (mod\ 17)$.
$4^5 = 4\ (mod\ 17)$.
$5^5 = 14\ (mod\ 17)$.
$6^5 = 7\ (mod\ 17)$.
$7^5 = 11\ (mod\ 17)$.
$8^5 = 9\ (mod\ 17)$.
$17- > 66 : 15$

$1^5 = 1\ (mod\ 18)$.
$2^5 = 14\ (mod\ 18)$.
$3^5 = 9\ (mod\ 18)$.
$4^5 = 16\ (mod\ 18)$.
$5^5 = 11\ (mod\ 18)$.
$6^5 = 0\ (mod\ 18)$.
$7^5 = 13\ (mod\ 18)$.
$8^5 = 8\ (mod\ 18)$.
$9^5 = 9\ (mod\ 18)$.
$18- > 81 : 9$

$1^5 = 1\ (mod\ 19)$.
$2^5 = 13\ (mod\ 19)$.
$3^5 = 15\ (mod\ 19)$.
$4^5 = 17\ (mod\ 19)$.
$5^5 = 9\ (mod\ 19)$.
$6^5 = 5\ (mod\ 19)$.
$7^5 = 11\ (mod\ 19)$.
$8^5 = 12\ (mod\ 19)$.
$9^5 = 16\ (mod\ 19)$.
$19- > 99 : 4$

$1^5 = 1\ (mod\ 20)$.
$2^5 = 12\ (mod\ 20)$.
$3^5 = 3\ (mod\ 20)$.
$4^5 = 4\ (mod\ 20)$.
$5^5 = 5\ (mod\ 20)$.
$6^5 = 16\ (mod\ 20)$.
$7^5 = 7\ (mod\ 20)$.
$8^5 = 8\ (mod\ 20)$.
$9^5 = 9\ (mod\ 20)$.
$10^5 = 0\ (mod\ 20)$.
$20- > 65 : 5$

21 -> 115 : 10
22 -> 88 : 0
23 -> 122 : 7
24 -> 84 : 12
25 -> 108 : 8
26 -> 91 : 13
27 -> 139 : 4
28 -> 189 : 21
29 -> 157 : 12
30 -> 120 : 0
31 -> 209 : 23
32 -> 128 : 0
33 -> 223 : 25
34 -> 289 : 17
35 -> 213 : 3
36 -> 297 : 9
37 -> 383 : 13
38 -> 342 : 0
39 -> 280 : 7

40 -> 260 : 20
41 -> 377 : 8
42 -> 399 : 21
43 -> 517 : 1
44 -> 429 : 33
45 -> 463 : 13
46 -> 460 : 0
47 -> 546 : 29
48 -> 336 : 0
49 -> 570 : 31
50 -> 575 : 25
51 -> 661 : 49
52 -> 585 : 13
53 -> 701 : 12
54 -> 702 : 0
55 -> 773 : 3
56 -> 644 : 28
57 -> 802 : 4
58 -> 899 : 29
59 -> 879 : 53
60 -> 645 : 45
61 -> 925 : 10
62 -> 1054 : 0
63 -> 913 : 31
64 -> 768 : 0
65 -> 1008 : 33
66 -> 1155 : 33
67 -> 1195 : 56
68 -> 969 : 17
69 -> 1111 : 7
70 -> 1190 : 0
71 -> 1273 : 66
72 -> 972 : 36
73 -> 1164 : 69
74 -> 1295 : 37
75 -> 1258 : 58
76 -> 1197 : 57
77 -> 1466 : 3
78 -> 1092 : 0
79 -> 1846 : 29
80 -> 1040 : 0
81 -> 841 : 31
82 -> 1763 : 41
83 -> 1719 : 59
84 -> 1449 : 21
85 -> 1783 : 83
86 -> 1978 : 0
87 -> 1810 : 70
88 -> 1716 : 44
89 -> 1942 : 73
90 -> 1845 : 45
91 -> 1879 : 59
92 -> 2093 : 69
93 -> 2224 : 85
94 -> 2444 : 0
95 -> 2208 : 23
96 -> 1920 : 0
97 -> 2256 : 25
98 -> 1813 : 49

99 -> 2335 : 58
100 -> 2125 : 25