Armand Borel : Calcul des probabilités appliqué au problème de Goldbach.

Esquisse historique sur la fonction Gamma de Philip Davis.

André Weil : Préhistoire de la fonction zeta.

Où Gödel parle de la conjecture de Goldbach.

Interview de Lawvere au sujet des catégories.

Article de Lawvere : Grothendieck et le concept d'espace.

Lawvere : Commentaires sur le développement de la théorie des topos.

Extrait de Intelligence artificielle et informatique théorique de J.-M. Alliot, T. Schiex, P. Brisset, F. Garcia.

Georg Cantor : Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimensions.

George Boole : Le calcul de la logique.

Lawvere et Shanuel : Extraits de Mathématiques conceptuelles.

Pierre Cartier : Logique, catégories et faisceaux.

Bourbaki : spectres d'anneaux.

70 théorèmes de Stone : théorie des représentations pour les algèbres booléennes.

M. H. Stone : une théorie générale des spectres.

Jean Drabbe : présentation topologique du calcul propositionnel intuitionniste.

Extraits de Emil Post : une théorie générale des propositions élémentaires.

Paul Halmos : les frissons de l'abstraction.

Extraits du Que sais-je ? sur la Logique de Jean Largeault.

John von Neumann : le mathématicien.

John von Neumann : le rôle des mathématiques.

Une lettre de Gödel à von Neumann.

Extrait de logique modale de Thierry Lucas.

Poèmes de Richard Friedberg.

Messiaen : Conférence de Kyoto.

Pierre Boulez par Jérôme Bloch.

Une interview de Jean-Pierre Serre.

Jean-Pierre Serre : La vie et l'œuvre d'André Weil.

Identité de Bézout dans Histoires d'algorithmes.

Surface de Tannery.

Interview de Jean-Pierre Serre à Singapour.

Interview de Jean-Pierre Serre en Norvège.

Interview de Jean-Pierre Serre au Cirm.

Jean-Pierre Serre vu par Michel Broué.

Les mathématiques en commun.

Article Concentration spatio-spectrale sur une sphère par ondes sphéroïdales prolates de Simons, Dahlen, Wieczorek.

Académie des sciences.

Séance du lundi 3 mars 1941.

Présidence de M. Hyacinthe Vincent.

Mémoires et communications

des membres et des correspondants de l'Académie.

Théorie des nombres. - *Applications du calcul des probabilités aux problèmes concernant les nombres premiers. Théorème de Goldbach.*
Note de M. **Émile Borel**.

J'ai entrepris, il y a quelques années, des recherches statistiques variées sur les nombres premiers[1] et j'ai eu l'occasion d'exposer certains de leurs résultats dans mes cours. Je voudrais résumer brièvement aujourd'hui les conclusions essentielles auxquelles j'ai été conduit et les appliquer au théorème de Goldbach et à ses généralisations.

La conclusion générale à laquelle j'ai été conduit est la suivante : soit E un ensemble fini de nombres entiers ; soit N leur nombre, A et B leurs limites inférieure et supérieure ; on supposera $B < A + \sqrt{A}$; soit f la fréquence moyenne des nombres premiers dans l'intervalle $B - A$; le nombre probable des nombres premiers de l'ensemble E est Nf. *Si la définition de l'ensemble E, jointe aux propriétés arithmétiques les plus élémentaires, n'entraîne pas la conséquence que le nombre réel n des nombres premiers de E doive être inférieur ou supérieur à $Nf = \nu$, on a le droit d'appliquer le théorème de Poisson et d'affirmer que la probabilité pour que ce nombre (des nombres premiers de E) soit égal à n est*

$$p_n = \frac{\nu_n}{n!} e^{-\nu}.$$

Par suite les valeurs de n pour lesquelles p_n serait extrêmement petit, inférieur par exemple à 10^{-50}, pourront être exclues et l'on pourra donc affirmer que n est compris entre certaines limites n' et n''.

