Conjecture de Goldbach, langage à 4 lettres, variables et invariants

Denise Vella-Chemla

21/04/2014

1 Introduction

La conjecture de Goldbach stipule que tout nombre pair sauf 2 est la somme de deux nombres premiers. Dans la suite, on s'intéresse aux décompositions d'un nombre pair n en somme de deux nombres impairs $p+q$ avec $3 \leqslant p \leqslant n/2$, $n/2 \leqslant q \leqslant n-3$ et $p \leqslant q$. On appelle p un *sommant de premier rang* et q un *sommant de second rang* de n.

Notations :

On désignera par :
- a : une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q premiers ;
- b : une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p composé et q premier ;
- c : une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p premier et q composé ;
- d : une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q composés.

Exemple :

40	3	5	7	9	11	13	15	17	19
	37	35	33	31	29	27	25	23	21
l_{40}	a	c	c	b	a	c	d	a	c

2 Le tableau principal

On désigne par $T = (L, C) = (\ l_{n,m}\ )$ le tableau dont les éléments $l_{n,m}$ sont l'une des lettres a, b, c, d. L'indice n appartient à l'ensemble L des nombres pairs supérieurs ou égaux à 6. L'indice m, appartenant à l'ensemble C des nombres impairs supérieurs ou égaux à 3, est un élément de la liste des sommants de n de premier rang.

Considérons la fonction g définie ainsi :

$$\begin{array}{llll} g: & 2\mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N}+1 \\ & x & \mapsto & 2\left\lfloor \dfrac{x-2}{4} \right\rfloor + 1 \end{array}$$

$g(6) = 3, g(8) = 3, g(10) = 5, g(12) = 5, g(14) = 7, g(16) = 7, etc.$

La fonction $g(n)$ définit le plus grand des sommants de second rang associés à n.

Comme l'on ne prend en compte que les décompositions de n de la forme $p+q$ où $p \leqslant q$, seules apparaîtront dans le tableau les lettres $l_{n,m}$ telles que $m \leqslant 2\left\lfloor \dfrac{n-2}{4} \right\rfloor + 1$ de sorte que le tableau contient les éléments suivants : $l_{6,3}, l_{8,3}, l_{10,3}, l_{10,5}, l_{12,3}, l_{12,5}, l_{14,3}, l_{14,5}, l_{14,7}, etc.$

Voici le début du tableau.

C / L	3	5	7	9	11	13	15	17
6	a							
8	a							
10	a	a						
12	c	a						
14	a	c	a					
16	a	a	c					
18	c	a	a	d				
20	a	c	a	b				
22	a	a	c	b	a			
24	c	a	a	d	a			
26	a	c	a	b	c	a		
28	c	a	c	b	a	c		
30	c	c	a	d	a	a	d	
32	a	c	c	b	c	a	b	
34	a	a	c	d	a	c	b	a
36	c	a	a	d	c	a	d	a
...								

FIGURE 1 : mots des nombres pairs de 6 à 36

Remarques :

1) les mots situés sur les diagonales du tableau appelés *mots diagonaux* ont leurs lettres soit dans l'alphabet $A_{ab} = \{a, b\}$ soit dans l'alphabet $A_{cd} = \{c, d\}$.

2) un mot diagonal code des décompositions de même sommant de second rang.
Par exemple, sur la Figure 4, les lettres de la diagonale *aaabaa* qui commence à la lettre $l_{26,3} = a$ code les décompositions $3 + 23, 5 + 23, 7 + 23, 9 + 23, 11 + 23$ et $13 + 23$.

3) Désignons par l_n la ligne dont les éléments sont les $l_{n,m}$. La ligne l_n possède $\left\lfloor \dfrac{n-2}{4} \right\rfloor$ éléments.

4) n étant fixé, appelons $C_{n,3}$ la colonne formée des $l_{k,3}$ pour $6 \leqslant k \leqslant n$.

Dans cette colonne $C_{n,3}$, distinguons deux parties, la “partie haute” et la “partie basse” de la colonne.

Notons $H_{n,3}$ la “partie haute” de la colonne, i.e. l'ensemble des $l_{k,3}$ où $6 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \dfrac{n+4}{2} \right\rfloor$.

