G comme Gödel (Denise Vella-Chemla, 14.5.2016)

On s'interroge sur la possibilité d'utiliser un codage similaire à celui de Gödel pour transposer un problème additif en problème multiplicatif : on propose d'associer bijectivement à chaque entier impair compris entre 1 et 209 de restes modulaires α_1 (modulo 3), α_2 (modulo 5) et α_3 (modulo 7) l'entier dont la factorisation est $3^{\alpha 1}5^{\alpha 2}7^{\alpha 3}$. Trouver que le complémentaire de 13 (de restes $(1,3,6)$) à 210 (de restes $(0,0,0)$) est 197 (de restes $(2,2,1)$) est analogue au fait de trouver que $44118375 \times 1575 = 69486440625 = 3^3.5^5.7^7$. Mais cette transposition ne semble pas présenter un intérêt. On fournit dans les quatrièmes colonnes du tableau ci-dessous les images des nombres par cette bijection.

Plutôt que de partir dans cette direction qu'on abandonne, il vaut mieux vraisemblablement représenter les nombres par des matrices contenant de multiples rotations (en fait en nombre infini mais on va se limiter ici aux rotations selon les 3 nombres premiers 3, 5 et 7, d'autant plus que les rotations deviennent de plus en plus infimes au fur et à mesure, les nombres premiers grandissant apparaissant au dénominateur des expressions dénotant des angles).

On associe à l'entier 1 la matrice :

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{5}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2i\pi}{7}} \end{pmatrix}$$

qu'on peut aussi écrire :

$$\begin{pmatrix} cos(\frac{2i\pi}{3}) & -sin(\frac{2i\pi}{3}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sin(\frac{2i\pi}{3}) & cos(\frac{2i\pi}{3}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\frac{2i\pi}{5}) & -sin(\frac{2i\pi}{5}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sin(\frac{2i\pi}{5}) & cos(\frac{2i\pi}{5}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & cos(\frac{2i\pi}{7}) & -sin(\frac{2i\pi}{7}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sin(\frac{2i\pi}{7}) & cos(\frac{2i\pi}{7}) \end{pmatrix}$$

On associe à 11 (de restes (2,1,4) modulo (3,5,7)) la matrice :

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{\mathbf{2}.2i\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\mathbf{1}.2i\pi}{5}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\mathbf{4}.2i\pi}{7}} \end{pmatrix}$$

On associe à chaque entier une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (idéalement, le nombre de nombres premiers étant infini, il faudrait considérer des matrices diagonales de $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{C})$) ; la multiplication est commutative sur cet ensemble.

Il est important de ne pas "mélanger" les restes modulaires obtenus dans les différents corps ((2 mod 3, 4 mod 5) est différent de (2 mod 5, 4 mod 3)) ; un tel "mélange" se serait produit si on avait "agrégé" les multiples rotations en une seule[1]. La représentation permet de ne pas mélanger les restes parce qu'elle s'appuie sur l'ordre strict existant entre les nombres premiers (sur la diagonale apparaît d'abord l'exponentielle correspondant à la classe du nombre représenté dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, puis celle associée à sa classe dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, puis celle associée à sa classe dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, etc.).

Cette obligation de séparer les différents restes est lourde ; Gödel, lui, a trouvé un codage subtil : en utilisant les codages des lettres d'une expression comme les puissances des nombres premiers de factorisations, il obtient non seulement un codage absolument non-ambigu mais également une représentation agrégée en un nombre unique pour chaque programme.

Les nombres premiers ont un seul 1 sur leur diagonale (correspondant au seul reste nul dans la représentation par les restes). On n'a pas avancé d'un pouce.

[1] L'ambiguité aurait pu découler de la commutativité de la somme si on avait choisi de multiplier des exponentielles, ou bien de la commutativité du produit si on avait choisi des élévations à la puissance.

n	3	5	7	$f(n)$	n	3	5	7	$f(n)$	n	3	5	7	$f(n)$
1	1	1	1	105	71	2	1	1	315	141	0	1	1	35
3	0	3	3	42875	73	1	3	3	128625	143	2	3	3	385875
5	2	0	5	151263	75	0	0	5	16807	145	1	0	5	50421
7	1	2	0	75	77	2	2	0	225	147	0	2	0	25
9	0	4	2	30625	79	1	4	2	91875	149	2	4	2	275625
11	2	1	4	108045	81	0	1	4	12005	151	1	1	4	36015
13	1	3	6	44118375	83	2	3	6	132355125	153	0	3	6	14706125
15	0	0	1	7	85	1	0	1	21	155	2	0	1	63
17	2	2	3	77175	87	0	2	3	8575	157	1	2	3	25725
19	1	4	5	31513125	89	2	4	5	94539375	159	0	4	5	10504375
21	0	1	0	5	91	1	1	0	15	161	2	1	0	45
23	2	3	2	55125	93	0	3	2	6125	163	1	3	2	18375
25	1	0	4	7203	95	2	0	4	21609	165	0	0	4	2401
27	0	2	6	2941225	97	1	2	6	8823675	167	2	2	6	26471025
29	2	4	1	39375	99	0	4	1	4375	169	1	4	1	13125
31	1	1	3	5145	101	2	1	3	15435	171	0	1	3	1715
33	0	3	5	2100875	103	1	3	5	6302625	173	2	3	5	18907875
35	2	0	0	9	105	0	0	0	1	175	1	0	0	3
37	1	2	2	3675	107	2	2	2	11025	177	0	2	2	1225
39	0	4	4	1500625	109	1	4	4	4501875	179	2	4	4	13505625
41	2	1	6	5294205	111	0	1	6	588245	181	1	1	6	1764735
43	1	3	1	2625	113	2	3	1	7875	183	0	3	1	875
45	0	0	3	343	115	1	0	3	1029	185	2	0	3	3087
47	2	2	5	3781575	117	0	2	5	420175	187	1	2	5	1260525
49	1	4	0	1875	119	2	4	0	5625	189	0	4	0	625
51	0	1	2	245	121	1	1	2	735	191	2	1	2	2205
53	2	3	4	2701125	123	0	3	4	300125	193	1	3	4	900375
55	1	0	6	352947	125	2	0	6	1058841	195	0	0	6	117649
57	0	2	1	175	127	1	2	1	525	197	2	2	1	1575
59	2	4	3	1929375	129	0	4	3	214375	199	1	4	3	643125
61	1	1	5	252105	131	2	1	5	756315	201	0	1	5	84035
63	0	3	0	125	133	1	3	0	375	203	2	3	0	1125
65	2	0	2	441	135	0	0	2	49	205	1	0	2	147
67	1	2	4	180075	137	2	2	4	540225	207	0	2	4	60025
69	0	4	6	73530625	139	1	4	6	220591875	209	2	4	6	661775625