Calculs au sujet de la conjecture de Goldbach à l'aide du logiciel gb-tools (Denise Vella-Chemla, 31.8.2020)

Sont fournis ici des extraits des résultats de l'exécution d'un programme calculant le nombre de décompositions de Goldbach des nombres pairs inférieurs à 10^9 ; ce programme fait partie d'une suite logicielle *gb-tools* qui a été écrite par Daniel Diaz. Le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair est le nombre de façons différentes de l'écrire comme une somme de deux nombres premiers impairs. La suite logicielle *gb-tools* nous avait également permis en décembre 2010 d'étudier le positionnement de certains nombres de décompositions de Goldbach dans la fameuse “comète de Goldbach”, ce positionnement dépendant des factorisations des nombres pairs considérés (cf [2]).

Est présentée ci-dessous une comparaison des résultats informatiques obtenus par programme avec les résultats mathématiques heuristiques proposés dans la littérature. Landau a proposé comme estimation de $G(n)$, le nombre de décompositions de Goldbach, la formule

$$\frac{n}{2\ (\ln\, n)^2}$$

(qu'on note $L(n)$ en troisième colonne dans les différentes parties du tableau) et Hardy et Littlewood ont proposé la formule

$$2\ C^{\text{te}} \frac{n}{(\ln\, n)^2} \prod_{\substack{p\ premier,\\ p|n,\\ p\geq 3}} \frac{p-1}{p-2}$$

(cf [1] p. 32, cette formule est notée $HL(n)$, en quatrième colonne dans les différentes parties du tableau). C^{te} est approximativement égale à 0.660175 [1].

n	G(n)	L(n)	HL(n)	2p	n	G(n)	L(n)	HL(n)	2p
92	4	2.24	5.94		992	13	10.41	28.46	
94	5	2.27	6.01	×	994	25	10.43	33.06	
96	7	2.30	12.17		996	37	10.44	55.18	
98	3	2.33	7.39		998	17	10.46	27.63	×
10^2	6	2.35	8.30		10^3	28	10.47	36.89	
102	8	2.38	12.59		1002	36	10.49	55.42	
104	5	2.41	6.37		1004	18	10.50	27.75	
106	6	2.43	6.44	×	1006	18	10.52	27.79	×
108	8	2.46	13.01		1008	42	10.53	66.78	
110	6	2.48	8.76		1010	25	10.55	37.15	

n	G(n)	L(n)	HL(n)	2p	n	G(n)	L(n)	HL(n)	2p
9992	102	58.90	155.55		99 992	638	377.19	1032.94	
9994	98	58.91	164.72		99 994	651	377.20	1068.68	
9996	255	58.92	398.32		99 996	1303	377.21	2173.27	
9998	99	58.93	155.62	×	99 998	605	377.21	996.10	×
10^4	127	58.94	207.52		10^5	810	377.22	1328.15	
10 002	197	58.95	311.33		100 002	1423	377.22	2390.71	
10 004	99	58.95	162.39		100 004	627	377.23	1043.58	
10 006	92	58.96	155.72	×	100 006	630	377.24	1030.51	
10 008	192	58.97	311.48		100 008	1209	377.24	1992.36	
10 010	191	58.98	302.09		100 010	831	377.25	1356.95	

1. voir http://denisevellachemla.eu/Hardy-Littlewood-p1.jpg page extraite de [1] dans laquelle est fournie la formule de calcul de la constante.

n	G(n)	L(n)	HL(n)	2p	n	G(n)	L(n)	HL(n)	2p
999 992	4858	2619.59	8300.89		9 999 992	29 047	19 246.07	50 822.10	
999 994	4235	2619.59	7246.82		9 999 994	29 790	19 246.08	52 061.67	
999 996	8194	2619.60	13 946.72		9 999 996	58 553	19 246.08	102 182.04	
999 998	4206	2619.60	7213.23		9 999 998	28 983	19 246.08	50 822.13	$\times$
10^6	5402	2619.61	9223.28		10^7	38 807	19 246.09	67 762.86	
1 000 002	8200	2619.61	13 834.94		10 000 002	59 624	19 246.09	103 903.07	
1 000 004	4160	2619.62	7134.19		10 000 004	36 850	19 246.09	64 574.04	
1 000 006	4871	2619.62	8300.99		10 000 006	29 835	19 246.10	52 032.19	
1 000 008	9380	2619.62	16 006.53		10 000 008	58 229	19 246.10	101 644.34	
1 000 010	5951	2619.63	10 248.17		10 000 010	39 045	19 246.10	68 447.38	