Notons $B_{n,3}$ la “partie basse” de la colonne, i.e. l'ensemble des $l_{k,3}$ où $\left\lfloor \dfrac{n+4}{2} \right\rfloor < k \leqslant n$.

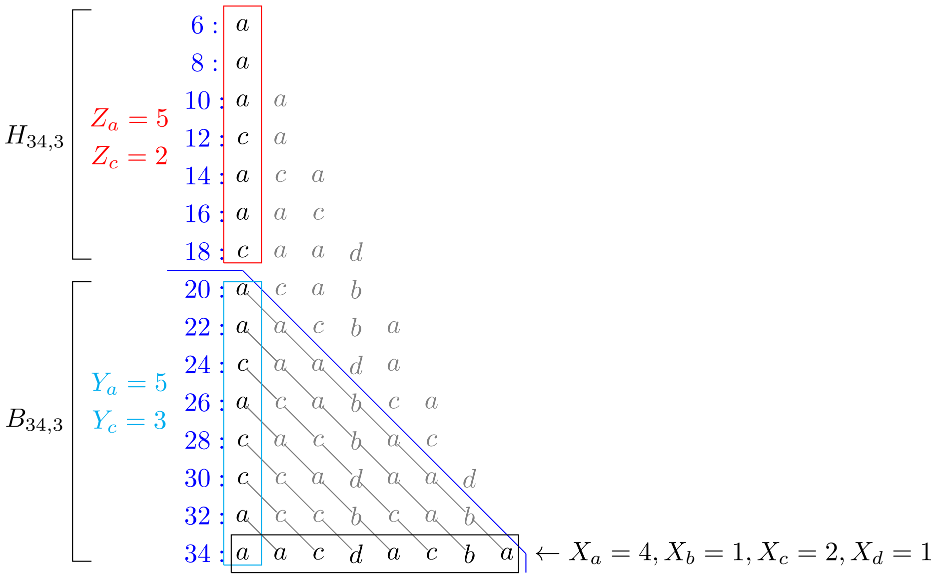


FIGURE 2 : $n = 34$

Pour mieux cerner les dénombrements de la section suivante, on utilisera la projection P de la ligne n sur la partie basse de la première colonne $B_{n,3}$ qui "associe" les lettres aux deux bouts d'une diagonale. Si on considère l'application $proj$ telle que $proj(a) = proj(b) = a$ et $proj(c) = proj(d) = c$ alors, puisque 3 est premier, $proj(l_{n,2k+1}) = l_{n-2k+2,3}$.

On peut comprendre l'effet de cette projection (qui préserve le sommant de second rang) en analysant les décompositions :

- si $p+q$ est codée par une lettre a ou une lettre b, cela correspond aux deux cas possibles dans lesquels q est premier, alors la décomposition $3+q$, contenant deux nombres premiers sera codée par la lettre a ;
- si $p+q$ est codée par une lettre c ou une lettre d, cela correspond aux deux cas possibles dans lesquels q est composé, alors la décomposition $3+q$, de la forme *premier* + *composé* sera codée par la lettre c.

On utilisera également dans la section suivante une projection qui transforme le sommant de premier rang en sommant de second rang que l'on combine à 3 comme sommant de premier rang ; analysons l'effet qu'une telle projection aura sur les décompositions :

- si $p + q$ est codée par une lettre a ou une lettre c, cela correspond aux deux cas possibles dans lesquels p est premier, alors la décomposition $3 + p$, contenant deux nombres premiers sera codée par la lettre a ;
- si $p+q$ est codée par une lettre b ou une lettre d, cela correspond aux deux cas possibles dans lesquels p est composé, alors la décomposition $3+p$, de la forme *premier* + *composé* sera codée par la lettre c.

3 Dénombrements

1) On note dans la ligne n par :

- $X_a(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *premier* + *premier* ;
- $X_b(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *composé* + *premier* ;
- $X_c(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *premier* + *composé* ;
- $X_d(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *composé* + *composé*.

$X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \left\lfloor \dfrac{n-2}{4} \right\rfloor$ est le nombre d'éléments de la ligne de n.

