Conjecture de Goldbach et 2-colorations de graphes (Denise Vella-Chemla, 22.01.2021)

On propose ici de modéliser la recherche des décomposants de Goldbach d'un nombre pair par la 2-coloration d'un graphe (ou par le fait que le graphe soit biparti) qui est un problème classique de la théorie des graphes [1]. On rappelle qu'une décomposition de Goldbach d'un nombre pair n est l'écriture de n comme somme de deux nombres premiers $p_1 + p_2$.

On a démontré, voir en annexe 1, que les décomposants de Goldbach d'un nombre pair n (supérieurs à $\sqrt{n}$) sont les nombres premiers inférieurs à $n/2$ qui ne partagent aucun reste avec ce nombre pair dans toute division euclidienne par un nombre premier quelconque inférieur à $\sqrt{n}$.

Pour étayer la réflexion, on trouvera en annexe 2 une représentation graphique sur cercles concentriques qui montre les décomposants de Goldbach du nombre pair 40.

Pour trouver les décomposants de Goldbach de 40, il s'agit, comme on le comprend aisément à la lecture des 2 annexes, d'éliminer les nombres inférieurs à 20 (la moitié de 40) qui sont divisibles par 2, 3 ou 5, car ils ne sont fatalement pas premiers, étant divisibles par un nombre qui leur est strictement inférieur et qui n'est pas 1. Il s'agit d'autre part d'éliminer également les nombres qui sont congrus à 40 selon l'un des modules premiers en question (i.e. les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$), parce que pour eux, du fait de cette congruence à 40, c'est leur complémentaire à 40 qui n'est pas premier (car $x \equiv n \pmod{p} \iff n - x \equiv 0 \pmod{p}$).

Le problème de la visualisation de ces contraintes lorsqu'on les modélise par un graphe avec des sommets et des arêtes, comme on le verra, c'est que la représentation graphique est très vite illisible, dès que le nombre d'arêtes s'élève un peu. On utilisera donc plutôt dans un premier temps ici une représentation des arêtes par ce qu'on appelle la matrice d'adjacence du graphe, le chiffre 1 dénotant la présence d'une arête entre deux sommets du graphe et le chiffre 0 dénotant l'absence d'une telle arête.

On modélise notre recherche de décomposants de Goldbach de la façon suivante : les sommets du graphe correspondent aux nombres de 1 à 20, on ajoute un sommet correspondant au nombre 0 et un sommet correspondant au nombre 40. Une arête du graphe entre deux sommets dénote le fait que les deux sommets n'ont pas le droit d'être de la même couleur parce que les nombres que les sommets représentent ne sont pas congrus, au sens de Gauss, modulo un certain nombre premier, i.e. les nombres n'ont pas le même reste lorsqu'on effectue une division euclidienne dont ils sont le dividende et dont le nombre premier est le diviseur.

Du fait de ce choix de modélisation, il peut y avoir plusieurs arêtes entre deux mêmes nœuds, par exemple, entre 2 et 40, il y a une arête car 2 et 40 sont incongrus modulo 3, et il y a une autre arête entre 2 et 40 car 2 et 40 sont incongrus modulo 5. Le tableau d'adjacence ci-dessous montre 6 colonnes, chaque paire de colonnes correspond à un certain module premier, que ce soit pour traiter de la congruence entre le nombre entête de ligne et 0 (à gauche), ou de la congruence entre ce même nombre entête de ligne et $n = 40$ (à droite). Par exemple, dans la première colonne, on voit que 0 étant pair n'a pas le droit d'être de la même couleur que tout nombre impair. Dans la quatrième colonne, on voit que 0 étant divisible par 3 n'a pas le droit d'être de la même couleur que tout nombre qui n'est pas divisible par 3. Enfin, dans la cinqième colonne, on voit que 40, qui a pour reste 1 dans une division par 3, n'a pas le droit d'être de la même couleur que tout nombre qui a un reste autre que 1 (en l'occurrence 0 ou 2, dans une division par 3, c'est ce qu'indiquent les 1 et les 0 de cette cinqième colonne).