n	G(n)	L(n)	HL(n)	2p	n	G(n)	L(n)	HL(n)	2p
99 999 992	218 826	147 352.86	389 106.94		999 999 992	1 706 569	1 164 269.68	3 080 611.25	
99 999 994	218 773	147 352.86	389 436.97		999 999 994	2 044 282	1 164 269.68	3 689 310.75	
99 999 996	437 175	147 352.87	778 837.19		999 999 996	3 407 072	1 164 269.68	6 148 851.00	
99 999 998	274 787	147 352.87	489 163.06		999 999 998	1 705 026	1 164 269.68	3 078 887.75	
10^8	291 400	147 352.87	518 809.31		10^9	2 274 205	1 164 269.68	4 099 234.25	
100 000 002	464 621	147 352.87	825 805.69		1 000 000 002	3 496 205	1 164 269.68	6 306 844.00	
100 000 004	247 582	147 352.87	440 288.19		1 000 000 004	1 747 858	1 164 269.68	3 153 257.25	
100 000 006	218 966	147 352.88	389 902.75		1 000 000 006	1 704 301	1 164 269.68	3 074 425.50	$\times$
100 000 008	437 717	147 352.88	778 214.00		1 000 000 008	4 151 660	1 164 269.68	7 492 717.50	
100 000 010	323 687	147 352.88	576 454.88		1 000 000 010	2 422 662	1 164 269.68	4 372 516.50	

On propose notre propre formule basée sur la démonstration proposée en [3] (la démonstration a été rédigée formellement par Leila Schneps). On ne peut fournir d'explication pour la division par la racine du logarithme, pourtant les résultats fournis par programme, dans les tableaux ci-dessous, semblent de plus en plus proches des nombres de décomposants de Goldbach, et dans la dernière partie du tableau, pour n proche de 10^9 du moins, les valeurs minorent les nombres de décompositions de Goldbach.

$$D(n) = \frac{n}{\sqrt{\ln n}} \prod_{\substack{p\ premier,\\ p|n,\\ 3\leq p\leq\sqrt{n}}} \left(1-\frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p\ premier,\\ p\nmid n,\\ 3\leq\ p\leq\sqrt{n}}} \left(1-\frac{2}{p}\right)$$

Note : Le signe $\nmid$ sous le $\prod$ du deuxième produit signifie "ne divise pas". Il est plutôt insuffisamment barré.

n	G(n)	D(n)	n	G(n)	D(n)
92	4	6.18	992	13	24.25
94	5	6.30	994	25	28.19
96	7	12.83	996	37	47.07
98	3	7.84	998	17	23.58
10^2	6	8.87	10^3	28	31.49
102	8	13.55	1002	36	47.33
104	5	6.89	1004	18	23.71
106	6	7.01	1006	18	23.75
108	8	14.26	1008	42	57.11
110	6	9.66	1010	25	31.79

n	G(n)	D(n)	n	G(n)	D(n)
9992	102	126.09	99 992	638	752.15
9994	98	133.53	99 994	651	778.18
9996	255	322.92	99 996	1303	1582.51
9998	99	126.16	99 998	605	725.33
10^4	127	168.25	10^5	810	967.13
10 002	197	252.42	100 002	1423	1740.87
10 004	99	131.66	100 004	627	759.91
10 006	92	126.26	100 006	630	750.40
10 008	192	252.57	100 008	1209	1450.80
10 010	191	244.96	100 010	831	988.11

n	G(n)	D(n)	n	G(n)	D(n)
999 992	4 858	5 589.30	9 999 992	29 047	31 864.30
999 994	4 235	4 879.56	9 999 994	29 790	32 641.47
999 996	8 194	9 390.85	9 999 996	58 553	64 065.85
999 998	4 206	4 856.93	9 999 998	28 983	31 864.32
10^6	5 402	6 210.37	10^7	38 807	42 485.74
1 000 002	8 200	9 315.59	10 000 002	59 624	65 144.83
1 000 004	4 160	4 803.72	10 000 004	36 850	40 486.50
1 000 006	4 871	5 589.37	10 000 006	29 835	32 623.00
1 000 008	9 380	10 777.81	10 000 008	58 229	63 728.71
1 000 010	5 951	6 900.48	10 000 010	39 045	42 914.96

n	G(n)	D(n)	n	G(n)	D(n)
99 999 992	218 826	228 075.07	999 999 992	1 706 569	1 705 384.75
99 999 994	218 773	228 268.60	999 999 994	2 044 282	2 042 353.50
99 999 996	437 175	456 515.53	999 999 996	3 407 072	3 403 918.75
99 999 998	274 787	286 723.12	999 999 998	1 705 026	1 704 430.37
10^8	291 400	304 100.21	10^9	2 274 205	2 269 275.75
100 000 002	464 621	484 045.68	1 000 000 002	3 496 205	3 491 381.75
100 000 004	247 582	258 074.76	1 000 000 004	1 747 858	1 745 600.62
100 000 006	218 966	228 541.31	1 000 000 006	1 704 301	1 701 959.37
100 000 008	437 717	456 150.21	1 000 000 008	4 151 660	4 147 861.25
100 000 010	323 687	337 888.50	1 000 000 010	2 422 662	2 420 563.00

Bibliographie

[1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Some problems of "partitio numerorum" ; III : On the expression of a number as a sum of primes, Acta Math. **44**, 1923, 1-70.

[2] Denise Vella-Chemla, Quelques comètes : indicatrice d'Euler, somme des diviseurs, nombre de décompositions de Goldbach, http://denisevellachemla.eu/cometes1111.pdf.

[3] Denise Vella-Chemla, démonstration de la caractérisation des décomposants de Goldbach, http://denisevellachemla.eu/demo-caracterisation-DG.pdf.