Exemple : $n = 34$:
$X_a(34) = \#\{3+31, 5+29, 11+23, 17+17\} = 4$
$X_b(34) = \#\{15+19\} = 1.$
$X_c(34) = \#\{7+27, 13+21\} = 2$
$X_d(34) = \#\{9+25\} = 1$

2) Soit $Y_a(n)$ (resp. $Y_c(n)$) le nombre de a (resp. c) qui apparaissent dans $B_{n,3}$. On rappelle qu'il n'y a que des lettres a et c dans la première colonne car elle contient les lettres associées aux décompositions de la forme $3 + x$ et que 3 est premier.

Exemple :

- $Y_a(34) = \#\{3+17, 3+19, 3+23, 3+29, 3+31\} = 5$
- $Y_c(34) = \#\{3+21, 3+25, 3+27\} = 3$

3) Compte-tenu de la projection P qui est une bijection, des définitions des lettres a, b, c, d, $Y_a(n) = X_a(n) + X_b(n)$ et $Y_c(n) = X_c(n) + X_d(n)$. Par suite, trivialement, $Y_a(n) + Y_c(n) = X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$.

Exemple :

$$\begin{array}{ll} Y_a(34) & = \#\{3+17, 3+19, 3+23, 3+29, 3+31\} \\ X_a(34) & = \#\{3+31, 5+29, 11+23, 17+17\} \\ X_b(34) & = \#\{15+19\} \\ & \\ Y_c(34) & = \#\{3+21, 3+25, 3+27\} \\ X_c(34) & = \#\{7+27, 13+21\} \\ X_d(34) & = \#\{9+25\} \end{array}$$

4) Soit $Z_a(n)$ (resp. $Z_c(n)$) le nombre de a (resp. c) qui apparaissent dans $H_{n,3}$.

Exemple :

- $Z_a(34) = \#\{3+3, 3+5, 3+7, 3+11, 3+13\} = 5$
- $Z_c(34) = \#\{3+9, 3+15\} = 2$

$Z_a(n) + Z_c(n) = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor$.

Rappel des propriétés identifiées

$$Y_a(n) = X_a(n) + X_b(n) \tag{1}$$

$$Y_c(n) = X_c(n) + X_d(n) \tag{2}$$

$$Y_a(n) + Y_c(n) = X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor \tag{3}$$

$$Z_a(n) + Z_c(n) = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor \tag{4}$$

Ajoutons deux nouvelles propriétés à celles-ci :

$$X_a(n) + X_c(n) = Z_a(n) + \delta_{2p} \tag{5}$$

avec δ_{2p} qui vaut 1 dans le cas où n est le double d'un nombre premier et qui vaut 0 sinon.

$$X_b(n) + X_d(n) = Z_c(n) + \delta_{spec} \tag{6}$$

avec δ_{spec} qui vaut 0 dans le cas où il existe k tel que $n = 4k$, ou bien dans le cas où n est le double d'un nombre premier, et qui vaut 1 sinon.

4 Evolution des variables

Dans cette section, étudions comment les différentes variables évoluent, de manière à en déduire que X_a (le nombre de décompositions d'un entier pair sous la forme d'une somme de deux nombres premiers) ne peut jamais être nul.

$Z_a(n) + Z_c(n) = \left\lfloor \dfrac{n-4}{4} \right\rfloor$ est une fonction croissante de n, elle augmente de 1 à chaque n double de pair.

$Z_a(n)$ augmente de 1 quand $\dfrac{n-2}{2}$ est un nombre premier et $Z_c(n)$ augmente de 1 quand $\dfrac{n-2}{2}$ est un nombre composé.

$Y_a(n)+Y_c(n) = X_a(n)+X_b(n)+X_c(n)+X_d(n) = \left\lfloor \dfrac{n-2}{4} \right\rfloor$ est une fonction croissante de n, elle augmente de 1 à chaque n double d'impair.

Voyons maintenant dans le détail comment évoluent $Y_a(n)$ et $Y_c(n)$.

Dans le cas où n est un double d'impair, on ajoute un nombre à l'intervalle $H_{n,3}$; si ce nombre $(n-3)$ est premier (resp. composé), $Y_a(n)$ (resp. $Y_c(n)$) est augmenté de 1 par rapport à $Y_a(n-2)$ (resp. $Y_c(n-2)$).

Dans le cas où n est un double de pair, 4 cas se présentent. Etudions la manière dont évolue l'ensemble de décompositions $H_{n,3}$.

