Conjecture de Goldbach (1742)

- On cherche les DG (décomposants de Goldbach) de $n = 98$.
- Un DG de n est forcément premier à n, puisqu'il est premier et qu'il ne peut diviser n (s'il divise n, son complémentaire à n est composé). Il vérifie donc la congruence $p^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ en vertu du théorème d'Euler.
- Or, $\left\{ \begin{array}{ll} 98 & \equiv 0\ (2) \\ & \equiv 2\ (3) \\ & \equiv 3\ (5) \\ & \equiv 0\ (7) \end{array} \right.$
- Donc p, un DG de n, est également solution du système de congruences $\left\{ \begin{array}{ll} p & \equiv 1\ (2) \\ & \equiv 1\ (3) \\ & \equiv 1, 2, 4\ (5) \\ & \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 6\ (7) \end{array} \right.$

Solutions potentielles

- Par le théorème des restes chinois, chaque sous-système de congruences du système disjonctif ci-dessus est équivalent à une seule congruence du premier degré dans $\mathbb{Z}/(\prod_{p_i\ premier \leq \sqrt{n}} p_i)\mathbb{Z}$.
- On dispose donc de :

$$\prod_{p \nmid n}(p-2)\prod_{p \mid n}(p-1)$$

équations du premier degré de la forme

$$x \equiv a\ (mod\ \prod_{p_i\ premier \leq \sqrt{n}} p_i)$$

à résoudre, chacune d'entre elles fournissant un nombre $< \prod_{p_i\ premier \leq \sqrt{n}} p_i$ dont on sait qu'il est premier et jamais congru à n.

Solutions effectives

- Pourquoi l'un de ces nombres est-il forcé d'appartenir au groupe des unités ?
- Le fait que $\frac{\prod_{p_i \text{ premier} \leq \sqrt{n}} p_i}{\varphi(n)} \geqslant 1$ le garantirait-il ?