Ceci s'étend aisément au cas où, au lieu d'un ensemble E, on en considère un nombre fini $E_1, E_2, \ldots, E_k$.

Passons au cas où l'on considère une infinité d'ensembles E ; désignons par p_k la probabilité calculée, comme il vient d'être dit, pour que le nombre n_k des nombres premiers de l'ensemble E_k ne soit pas compris entre n'_k et n''_k. Si la série $\sum p_k$ est convergente et a une somme inférieure à 10^{-50}, on pourra affirmer, avec une absolue certitude pratique que l'on a, pour toutes les valeurs de k,

$$n'_k < n_k < n''_k.$$

Appliquons ce qui précède au théorème de Goldbach, suivant lequel tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers : $2a = p + p'$.

Nous préciserons ce théorème en ajoutant que l'un des nombres premiers est inférieur à une fonction donnée $\varphi(a)$:

$$p' < \varphi(a) < \sqrt{a}.$$

La note originale peut être consultée ici :
http://denisevellachemla.eu/CRAS-Borel-1941-proba-Goldbach.pdf.

[1] Je dois remercier M. Z. Sougarev, dont l'aide m'a été précieuse pour les computations exigeant l'emploi des tables de nombres premiers.

C. R. 1941, 1er *Semestre* (T. 212, N° 9.)

Soit A le nombre des nombres premiers inférieurs à $\varphi(a)$; considérons l'ensemble E_a des nombres $2a - p'$; cet ensemble est composé de A nombres ; si f est la fréquence des nombres premiers dans l'intervalle $2a, 2a - \sqrt{a}$, le nombre moyen des nombres premiers de E_a serait $\nu_a = Af$; la probabilité pour que le nombre réel des nombres premiers de E_a soit nul, c'est-à-dire pour que notre théorème soit faux est $e^{-\nu_a}$. Si donc la fonction $\varphi(a)$ est choisie de telle manière que la série

$$(S) \qquad \sum_{a=\alpha}^{\infty} e^{-\nu_a}$$

soit convergente et inférieure à 10^{-50}, notre théorème sera pratiquement certain. Le nombre α sera pris assez grand et tel cependant que le théorème puisse être vérifié empiriquement pour les valeurs de a inférieures à α.

En fait, le raisonnement précédent doit être complété, car nous sommes ici dans le cas où les propriétés arithmétiques élémentaires modifient la fréquence f. Lorsqu'un nombre est choisi au hasard, la probabilité pour qu'il soit divisible par 3 est $1/3$. Si p' est un nombre premier et si $2a$ est divisible par 3, la probabilité pour que $2a - p'$ soit divisible par 3 est nulle ; si $2a$ n'est pas divisible par 3, la probabilité pour que $2a - p'$ soit divisible par 3 est $1/2$. Par suite, la fréquence f devra être diminuée si $2a$ n'est divisible par aucun des petits nombres premiers impairs (de 3 à 97 par exemple) et notablement augmentée si $2a$ admet les diviseurs 3, 5, 7.

Les calculs suivants ont été faits pour $1\ 000\ 000 < 2a < 1\ 000\ 200$. On a supposé $p' < 10\ 000$ et on a dénombré les nombres premiers p égaux à $2a - p'$. Voici les résultats de ce dénombrement classés d'après les petits diviseurs premiers impairs de a.

Tous les diviseurs impairs de a sont >13 : 110, 106, 104, 115, 131, 132, 133, 121, 118, 119, 118, 112, 127, 110, 128, 108, 123, 119, 115, 124, 117, 123, 112, 113, 126, 130, 115, 116, 123, 120, 115, 115, 126, 118, 131, 131, 124, 111, 123.

a est divisible par	13	: 137, 123, 126.
	11	: 132, 137, 137.
	7	: 145, 138, 143, 158, 144, 149, 144.
	5	: 166, 148, 176, 160, 172, 157, 178, 160, 149, 162, 168.
	5 et par 7	: 191, 211.
	3	: 246, 257, 234, 238, 256, 243, 237, 231, 232, 226, 226, 230, 273. 248, 254, 219, 233, 238, 231, 262, 233, 238, 267.
	3 et par 7	: 280, 282, 270, 278.
	3 et par 5	: 310, 299, 345, 329, 312, 311.
	3, par 5 et par 7	: 370.