- si $n-3$ et $n/2-1$ sont tous les deux premiers, on retire en bas et et on ajoute en haut de l'intervalle $H_{n,3}$ deux lettres de même sorte, alors $Y_a(n)$ et $Y_c(n)$ restent constants ;
- si $n-3$ est premier et $n/2-1$ est composé alors $Y_a(n)$ est augmenté de 1 et $Y_c(n)$ est diminué de 1 ;
- si $n-3$ est composé et $n/2-1$ est premier alors $Y_c(n)$ est augmenté de 1 et $Y_a(n)$ est diminué de 1 ;
- si $n-3$ et $n/2-1$ sont tous les deux composés, on retire en bas et et on ajoute en haut de l'intervalle $H_{n,3}$ deux lettres de même sorte, alors $Y_a(n)$ et $Y_c(n)$ restent constants.

Mais on n'arrive pas à déduire de l'intrication de toutes ces variables que $X_a(n)$ est toujours strictement positif. En annexe 1 sont fournies dans une table les valeurs des différentes variables pour n compris entre 14 et 100.

5 Essayer d'aboutir à une contradiction

Essayons cependant d'aboutir à une contradiction en partant de l'hypothèse que $X_a(n)$ est nul.

Si $X_a(n) = 0$, on a

$$X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor \tag{3}$$

Cela équivaut à

$$X_c(n) + X_d(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - X_b(n)$$

et donc à cause de (2) à

$$Y_c(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - X_b(n) \tag{7}$$

Là, on doit distinguer 2 cas :

– *cas 1* : Si n est un double d'impair (i.e. de la forme $4k+2$), alors

$$\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor + 1 \tag{a}$$

– *cas 2* : Si n est un double de pair (i.e. de la forme $4k$), alors

$$\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor \tag{b}$$

On remplace $\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$ par ces deux valeurs dans l'égalité (7) ci-dessus ; on obtient :

– *cas 1* : $$Y_c(n) = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor + 1 - X_b(n) \tag{7a}$$

– *cas 2* : $$Y_c(n) = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor - X_b(n) \tag{7b}$$

D'autre part, de l'hypothèse $X_a(n) = 0$ et de $X_a(n) + X_c(n) = Z_a(n) + \delta_{2p}$ (5), il découle

$$X_c(n) = Z_a(n) + \delta_{2p} \tag{8}$$

On réécrit (2) en

$$X_c(n) = Y_c(n) - X_d(n) \tag{2'}$$

$$X_d(n) = Y_c(n) - X_c(n) \tag{2''}$$

En identifiant $X_c(n)$ dans (2') et (8), on obtient

$$Z_a(n) + \delta_{2p} = Y_c(n) - X_d(n) \tag{9}$$

que l'on réécrit

$$X_d(n) = Y_c(n) - Z_a(n) - \delta_{2p} \tag{9'}$$

En identifiant $X_d(n)$ dans (9') et (2"), on obtient

$$X_c(n) = Z_a(n) + \delta_{2p} \tag{10}$$

On est retombé sur la propriété 5, le raisonnement tourne en rond.

En annexe 2 sont fournies des représentations graphiques des bijections ensemblistes pour les cas $n = 32$, 34, 98 et 100.

Le fichier *http://denise.vella.chemla.free.fr/annexes.pdf* fournit

– un rappel historique d'un texte de Laisant qui présentait déjà en 1897 l'idée de "bandes" de nombres impairs à mettre en regard et à colorer pour voir les décompositions de Goldbach ;
– un programme et son exécution qui implémente les idées présentées dans la présente note.