Les deux dernières colonnes du tableau, symbolisées par les entêtes $\wedge$, agrègent par un “et logique” les informations des colonnes précédentes qui fournissent une information selon chaque module. L'avant-dernière colonne agrège par “et logique” les deuxième, quatrième et sixième colonnes, tandis que la dernière colonne du tableau agrège par “et logique” les troisième, cinquième et septième colonne du tableau.

1. Dans la suite, on utilisera indifféremment les mots arc et arête.

$\not\equiv$	(mod 2) 0	(mod 2) 40	(mod 3) 0	(mod 3) 40	(mod 5) 0	(mod 5) 40	$\wedge$ 0	$\wedge$ 40
1	1	1	1	0	1	1	1	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	1	1	0	1	1	1	0	1
4	0	0	1	0	1	1	0	0
5	1	1	1	1	0	0	0	0
6	0	0	0	1	1	1	0	0
7	1	1	1	0	1	1	1	0
8	0	0	1	1	1	1	0	0
9	1	1	0	1	1	1	0	1
10	0	0	1	0	0	0	0	0
11	1	1	1	1	1	1	1	1
12	0	0	0	1	1	1	0	0
13	1	1	1	0	1	1	1	0
14	0	0	1	1	1	1	0	0
15	1	1	0	1	0	0	0	0
16	0	0	1	0	1	1	0	0
17	1	1	1	1	1	1	1	1
18	0	0	0	1	1	1	0	0
19	1	1	1	0	1	1	1	0
20	0	0	1	1	0	0	0	0

La Figure 1 montre le graphe correspondant exactement à la matrice d'adjacence ci-dessus, on a noté l'adjacence modulo 2 en bleu, l'adjacence modulo 3 en vert et l'adjacence modulo 5 en rouge. Du fait du nombre élevé d'arêtes, ce graphe est très difficile à interpréter.

Imaginons maintenant que l'on colorie les nombres 0 et 40 d'une même couleur, cyan par exemple ; les seuls nombres autorisés à être coloriés d'une seconde couleur, orange par exemple, sont les nombres qui ne sont pas liés à 0 par 3 arcs (bleu, vert et rouge) et qui ne sont pas liés à 40 par 3 arcs (bleu, vert et rouge) ; les 3 contraintes d'adjacence au nombre 0 correspondent à la non-divisibilité par 2, 3 et 5 tandis que les 3 contraintes d'adjacence au nombre 40 correspondent au fait pour les nombres que leur complémentaire à n n'est pas divisible par 2, 3 ou 5. C'est ce qui est résumé dans le graphe restreint de la Figure 2 : on n'a conservé que les arcs qui agrègent 3 arcs de couleur bleu, vert et rouge entre deux nœuds, correspondant au "et logique" symbolisé par le symbole $\wedge$ entête des deux dernières colonnes de la table d'adjacence. On a omis tous les sommets non liés à 0 ou 40 par les "et logique" en question. Si l'on colorie 0 et 40 tous les 2 en cyan, 11 et 17 sont les deux seuls nombres qui appartiennent au graphe résultant de l'agrégation par "et logique", et qui peuvent être chacun colorié d'une couleur différente à la fois de la couleur de 0 et de la couleur de 40, qu'on a choisies identiques.

La Figure 2 montre ainsi le graphe de la Figure 1 dans lequel on a agrégé par un "et logique" les arcs lorsqu'étaient à la fois présents entre deux nœuds et un arc rouge et un arc vert et un arc bleu ; une arête dans le graphe de la Figure 2 symbolise donc l'incongruence des nombres qu'elle relie à la fois modulo 2, 3 et 5. Comme attendu, si 0 et 40 sont coloriés en cyan dans la Figure 2 (qui est un résumé de la Figure 1), les seuls nombres coloriables en orange sont 11 et 17, ils ont deux chiffre 1 dans leur avant-dernière et dernière colonne, ce sont bien les seuls décomposants de Goldbach de 40 qui sont supérieurs à $\sqrt{40}$.