Ces résultats sont, on s'en assure aisément, tout à fait semblables à ceux que donnerait le hasard, en ce qui concerne notamment les écarts par rapport aux valeurs moyennes[2].

Pour tous ceux qui ont l'habitude des suites statistiques de nombres entiers, le caractère fortuit de ces séries de nombres, en particulier de la première (les diviseurs impairs de a sont supérieurs à 13) s'impose avec évidence[3].

On constate que, si l'on prend

$$\varphi(a) = 50(\log a)^3,$$

[2] Des résultats absolument analogues ont été obtenus pour les nombres $2a$ compris entre 2 000 000 et 2 000 200.

[3] Nous avons tenu à donner les nombres bruts constatés ; on pourrait faciliter l'étude des séries de ces nombres en modifiant les nombres obtenus daus les cas où a est divisible par des petits nombres premiers de manière à les ramener à ce qu'ils seraient si cette circonstance ne se produisait pas ; par exemple les nombres obtenus pour a divisible par 3 devraient être divisés par 3 etc. On aurait ainsi 100 nombres dont la répartition serait celle qui résulte du théorème de Poisson, c'est-à-dire une répartition gaussienne.

en désignant par log les logarithmes vulgaires (à base 10), la condition relative à la série (S) est satisfaite. On peut donc énoncer ce résultat : *tout nombre pair 2a est la somme de deux nombres premiers dont l'un est inférieur à* $50(\log a)^3$. *La probabilité pour que cet énoncé soit faux est inférieure à* 10^{-50}.

Bien entendu, ces démonstrations basées sur les probabilités ne peuvent être comparées aux démonstrations rigouseuses de la théorie des nombres. Les recherches tendant à obtenir de telles démonstrations rigoureuses continueront à être poursuivies car, même si elles n'aboutissent pas, elles contribuent à enrichir la science de méthodes nouvelles et de résultats souvent intéressants.

Il serait cependant injuste de considérer comme négligeables les résultats que l'on peut déduire du calcul des probabilités. Ils entraîneront la conviction de tous ceux qui ont réfléchi quelque peu sur la signification d'une probabilité inférieure à 10^{-50} ou 10^{-100} et ont compris qu'une telle probabilité doit être pratiquement traitée comme égale à zéro (lorsqu'il s'agit soit d'une épreuve unique, soit d'un ensemble fini ou infini d'épreuves, considéré comme une épreuve unique dont on a calculé la probabilité globale).

Il est à peine besoin d'ajouter que le calcul des probabilités peut être utilisé non seulement comme une méthode de démonstration, mais aussi et surtout comme un instrument de recherche.

L'intégrale de Leonhard Euler : esquisse historique sur la fonction Gamma

Philip J. Davis

À la mémoire de Milton Abramowitz

Beaucoup de personnes pensent que les idées mathématiques sont statiques. Elles pensent que ces idées ont trouvé leur origine à un moment donné de l'histoire passée et qu'elles resteront inchangées pour tous les temps futurs. Il y a de bonnes raisons à de telles croyances. Après tout, la formule pour l'aire du disque était πr^2 du temps d'Euclide et continue d'être πr^2 au jour d'aujourd'hui. Mais pour quelqu'un qui connaît les mathématiques de l'intérieur, le sujet ressemble plutôt à un être vivant. Il grandit chaque jour par accrétion de nouvelles informations, il évolue chaque jour en s'observant lui-même et en observant le monde selon de nouveaux points de vue intéressants, il maintient un équilibre régulier en oubliant ce qui n'est plus pertinent parmi ses accomplissements passés.

