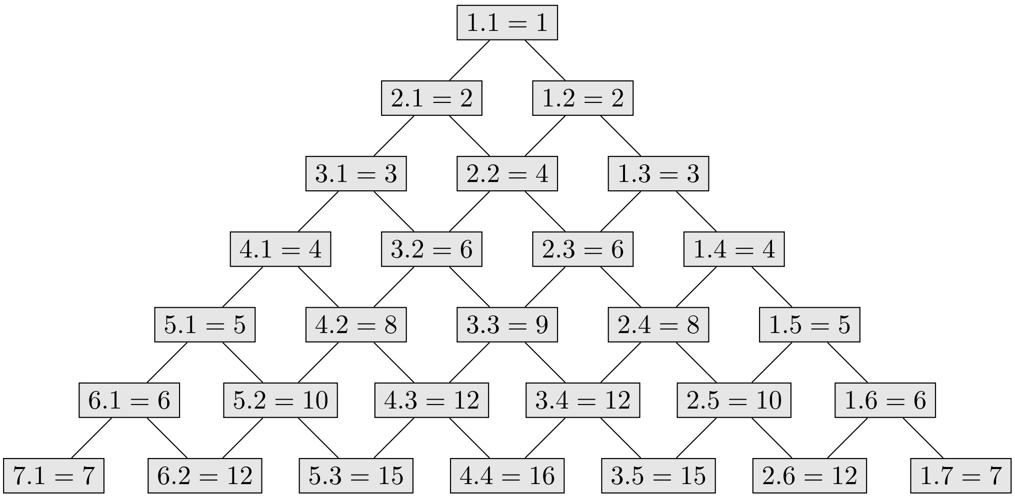
Essai (Denise Vella-Chemla, 5.2.2017)

Graphe des produits de 2 entiers : un noeud (x, y) a 2 fils $(x + 1, y)$ et $(x, y + 1)$.



C'est une table de Pythagore, autrement représentée. Sur chaque chemin du graphe ci-dessus, les nombres sont strictement ordonnés. Le problème est qu'on n'arrive pas à situer les nombres d'un chemin par rapport à ceux d'un autre chemin et de ce fait, à identifier certains sommets du graphe.

L'opération qui fait passer d'un point $\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ y_1 \end{pmatrix}$ d'une hyperbole à un autre point de la même hyperbole $\begin{pmatrix} x_2 \\ \\ y_2 \end{pmatrix}$ consiste par exemple à multiplier la première coordonnée par un scalaire et à diviser la deuxième coordonnée par le scalaire en question, pour conserver le produit. On transforme $\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ y_1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \\ \dfrac{y_1}{\lambda} \end{pmatrix}$. Cette transformation peut être représentée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$.

On pourrait peut-être trouver exactement le nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné si on savait quotienter l'ensemble des points du plan par cette transformation, tous les produits égaux à un même nombre étant identifiés.

On a par ce cheminement identifié une méthode qui compte le nombre de nombres premiers inférieurs strictement à un nombre donné et qui est conditionnée par le fait qu'on sache quotienter par la relation d'équivalence qui lient deux points dont les produits des coordonnées sont égaux.

Illustrons cette méthode sur deux exemples. Le premier point est $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. On cherche le nombre de points entiers sous l'hyperbole d'équation $xy = 16$, à gauche de A et d'abscisse plus grande que 1. C'est l'ensemble des points

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ avec x}' < \text{x etx}'\text{y}' < \text{xy} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ avec y}' < \text{y et x}'\text{y}' < \text{xy} \right\} . \\ = \; & \{3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 4.3, 4.2\} \end{aligned}$$

La relation d'équivalence identifie 2.3 et 3.2 ainsi que 2.6, 3.4 et 4.3 ou 2.4 et 4.2. Il reste 8 produits, ce qui permet de trouver 5 $(= 16 - 3 - 8)$ nombres premiers strictement inférieurs à 16.

Le second point est $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. On cherche le nombre de points entiers sous l'hyperbole d'équation $xy = 30$, à gauche de B et d'abscisse plus grande que 1. On trouve l'ensemble de points

$$\begin{matrix} \{5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, \\ 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14\} \end{matrix} .$$

Les identifications de points permettent d'aboutir à 18 classes de points différentes et ainsi à 30-3-18=9 nombres premiers de 3 à 29.