Pour démontrer que le graphe initial est 2-coloriable (ou est un graphe biparti), quel que soit le nombre pair considéré, il faudrait être capable de démontrer qu'un tel graphe de sommets et d'arêtes respectant les contraintes que l'on a fixées en terme de congruences, ne peut jamais contenir de cycle de longueur impaire. La configuration du graphe, qui contient des arcs entre 0 et les nombres compris entre 1 et 20 d'une part, et des arcs entre 40 et les nombres compris entre 1 et 20 d'autre part, ne semble pas permettre que le graphe puisse contenir un cycle de longueur impaire.

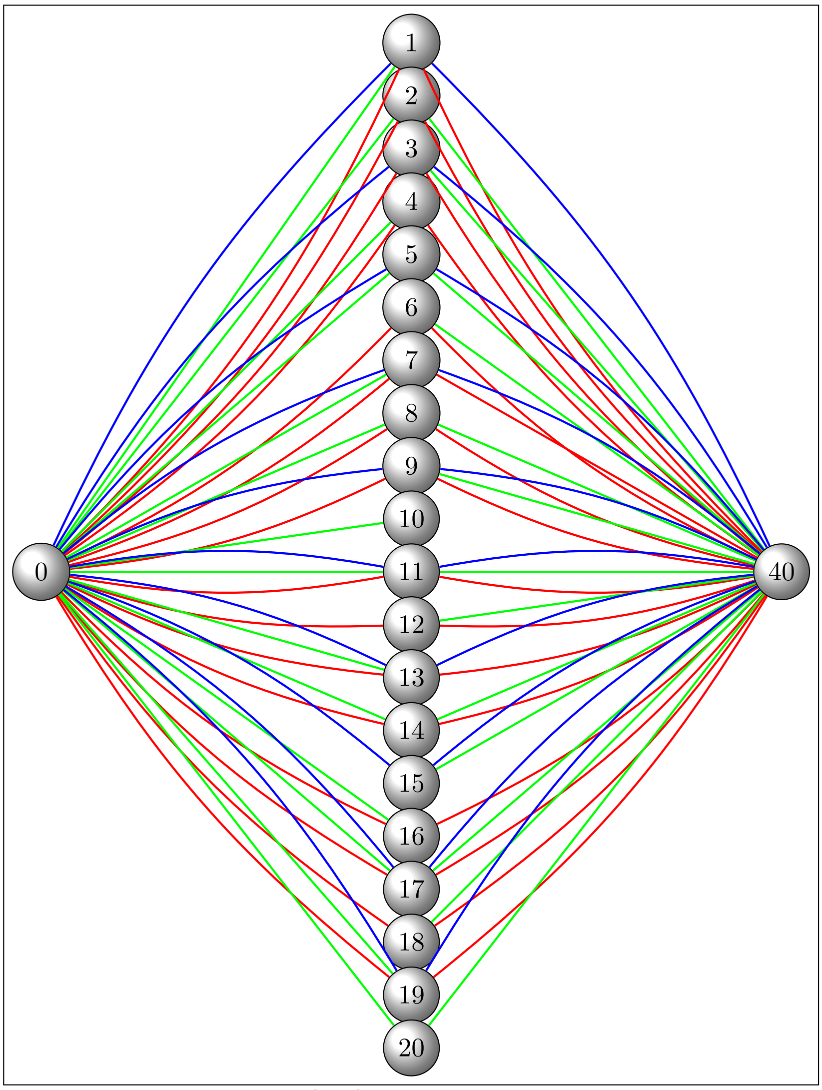


FIGURE 1 : graphe des incongruences pour $n = 40$

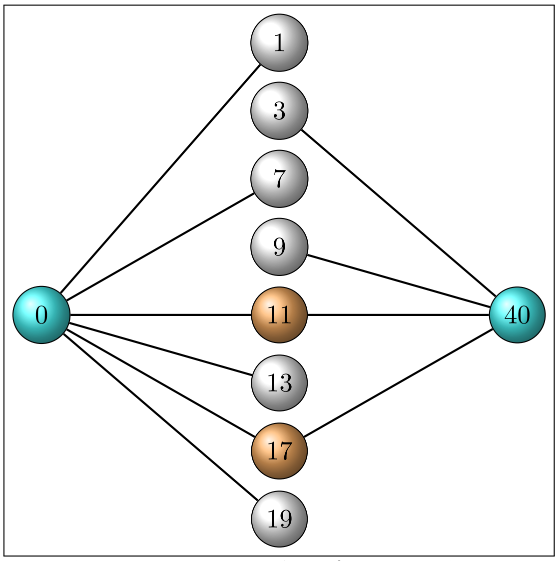


FIGURE 2 : graphe des incongruences à la fois modulo 2, 3 et 5 pour $n = 40$

Annexe 1. Caractérisation des décomposants de Goldbach de n supérieurs à $\sqrt{n}$ (Leila Schneps et Jacques Chemla ont écrit cette annexe.)

Soit $n \in 2\mathbb{N}+6$ un entier pair supérieur à 6.

Pour tout $p \in \mathbb{P}^*$ premier impair inférieur à $\sqrt{n}$ (*i.e.* $3 \leq p \leq \sqrt{n}$), on définit l'ensemble :

$$F_n(p) = \{m \in 2\mathbb{N}+1 : 3 \leq m \leq n/2,\ m \not\equiv 0\ [p],\ m \not\equiv n\ [p]\}$$

L'intersection des ensembles $F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$ est notée :

$$D_n = \bigcap_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ 3 \leq p \leq \sqrt{n}}} F_n(p)$$

Nous allons montrer que D_n et son complémentaire $n - D_n$ ne contiennent que des nombres premiers.

Lemme 1 : Soit $m \in 2\mathbb{N}+1$ un entier impair. Si m n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$, alors il est premier.