Annexe 1 : tableau de valeurs des variables pour n compris entre 14 et 100

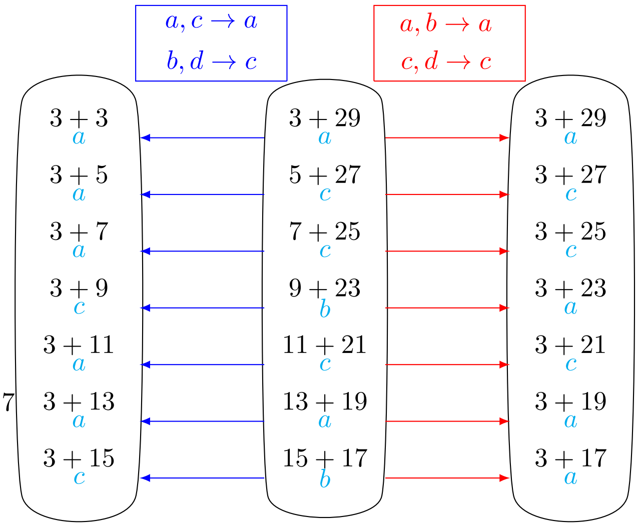
n	$X_a(n)$	$X_b(n)$	$X_c(n)$	$X_d(n)$	$Y_a(n)$	$Y_c(n)$	$\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$	$Z_a(n)$	$Z_c(n)$	$\left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor$
14	2	0	1	0	2	1	3	2	0	2
16	2	0	1	0	2	1	3	3	0	3
18	2	0	1	1	2	2	4	3	0	3
20	2	1	1	0	3	1	4	3	1	4
22	3	1	1	0	4	1	5	3	1	4
24	3	0	1	1	3	2	5	4	1	5
26	3	1	2	0	4	2	6	4	1	5
28	2	1	3	0	3	3	6	5	1	6
30	3	0	2	2	3	4	7	5	1	6
32	2	2	3	0	4	3	7	5	2	7
34	4	1	2	1	5	3	8	5	2	7
36	4	0	2	2	4	4	8	6	2	8
38	2	2	5	0	4	5	9	6	2	8
40	3	1	4	1	4	5	9	7	2	9
42	4	0	3	3	4	6	10	7	2	9
44	3	2	4	1	5	5	10	7	3	10
46	4	2	4	1	6	5	11	7	3	10
48	5	0	3	3	5	6	11	8	3	11
50	4	2	4	2	6	6	12	8	3	11
52	3	3	5	1	6	6	12	8	4	12
54	5	1	3	4	6	7	13	8	4	12
56	3	4	5	1	7	6	13	8	5	13
58	4	3	5	2	7	7	14	8	5	13
60	6	0	3	5	6	8	14	9	5	14
62	3	4	7	1	7	8	15	9	5	14
64	5	2	5	3	7	8	15	10	5	15
66	6	1	4	5	7	9	16	10	5	15
68	2	5	8	1	7	9	16	10	6	16
70	5	3	5	4	8	9	17	10	6	16
72	6	2	4	5	8	9	17	10	7	17
74	5	4	6	3	9	9	18	10	7	17
76	5	4	6	3	9	9	18	11	7	18
78	7	2	4	6	9	10	19	11	7	18
80	4	5	7	3	9	10	19	11	8	19
82	5	5	7	3	10	10	20	11	8	19
84	8	1	4	7	9	11	20	12	8	20
86	5	5	8	3	10	11	21	12	8	20
88	4	5	9	3	9	12	21	13	8	21
90	9	0	4	9	9	13	22	13	8	21
92	4	6	9	3	10	12	22	13	9	22
94	5	5	9	4	10	13	23	13	9	22
96	7	2	7	7	9	14	23	14	9	23
98	3	6	11	4	9	15	24	14	9	23
100	6	4	8	6	10	14	24	14	10	24

Annexe 2 : bijections ensemblistes

- Cas $n = 32$

$Z_a = X_a + X_c = 5$
$Z_c = X_b + X_d = 2$

$Z_a + Z_c = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor = 7$



$Y_a = X_a + X_b = 4$
$Y_c = X_c + X_d = 3$

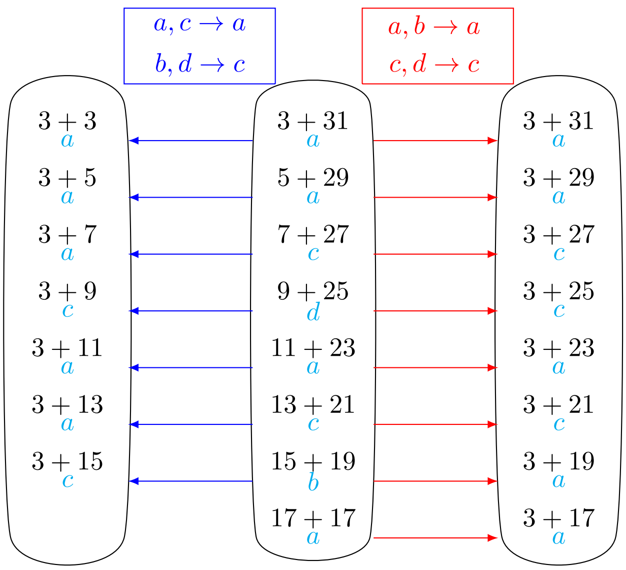
$Y_a + Y_c = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor = 7$