Le but du présent essai est d'illustrer ce processus de croissance. Nous avons choisi un objet mathématique, la fonction gamma, et montrons comment elle a évolué conceptuellement et du point de vue de son contenu depuis l'époque d'Euler jusqu'au traité mathématique de Bourbaki, et comment, dans sa croissance, cette fonction a participé au développement général des mathématiques lors des deux et un quart derniers siècles. Des fonctions appelées "fonctions mathématiques élevées", la fonction gamma est indéniablement la plus fondamentale. Elle est assez simple pour être présentée à de jeunes gens en université mais suffisamment profonde pour avoir amené des contributions avancées par les meilleurs mathématiciens. Et elle est suffisamment compacte pour pouvoir être présentée dans un bref article.

La fonction gamma est née en 1729 dans une lettre entre un mathématicien suisse qui était à St. Petersbourg et un mathématicien allemand alors à Moscou. Le premier : Leonhard Euler (1707-1783), alors âgé de 22 ans, mais destiné à devenir un mathématicien prestigieux, le plus grand mathématicien du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Le second : Christian Goldbach (1690-1764), un savant, un homme possédant de multiples talents et qui correspondit avec les plus grands penseurs de son époque. Il était une sorte de mathématicien dilettante, même s'il fut également l'homme qui léguerait à l'avenir un problème de théorie des nombres si facile à stipuler et si difficile à prouver que même aujourd'hui, ce problème reste comme un défi sur l'horizon mathématique.

La naissance de la fonction gamma est due au mélange de plusieurs courants mathématiques. Le premier de ces courants est celui de la théorie de l'interpolation, un sujet très pratique produit essentiellement par les mathématiciens anglais du XVII$^{\text{ème}}$ siècle mais dans lequel tous les mathématiciens aimaient plonger de temps en temps. Le second courant était celui du calcul intégral et de la construction systématique des formules de l'intégration indéfinie, un processus qui s'était régulièrement développé pendant de nombreuses années. Un certain problème ostensiblement simple d'interpolation avait émergé et avait été étudié sans succès par Goldbach et par Daniel Bernoulli (1700-1784) et même plus tôt encore par James Stirling (1692-1770). Le problème fut posé à Euler. Euler annonça sa solution à Goldbach dans deux lettres qui seraient le début d'une intense correspondance qui continuerait durant toute la vie de Goldbach. La première lettre, datée du 13 octobre 1729 traite du problème de l'interpolation, tandis que la seconde datée du 8 janvier 1730 traite d'intégration et lie les deux ensemble. Euler envoya à Goldbach une esquisse générale, mais en une année, il publia tous les détails dans un article *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini gen-*

Bureau national des unités, Washington, D. C.

erales algebraice dari nequeunt. Cet article peut maintenant être trouvé dans le volume I de la réimpression des *Opera Omnia* d'Euler.

Puisque le problème de l'interpolation est le plus facile, commençons par celui-là. L'une des séquences d'entiers les plus simples qui amène une théorie intéressante est $1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \ldots$ Ce sont les nombres triangulaires, ainsi appelés parce qu'ils représentent le nombre d'objets qui peuvent être placés dans des tableaux triangulaires de différentes tailles. Appelons le n-ième nombre triangulaire T_n. Il y a une formule pour T_n que l'on apprend en cours d'algèbre : $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Que fait précisément cette formule ? En premier lieu, elle simplifie le calcul en réduisant un grand nombre d'additions à trois opérations fixes : une addition, une multiplication et une division. Ainsi, plutôt que d'ajouter les cent premiers nombres pour obtenir T_{100}, nous pouvons calculer $T_{100} = \frac{1}{2}(100)(100+1) = 5050$. Deuxièmement, même si cela ne fait pas vraiment sens de demander, disons, la somme des $5\frac{1}{2}$ premiers nombres, la formule pour $T_{5\frac{1}{2}}$ fournit une valeur pour cette somme. Dans ce cas, la formule donne $T_{5\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(5\frac{1}{2})(5\frac{1}{2}+1) = 17\frac{7}{8}$. De cette façon, la formule augmente l'étendue du problème original à des valeurs de la variable autres que celles pour lesquelles le problème avait été défini au départ et résout le problème de l'interpolation entre des valeurs élémentaires connues.