Démonstration : Si m est composé, on a $m = pq$, où p est le plus petit nombre premier intervenant dans la factorisation de m en nombres premiers et où q est le produit de tous les autres facteurs. Puisque m est impair, $p \geq 3$, et puisque $q \geq p$ (q étant le produit d'entiers $\geq p$), $m = pq \geq pp = p^2$ et donc $\sqrt{m} \geq p$ (la fonction racine carrée étant croissante). On a ainsi montré que si m impair est composé, il est divisible par un premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$. Le lemme s'obtient par contraposition. $\square$

Lemme 2 : $D_n \subseteq \mathbb{P}$

Démonstration : Soit $m \in D_n$. Alors $m \in F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$. Par conséquent, m est impair et m n'est divisible par aucun nombre premier p compris entre 3 et $\sqrt{n}$ (puisque $m \not\equiv 0\ [p]$), et donc *a fortiori* par aucun premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$ (car $m \leq n/2 \implies m \leq n \implies \sqrt{m} \leq \sqrt{n}$). D'après le lemme 1, m est donc premier. $\square$

Lemme 3 : $n - D_n \subseteq \mathbb{P}$

Démonstration : Soit $m \in D_n$. Alors $m \in F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$. Par conséquent, $n-m$ est impair (car m est impair et n pair) et $n-m$ n'est divisible par aucun nombre premier p compris entre 3 et $\sqrt{n}$ (puisque $m \not\equiv n\ [p]$), et donc *a fortiori* par aucun premier compris entre 3 et $\sqrt{n-m}$ (car $n - m \leq n \implies \sqrt{n-m} \leq \sqrt{n}$). D'après le lemme 1, $n-m$ est donc premier. $\square$