$X_a = 2$
$X_b = 2$
$X_c = 3$
$X_d = 0$

- Cas $n = 34$

$Z_a = X_a + X_c = 5$
$Z_c = X_b + X_d = 2$

$Z_a + Z_c = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor = 7$

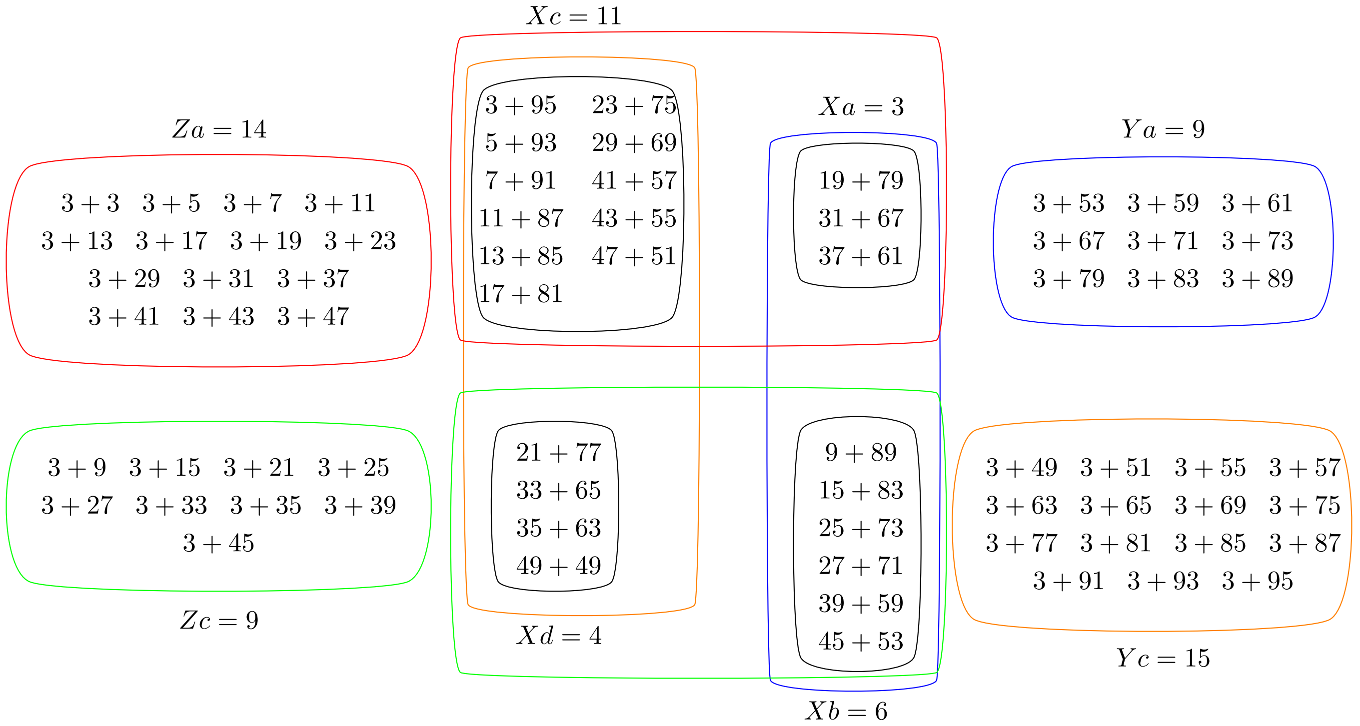


$Y_a = X_a + X_b = 5$
$Y_c = X_c + X_d = 3$

$Y_a + Y_c = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor = 8$

$X_a = 4$
$X_b = 1$
$X_c = 2$
$X_d = 1$

- **Cas** $n = 98$



- **Cas** $n = 100$