Conjecture de Goldbach, chip-firing game, matrices 2×2 et descente infinie (Denise Vella-Chemla, 20.8.18)

On propose ici une nouvelle tentative de démontrer la conjecture de Goldbach.

Dans la suite de ce document, on ne s'intéresse qu'aux décompositions $p+(n-p)$ de chaque nombre pair n en sommes de 2 nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 pour lesquelles p est un nombre premier inférieur ou égal à $n/2$.

Notre proposition utilise les éléments suivants :

- un langage $\mathcal{L}$ à deux lettres basé sur l'alphabet $\mathcal{A}=\{a,b\}$. La lettre a code les décompositions de la forme $p+(n-p)$ telles que $n-p$ est un nombre premier ; la lettre b code les décompositions de la forme $p+(n-p)$ telles que $n-p$ est composé ;
- des matrices de transition 2×2 à coefficients entiers [*] ; chaque matrice intègre dans ses coefficients une certaine connaissance sur les décompositions de n ainsi qu'une certaine connaissance sur les décompositions de $n+2$, nous verrons comment ;
- la notion de chip-firing game [†] : on n'utilisera pas ici de résultats provenant de la théorie liée à cette notion, mais elle nous a été utile par son potentiel suggestif d'une part, et d'autre part, elle permettra de comprendre aisément comment s'effectue le passage de la matrice associée au nombre pair n à celle associée au nombre pair $n+2$.

Pour fixer les idées, commençons par étudier deux exemples :

- au nombre pair 30 est associée la matrice $M_{30}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$.

- au nombre pair 32 est associée la matrice $M_{32}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$.

Penser la transition de M_{30} à M_{32} en terme de chip-firing game consiste à se dire que le 2 en haut à droite de M_{30} "a donné" 1 (chip ou jeton) au 1 en bas à gauche de M_{30}, ce qui a fait passer cet élément en bas à gauche de 1 à 2, et ce qui l'a lui-même fait passer en haut à droite de 2 à 1.

Explicitons à quoi correspondent les 4 éléments de la matrice M_{30} et les 4 éléments de la matrice M_{32}.

	p	$n-p$	$(n+2)-p$	*doublon*	
$n=30$	3	27	29	*ba*	$\begin{pmatrix}aa\ 1 & ab\ 2\\ ba\ 1 & bb\ 1\end{pmatrix}$
	5	25	27	*bb*	
	7	23	25	*ab*	
	11	19	21	*ab*	
	13	17	19	*aa*	

	p	$n-p$	$(n+2)-p$	*doublon*	
$n=32$	3	29	31	*aa*	$\begin{pmatrix}aa\ 1 & ab\ 1\\ ba\ 2 & bb\ 1\end{pmatrix}$
	5	27	29	*ba*	
	7	25	27	*bb*	
	11	21	23	*ba*	
	13	19	21	*ab*	

Comme on le voit dans ces exemples, chaque matrice intègre dans ses coefficients une certaine connaissance sur les décompositions de n (dans les lettres de gauche des doublons de lettres que comptent ses coefficients) ainsi qu'une certaine connaissance sur les décompositions de $n+2$ (dans les lettres de droite des doublons de lettres que comptent ses coefficients).

*. Se reporter par exemple à A. Connes, Noncommutative geometry year 2000, [2], http://alainconnes.org/docs/2000.pdf, p.8, pour trouver des matrices telles que $f_{ab}(n)\neq f_{ba}(n)$ mais il s'agit alors d'opérateurs. Cette idée a eu un fort potentiel suggestif pour nous.

†. A. Björner, L. Lovász, P. W. Shor : Chip-firing games on graphs. European Journal of Combinatorics archive, Volume 12 Issue 4, July 1991, Pages 283–291.

Ecrivons mathématiquement ce que comptent les 4 coefficients de chaque matrice 2×2 :

$$M_n \begin{pmatrix} f_{aa}(n) & f_{ab}(n) \\ f_{ba}(n) & f_{bb}(n) \end{pmatrix}$$

avec :
- $f_{aa}(n) = \#\{(p+q = n) \wedge (p \; premier) \wedge (3 \leq p \leq n/2) \wedge (q \; premier) \wedge (((n+2)-p) \; premier)\}$;
- $f_{ab}(n) = \#\{(p+q = n) \wedge (p \; premier) \wedge (3 \leq p \leq n/2) \wedge (q \; premier) \wedge (((n+2)-p) \; composé)\}$;
- $f_{ba}(n) = \#\{(p+q = n) \wedge (p \; premier) \wedge (3 \leq p \leq n/2) \wedge (q \; composé) \wedge (((n+2)-p) \; premier)\}$;
- $f_{bb}(n) = \#\{(p+q = n) \wedge (p \; premier) \wedge (3 \leq p \leq n/2) \wedge (q \; composé) \wedge (((n+2)-p) \; composé)\}$.