Ce type de questions, selon lesquelles on s'interroge au sujet d'une extension du sens, ont souvent été étudiées au XVII$^{\text{ème}}$ et XVIII$^{\text{ème}}$ siècles. Considérons par exemple les algèbres d'exposants. La quantité a^m est définie initialement comme le produit de m nombres a. Cette définition a un sens quand m est un entier positif, mais que peut valoir $a^{5\frac{1}{2}}$? Le produit de $5\frac{1}{2}$ nombres a ? Les définitions mystérieuses $a^0 = 1, a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, a^{-m} = 1/a^m$ qui résolvent cette énigme et qui sont utilisées si fertilement en algèbre ont été écrites explicitement pour la première fois par Newton en 1676. Elles sont justifiées par une utilité qui découle du fait que la définition amène à des fonctions exponentielles continues et parce que la loi des exposants $a^m.a^n = a^{m+n}$ a un sens pour tous les exposants qu'ils soient des entiers positifs ou pas.

D'autres problèmes de ce type se sont avérés bien plus difficiles. Ainsi, Leibniz introduisit la notation d^n pour la n-ième itérée de l'opération de différentiation. De plus, il identifia d^{-1} avec $\int$ et d^{-n} avec l'intégrale itérée. Il essaya alors d'amener un certain sens au symbole d^n quand n est n'importe quelle valeur réelle. Qu'est-ce alors que la $5\frac{1}{2}$-ième dérivée d'une fonction ? Cette question a dû attendre presque deux siècles pour obtenir une réponse satisfaisante.

Les factorielles									
n :	1	2	3	4	5	6	7	8	...
n! :	1	2	6	24	120	720	5040	40320	...

Test d'intelligence
Question : Quel nombre devrait être inséré dans la ligne du dessous à mi-chemin entre les nombres 5 et 6 de la ligne du dessus ?

Réponse d'Euler : 287.8852..., Réponse d'Hadamard : 280.3002

Mais retournons à notre séquence de nombres triangulaires. Si nous changeons les signes d'additions en signes de multiplications, nous obtenons une nouvelle séquence: $1, 1.2, 1.2.3, \ldots$. C'est la séquence des factorielles. Les factorielles sont habituellement abrégées en $1!, 2!, 3!, \ldots$ et les cinq premières factorielles sont 1, 2, 6, 24, 120. Elles augmentent très vite en taille. Le nombre 100! si on souhaite écrire tous ses chiffres a 158 chiffres. Contrairement à $T_{100} = 5050$ qui a seulement quatre chiffres. Les factorielles sont omniprésentes en mathématiques ; on peut difficilement ouvrir un livre d'analyse mathématique sans en trouver parsemées un peu partout. Ceci étant dit, est-il possible d'obtenir une formule simple pour calculer les factorielles ? Et est-il possible d'interpoler entre deux factorielles ? Que devrait valoir $5\frac{1}{2}!$? (voir

Fig. 1). C'est ce problème d'interpolation qui a amené à la fonction gamma, le problème de l'interpolation de Stirling, de Bernoulli, et de Goldbach. Comme nous le savons, ces deux problèmes sont liés, car lorsqu'on a une formule, il y a une possibilité d'intercaler des valeurs intermédiaires parmi celles déjà trouvées. Et c'est là qu'une chose surprenante a lieu. Il n'y a pas, en fait il ne peut y avoir, de formule pour les factorielles qui soit du type simple qui a été trouvé pour T_n. Cela est implicite dans le titre qu'Euler a choisi pour son article. Traduisons le latin et nous obtenons *Sur les progressions transcendantes, c'est-à-dire celles dont le terme général ne peut être exprimé algébriquement*. La solution à l'interpolation factorielle est à trouver dans des processus plus profonds que la "simple algèbre". On avait besoin de processus infinis.

