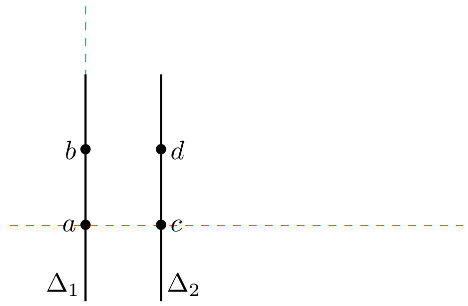
Modéliser (DV, 31/10/2015)

On explique ici où on est arrêté, bloqué : on ne trouve pas comment utiliser une fonction qu'on a définie, fonction qui agit sur un champ de lettres, pour obtenir des informations sur l'ensemble des nombres premiers.

Notre fonction f est définie par :

$$f: \begin{array}{lcl} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & p_x(u)+p_y(v) \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut "voir" la fonction f de la façon suivante. On note $a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $d\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, les 4 points du plan. On appelle Δ_1 la droite contenant les points a et b et Δ_2 la droite contenant les points c et d.



f est la projection orthogonale qui associe à un bipoint (vecteur) le point projeté orthogonal de son point extrémité sur la droite d à laquelle appartient son point origine ($d = \Delta_1$ ou $d = \Delta_2$). Les images par cette projection des bipoints sont :

$aa \to a$	$ba \to a$	$ca \to c$	$da \to c$
$ab \to b$	$bb \to b$	$cb \to d$	$db \to d$
$ac \to a$	$bc \to a$	$cc \to c$	$dc \to c$
$ad \to b$	$bd \to b$	$cd \to d$	$dd \to d$

On étend cette fonction à une suite de lettres, en l'appliquant d'un coup à tous les doublons de lettres de cette suite. Par exemple,

$$f(\ldots aacdacba \ldots) = \ldots .aadcada \ldots$$

On imagine cette opération appliquée à l'infini, sur un champ de lettres infini ; chaque lettre $l_{i,j}$ du champ se déduit par les règles de réécriture vues ci-dessus des lettres $l_{i-1,j-1}$ et $l_{i-1,j}$ (d'une manière similaire à la manière dont les coefficients du binôme sont calculés dans le triangle de Pascal). Ci-dessous est fourni un extrait de ce champ qui représente les décompositions des nombres pairs de 6 à 34 en sommes de 2 entiers impairs depuis la somme $3+3$ en haut à gauche du nombre pair 6 à la somme $17+19$ en bas à droite du nombre pair 34. La huitième ligne par exemple fournit les lettres associées aux sommes décomposant l'entier pair 20 et qui sont $3+17=a$, $5+15=c$, $7+13=a$, $9+11=b$, $11+9=c$, $13+7=a$, $15+5=b$ et $17+3=a$.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\ldots & {\color{blue}a} & c & c & b & a & a & d & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & a & c & d & a & a & b & c & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}a} & a & d & c & a & b & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & a & b & c & c & b & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & b & a & c & d & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & b & a & a & d & c & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}a} & {\color{blue}d} & a & a & b & c & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}b} & c & a & b & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}b} & {\color{blue}a} & c & b & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}a} & {\color{blue}d} & {\color{blue}a} & a & d & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}b} & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & b & c & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}b} & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & b & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}c} & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}d} & {\color{blue}a} & {\color{blue}a} & {\color{blue}d} & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}c} & {\color{blue}b} & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}b} & c & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}d} & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}b} & {\color{blue}a} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Illustrons sur un exemple la règle générale de réécriture qui permet de trouver la lettre $l_{i,j}$ à partir des lettres $l_{i-1,j-1}$ et $l_{i-1,j}$:

la lettre	représente la décomposition	exemple
$l_{i-1,j-1}$	$n = x_1 + y_1$	$30 = 3 + 27$
$l_{i-1,j}$	$n = x_2 + y_2 = (x_1 + 2) + (y_1 - 2)$	$30 = 5 + 25$
$l_{i,j}$	$n + 2 = x_2 + y_1 = (x_1 + 2) + y_1$	$32 = 5 + 27$

Lorsqu'on compte les lettres dans certains mots extraits du champ de lettres, par exemple des lettres a, on compte des assertions logiques du type

$$(n = x + y) \;\wedge\; (x \leqslant y) \;\wedge\; (x \; premier) \;\wedge\; (y \; premier)$$

Remarque : les décompositions de Goldbach binaire (i.e. en somme de 2 premiers) sont les a qui se trouvent parmi les lettres colorées en bleu du champ de lettres.

Ci-dessous, on a noté en rouge les lettres a en fin de mots bleus qui représentent les nombres premiers au sens où elles codent les décompositions de Goldbach triviales de la forme $2p = p + p$. Ces lettres sont bien sûr alignées car elles sont en fin de mots et que la longueur des mots bleus augmente régulièrement.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\ldots & {\color{red}a} & c & c & b & a & a & d & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & a & c & d & a & a & b & c & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{red}a} & a & d & c & a & b & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & a & b & c & c & b & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{red}a} & b & a & c & d & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & b & a & a & d & c & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}a} & {\color{blue}d} & a & a & b & c & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}b} & c & a & b & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}b} & {\color{red}a} & c & b & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}a} & {\color{blue}d} & {\color{blue}a} & a & d & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}b} & {\color{blue}c} & {\color{red}a} & b & c & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}b} & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & b & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}c} & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}d} & {\color{blue}a} & {\color{blue}a} & {\color{blue}d} & a & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}c} & {\color{blue}b} & {\color{blue}c} & {\color{blue}a} & {\color{blue}b} & c & \ldots \\
\ldots & {\color{blue}a} & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}d} & {\color{blue}a} & {\color{blue}c} & {\color{blue}b} & {\color{red}a} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

On cherche à coder les lettres a, b, c, d par des matrices 2×2. On a trouvé par programme certaines possibilités de matrices dont les éléments sont tous entiers mais aucune de ces possibilités ne permet de distinguer a de c et b de d. Il est vrai que la lecture des 16 règles de réécriture montre cette similarité des rôles des lettres a et c d'une part et b et d d'autre part.

Une solution possible qui vérifie les règles $aa = a, ab = b, etc$ est :

$$a = c = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = d = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$