On comprend aisément que la somme $f_{ba}(n) + f_{bb}(n)$ compte les couples $(x, x+2)$ tels que $x \geq n/2$ et $n - x$ est premier.

La somme des 4 éléments des matrices est égale à $\pi(n/2) - 1$ (avec $\pi(x)$ la notation habituelle pour le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x), puisqu'on ne s'intéresse qu'aux décompositions des nombres pairs "basées" sur un petit sommant qui est un nombre premier.

Cette somme augmente de 1 à chaque nombre pair double d'un nombre premier.

Sont fournies en annexe les matrices associées aux nombres pairs compris entre 10 et 100.

Le nombre de décompositions de Goldbach de n est égal à $f_{aa}(n) + f_{ab}(n)$. Démontrer la conjecture de Goldbach revient à démontrer qu'on a toujours $f_{aa}(n) + f_{ab}(n) > 0$.

Essayons maintenant de décomposer le processus à l'œuvre lors du passage d'un nombre pair n au nombre pair suivant $n+2$ en terme de transformation de chaque élément de la matrice pris séparément.

Reportons-nous aux matrices exemples M_{30} et M_{32} en observant la colonne des doublons de lettres à droite des décompositions.

Si un nombre n'avait pas de décomposition de Goldbach, on aurait $f_{aa}(n) = f_{ab}(n) = 0$. Seuls $f_{ba}(n)$ et $f_{bb}(n)$ seraient non nuls. Il y aurait alors, à droite de la matrice M_n, uniquement des doublons *ba* et des doublons *bb*. Mais on a vu qu'il y a identité entre les lettres gauches des doublons de $n+2$ et les lettres droites des doublons de n (puisque ces lettres codent les mêmes décompositions).

Précisons maintenant la circulation des jetons, en terme de chip-firing game, on a que (les ou sont inclusifs) :
- les *ba* se déversent dans les *aa* ou les *ab* ;
- les *bb* se déversent dans les *ba* ou les *bb* ;
- les *aa* se déversent dans les *aa* ou les *ab* ;
- les *ab* se déversent dans les *ba* ou les *bb*.

On peut représenter cette circulation par le schéma ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
aa \arrow[loop above] \arrow[r] & ab \arrow[d] \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
ba \arrow[u] & bb \arrow[l] \arrow[loop below]
\end{tikzcd}$$

En observant la manière dont les "chips circulent" dans le schéma, on comprend que le seul moyen d'aboutir à une matrice M_n telle que $f_{aa}(n)$ et $f_{ab}(n)$ sont nuls est de partir d'une matrice M_{n-2} telle que $f_{aa}(n-2)$ et $f_{ab}(n-2)$ sont nuls également.

La contradiction ‡ provient alors d'un mode de raisonnement appelé descente infinie de Fermat : on a vu que si la conjecture de Goldbach n'était pas vérifiée par un entier pair, elle ne le serait pas non plus par

‡. On aurait souhaité initialement établir la contradiction à partir du fait que puisque la somme totale des 4 éléments de chaque matrice est égale à $\pi(n/2) - 1$, et qu'on a vu que la somme $f_{ba}(n) + f_{bb}(n)$ compte les couples $(x, x+2)$ tels que

l'entier pair qui le précède. Or, il n'existe pas de suite infinie décroissante d'entiers positifs qui vérifient simultanément une même propriété (ici, le fait pour un nombre pair supérieur à 4 de se décomposer en une somme de 2 nombres premiers impairs, propriété dont on rappelle qu'elle est vraie pour tous les nombres pairs jusqu'à 100 par ailleurs). L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et toutes ses parties propres non vides possèdent une propriété remarquable : ils admettent un plus petit élément. On a raisonné par l'absurde : en supposant que la matrice associée à n est telle que $f_{aa}(n) = f_{ab}(n) = 0$, on a vu qu'il serait nécessaire que la matrice associée à $n-2$ soit elle aussi telle que $f_{aa}(n-2) = f_{ab}(n-2) = 0$. Or $n-2 < n$. On aboutit ainsi à une contradiction par descente infinie et un tel raisonnement devrait assurer que la conjecture de Goldbach est vraie.

Par le seul jeu des manipulations de lettres, on a effectivement la sensation de quelque-chose *qui tourne*, c'est-à-dire qui est comme *circulant dans le temps*.