Pour apprécier un peu mieux le problème auquel Euler était confronté, il est utile d'avancer un peu dans le temps et de formuler ce problème selon les normes rédactionnelles d'aujourd'hui : trouver une fonction raisonnablement simple qui prend pour valeurs celles des factorielles $1, 2, 6, \ldots$ sur les nombres entiers $1, 2, 3, \ldots$. Aujourd'hui, une fonction est une relation entre deux ensembles de nombres qui assigne à un nombre du premier ensemble un nombre du second ensemble. Ce qui est souligné, c'est la relation, et non la nature des règles qui servent à déterminer la relation. Pour aider les étudiants à visualiser le concept de fonction dans sa pleine généralité, les professeurs de mathématiques sont habitués à dessiner une courbe pleine de torsions et discontinuités. Plus la courbe en montre, plus elle est supposée être générale. Etant donnés, alors, les points $(1, 1), (2, 2), (3, 6), (4, 24), \ldots$ et si l'on adopte le point de vue qui vient juste d'être proposé, le problème de l'interpolation consiste à trouver une courbe qui passe par les points en question. Une telle courbe est ridiculement aisée à trouver. On peut même trouver un nombre illimité de telles courbes différentes. Prenez simplement un stylo et dessinez une courbe - n'importe laquelle - qui passe par les points. Une telle courbe définit automatiquement une fonction qui répond au problème de l'interpolation. De cette façon, avoir libéré la définition du concept de fonction résout trivialement le problème, et enrichit les mathématiques, mais vraiment très peu. La tâche d'Euler était différente. Au début du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, une fonction était plus ou moins synonyme d'une formule, et par formule, on souhaitait trouver une expression qui pourrait être calculée par des manipulations élémentaires faisant intervenir des additions, soustractions, multiplications, divisions, élévations à des puissances, calculs de racines, d'exponentielles, de logarithmes, différentiations, intégrations, séries infinies, i.e. provenant des processus ordinaires de l'analyse mathématique. Une telle formule était appelée une *expressio analytica*, une expression analytique. La tâche d'Euler était de trouver, si possible, une expression analytique engendrée naturellement à partir du corpus des mathématiques qui calculerait la factorielle d'un nombre positif fourni, mais qui continuerait d'avoir du sens pour d'autres valeurs de la variable.

Il est difficile de rendre compte précisément du cours exact de la découverte scientifique. Ceci est particulièrement vrai en mathématique lorsqu'on omet dans les livres et articles de rendre compte des faux départs, des années initiales de bafouillements, et où l'on peut développer un sujet en avant ou en arrière ou sur le côté pour augmenter l'effet dramatique. Comme l'a dit un mathématicien renommé, un résultat mathématique doit apparaître tout droit sorti des cieux comme un *deus ex machina* pour que les étudiants le vérifient et l'acceptent mais ne le comprennent pas. Apparemment, Euler, faisant des expériences sur des produits infinis de nombres, eut la chance de noter que si n est un entier positif,

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right]\ldots = n!. \tag{1}$$

En laissant de côté toutes les questions délicates telles que la convergence du produit infini, le lecteur peut vérifier cette équation en éliminant tous les facteurs communs qui apparaissent au numérateur et au dénominateur de l'expression du côté gauche de l'équation. De plus, le côté gauche est défini (au moins formellement) pour tout n entier non négatif. Euler nota aussi que lorsque la valeur $n = \frac{1}{2}$[1] est choisie, le côté gauche fournit (après quelques manipulations) le célèbre produit infini du chercheur britannique John Wallis (1616-1703):

$$\left(\frac{2.2}{1.3}\right)\left(\frac{4.4}{3.5}\right)\left(\frac{6.6}{5.7}\right)\left(\frac{8.8}{7.9}\right)\ldots = \pi/2. \tag{2}$$