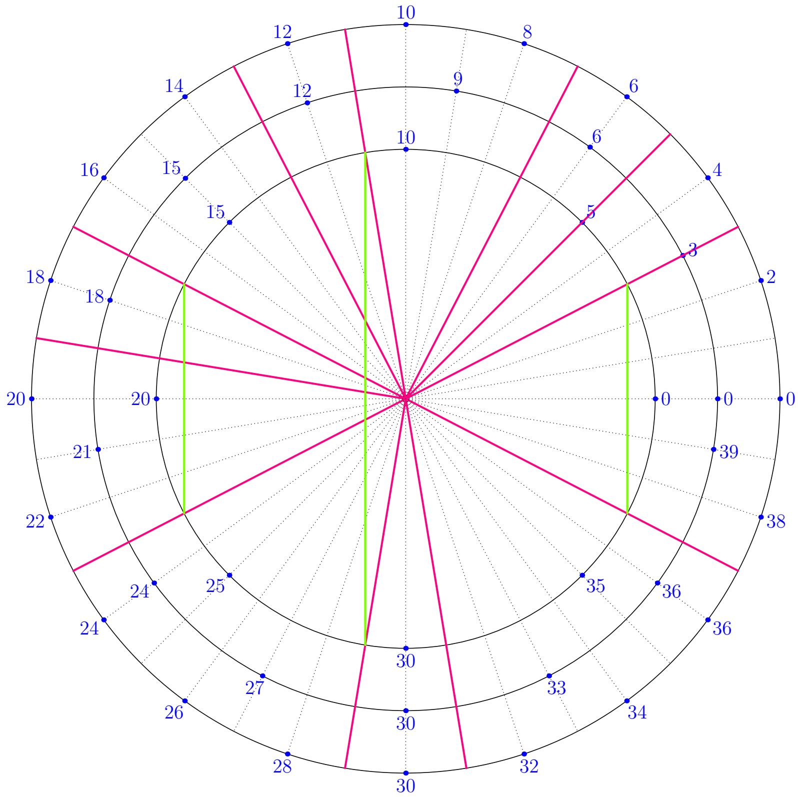
Les ensembles D_n ne contiennent que des décomposants de Goldbach de n.

Lemme 4 : Soit $n \in 2\mathbb{N}+6$. Si $D_n \neq \varnothing$, alors n vérifie la conjecture de Goldbach.

Démonstration : Si $D_n \neq \varnothing$, il contient un entier p nécessairement premier (d'après le lemme 1), tel que $q = n-p$ est également premier (d'après le lemme 2), et donc $n = p+q$ vérifie la conjecture de Goldbach.

Annexe 2 : visualisation sur cercles concentriques

Les rayons roses sont caractérisés par le fait qu'ils ne doivent toucher aucun nombre auquel est associé un plot bleu sur les cercles concentriques ; chaque cercle gère la divisibilité par 2, 3 et 5 de l'extérieur des cercles vers le centre ; les décomposants de Goldbach sont notés par des traits verts verticaux, qui relient deux rayons roses symétriques en haut et bas du graphique ; ont été conservés les nombres premiers 3 et 5, bien qu'ils aient leur propre plot de divisibilité qui soit marqué, pour que toutes les décompositions de Goldbach soient visibles ; cependant la démonstration en annexe 1 ne considère que les décomposants de Goldbach qui sont compris entre $\sqrt{n}$ et $n/2$) :



Références

[1] Timothy Gowers, leçon inaugurale de sa Chaire Combinatoire au Collège de France, 21/1/2021 https://www.college-de-france.fr/site/timothy-gowers/inaugural-lecture-2021-01-21-18h00.htm.

[2] Olivier Cogis, Claudine Robert, Théorie des graphes, au-delà des ponts de Königsberg, édition Vuibert, 2003.