Annexe 1 : matrices 2×2 *associées aux nombres pairs compris entre 10 et 100*

10 $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$	12 $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	14 $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	16 $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	18 $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$
20 $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	22 $\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	24 $\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}$	26 $\begin{pmatrix}0 & 3\\2 & 0\end{pmatrix}$	28 $\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}$
30 $\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$	32 $\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}$	34 $\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}$	36 $\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{pmatrix}$	38 $\begin{pmatrix}0 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}$
40 $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$	42 $\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}$	44 $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}$	46 $\begin{pmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$	48 $\begin{pmatrix}2 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}$
50 $\begin{pmatrix}0 & 4\\3 & 1\end{pmatrix}$	52 $\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}$	54 $\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 1\end{pmatrix}$	56 $\begin{pmatrix}0 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}$	58 $\begin{pmatrix}2 & 2\\4 & 1\end{pmatrix}$
60 $\begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 2\end{pmatrix}$	62 $\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}$	64 $\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 1\end{pmatrix}$	66 $\begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}$	68 $\begin{pmatrix}0 & 2\\5 & 3\end{pmatrix}$
70 $\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 1\end{pmatrix}$	72 $\begin{pmatrix}2 & 4\\2 & 2\end{pmatrix}$	74 $\begin{pmatrix}1 & 4\\4 & 2\end{pmatrix}$	76 $\begin{pmatrix}2 & 3\\5 & 1\end{pmatrix}$	78 $\begin{pmatrix}3 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}$
80 $\begin{pmatrix}0 & 4\\4 & 3\end{pmatrix}$	82 $\begin{pmatrix}3 & 2\\5 & 2\end{pmatrix}$	84 $\begin{pmatrix}1 & 7\\3 & 1\end{pmatrix}$	86 $\begin{pmatrix}0 & 5\\4 & 4\end{pmatrix}$	88 $\begin{pmatrix}2 & 2\\7 & 2\end{pmatrix}$
90 $\begin{pmatrix}2 & 7\\2 & 2\end{pmatrix}$	92 $\begin{pmatrix}0 & 4\\4 & 5\end{pmatrix}$	94 $\begin{pmatrix}1 & 4\\6 & 3\end{pmatrix}$	96 $\begin{pmatrix}1 & 6\\2 & 5\end{pmatrix}$	98 $\begin{pmatrix}0 & 3\\6 & 5\end{pmatrix}$
		100 $\begin{pmatrix}2 & 4\\6 & 2\end{pmatrix}$		

$n-x$ est premier, si seuls $f_{ba}(n)$ et $f_{bb}(n)$ étaient non nuls, cela signifierait qu'il y a autant de nombres premiers de 3 à $n/2$ que de $n/2$ à n, ce qui ne saurait être, le nombre de nombres premiers allant diminuant sur deux intervalles consécutifs de même longueur. Mais on ne trouve pas dans la littérature si $\pi(n) - \pi(n/2) < \pi(n/2)$ est un fait démontré.

Annexe 2 : Programme python de calcul des matrices

```
import math
from math import *

def prime(atester):
  pastrouve = True
  k = 2
  if (atester == 1): return False
  if (atester == 2): return True
  if (atester == 3): return True
  if (atester == 5): return True
  if (atester == 7): return True
  while (pastrouve):
    if ((k * k) > atester):
        return True
    else:
        if ((atester % k) == 0):
            return False
        else: k=k+1

for n in range(10,102,2):
  aa = 0 ; ab = 0 ; ba = 0 ; bb = 0 ;
  for x in range(3,n/2+1,2):
    if (prime(x)):
      if ((prime(n-x)) and (not(prime((n+2)-x)))):
        ab=ab+1
      elif ((prime(n-x)) and (prime((n+2)-x))):
        aa=aa+1
      elif ((not(prime(n-x))) and (prime((n+2)-x))):
        ba=ba+1
      elif ((not(prime(n-x))) and (not(prime((n+2)-x)))):
        bb=bb+1
  s=str(n)+'--->'
  print(s)
  s=str(aa)+' '+str(ab)
  print(s)
  s=str(ba)+' '+str(bb)
  print(s)
```

Bibliographie

[1] : A. Björner, L. Lovász, P. W. Shor : Chip-firing games on graphs. European Journal of Combinatorics archive, Volume 12 Issue 4, July 1991, Pages 283–291.

[2] : A. Connes, Noncommutative geometry year 2000, In : Alon N., Bourgain J., Connes A., Gromov M., Milman V. (eds) Visions in Mathematics. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Basel, 2000, p.481-559.