Avec cette découverte, Euler aurait pu s'arrêter. Son problème était résolu. En effet, la théorie complète de la fonction gamma peut être basée sur le produit infini (1) qui s'écrit de façon plus conventionnelle aujourd'hui comme

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m!(m+1)^n}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}. \tag{3}$$

Pourtant, il continua. Il observa que son produit présentait le curieux phénomène suivant : pour quelques valeurs de m, notamment les entiers, la formule donnait des entiers, alors que pour d'autres valeurs, par exemple $n = \frac{1}{2}$, la formule prenait une valeur faisant intervenir π. Maintenant, π signifiait des cercles et leur carré, et les carrés signifiaient des intégrales, et Euler était familier des intégrales qui présentaient le même phénomène. Il chercha alors une transformation qui l'autoriserait à exprimer son produit comme une intégrale.

Il prit l'intégrale $\int_0^1 x^e(1-x)^n dx$. Des cas particuliers de cette intégrale avaient été discutés par Wallis, par Newton, et par Stirling. C'était une intégrale problématique à gérer, car l'intégrale indéfinie n'est pas toujours une fonction élémentaire de x. En supposant que n est un entier, mais que e et une valeur arbitraire, Euler développa $(1-x)^n$ par le théorème binomial, et sans difficulté trouva que

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx = \frac{1.2\ldots n}{(e+1)(e+2)\ldots(e+n+1)}. \tag{4}$$

L'idée d'Euler fut alors d'isoler $1.2\ldots n$ du dénominateur de façon à obtenir une expression de $n!$ comme une intégrale. Il fit de la sorte. (Ici, nous suivons la propre formulation d'Euler et ses notations, en marquant d'une * les formules qu'on trouve dans l'article original. Euler notait par le signe $\int$ l'intégrale $\int_0^1$). Il substitua f/g pour e et trouva

$$\int_0^1 x^{f/g}(1-x)^n dx = \frac{g^{n+1}}{f+(n+1)g}.\frac{1.2\ldots n}{(f+g)(f+2.g)\ldots(f+n.g)} \tag{5}$$

Et ainsi,

$$\frac{1.2\ldots n}{(f+g)(f+2.g)\ldots(f+n.g)} = \frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{f/g}dx(1-x)^n. \tag{6*}$$

Il observa qu'il pouvait isoler le $1.2\ldots n$ s'il supposait $f = 1$ et $g = 0$ dans le membre gauche, mais que s'il faisait ainsi, il obtiendrait du côté droit une forme indéterminée qu'il écrivit étrangement comme

$$\int \frac{x^{1/0}dx(1-x)^n}{0^{n+1}}. \tag{7*}$$

[1]Ici, il y a une petite erreur : dans la première page de l'article d'Euler derrière ce lien http://denisevellachemla.eu/De_progressionibus_transcendentibus_seu_quarum_termini_generales.pdf, Euler indique que c'est pour la valeur 2 que le côté gauche vaut le produit infini de Wallis ; pour $n = \frac{1}{2}$, Euler aboutit de plusieurs manières à la valeur $\frac{\pi}{4}$, l'aire d'un disque dont le diamètre vaudrait 1.

Il procéda alors ainsi pour trouver la valeur de l'expression (7)*. D'abord, il remplaça x par $x^{g/(f+g)}$. Cela lui donna

$$\frac{g}{f+g}x^{-f/(g+f)}dx \tag{8*}$$

à la place de dx et ainsi, le membre droit de (6) devient

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int \frac{g}{f+g}dx(1-x^{g/(f+g)})^n. \tag{9*}$$

Une fois de plus, Euler fit un essai d'affectation $f=1, g=0$ en ayant, on le suppose, d'abord réduit l'intégrale à

$$\frac{f+(n+1)g}{(f+g)^{n+1}}\int_0^1 \left(\frac{1-x^{g/(f+g)}}{g/(f+g)}\right)^n dx, \tag{10*}$$

et cela l'amena à l'indéterminée

$$\int dx \frac{(1-x^0)^n}{0^n}. \tag{11*}$$

Il considéra alors l'expression liée $(1-x^z)/z$ lorsque z s'annule. Il différencia le numérateur et le dénominateur, comme il dit, par la règle (de l'Hospital) connue et obtint

$$\frac{-x^z dzlx}{dz} \qquad (lx = \log x), \tag{12*}$$

qui pour $z=0$ produit $-lx$. Ainsi,

$$(1-x^0)/0 = -lx \tag{13*}$$

et

$$(1-x^0)^n/0^n = (-lx)^n. \tag{14*}$$

Il conclut alors que

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n dx. \tag{15}$$

Cela lui donna ce qu'il voulait, une expression pour $n!$ comme une intégrale dans laquelle des valeurs autres que des entiers positifs peuvent être utilisées. Le lecteur est encouragé à formuler ses propres critiques de la dérivation d'Euler.

Les étudiants en calcul avancé rencontrent en général l'intégrale d'Euler pour la première fois sous la forme

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad e = 2.71828\ldots. \tag{16}$$

Cette modification de l'intégrale (15) ainsi que la lettre grecque Γ sont dues à Adrien Marie Legendre (1752-1833). Legendre appelle l'intégrale (4) avec laquelle Euler a commencé sa dérivation la première intégrale Eulérienne et (15) la seconde intégrale Eulérienne. La première intégrale Eulérienne est actuellement connue sous le nom de fonction Beta et elle s'écrit maintenant conventionnellement ainsi

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx. \tag{17}$$

Avec les outils disponibles de calcul avancé, il est facile d'établir (comme les grandes avancées passées nous semblent compréhensibles et dupliquables !) que l'intégrale a un sens quand $x > 0$ et qu'elle permet la définition d'une certaine fonction $\Gamma(x)$ pour ces valeurs. De plus,

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{18}$$

dès que n est un entier positif[2]. On établit donc de là pour tout $x > 0$

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1). \tag{19}$$

C'est à cause de cette équation qu'on appelle cette relation la relation de récurrence de la fonction gamma et dans les années qui ont suivi Euler, elle a joué, comme nous allons le voir, un rôle de plus en plus important dans sa théorie. Ces faits, ainsi que les relations entre les deux types d'intégrales d'Euler

$$B(m,n) = \Gamma(m)\Gamma(n)/\Gamma(m+n) \tag{20}$$

et les formules très importantes de Stirling.

$$\Gamma(x) \sim e^{-x}x^{x-1/2}\sqrt{(2\pi)}, \tag{21}$$

qui nous donnent une expression approchée relativement simple pour $\Gamma(x)$ où x est grand, sont à peu près tout ce que les étudiants en calcul avancé apprennent de la fonction gamma. Chronologiquement parlant, cela les place à peu près en l'an 1750. Le jeu vient tout juste de commencer.

De la même façon que le simple désir d'étendre le calcul de la factorielle à des valeurs entre les entiers ont amené la découverte de la fonction gamma, le désir de l'étendre à des valeurs négatives et complexes a amené son développement ultérieur et son interprétation plus profonde. Un questionnement naïf, un jeu sans inhibition avec les symboles peut avoir été à sa toute première origine. Quelle est la valeur de $(-5\frac{1}{2})!$? Quelle est la valeur de $\sqrt{-1}$!? Dans les premières années du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, l'action s'est élargie et déplacée dans le domaine complexe (l'ensemble de tous les nombres de la forme $x + iy$, où $i = \sqrt{-1}$, et c'est alors la théorie des fonctions d'une variable complexe qui allait devenir un des chapitres majeurs des mathématiques. Le déplacement vers le plan complexe a été initié par Karl Friedrich Gauss

[2]La notation de Legendre déplace l'argument. Gauss a introduit une notation $\pi(x)$ dégagée de ce défaut, la notation de Legendre a gagné, mais elle continue de tourmenter de nombreuses personnes. On peut rencontrer toutes les notations Γ, π, et ! de nos jours.

(1777-1855), qui commença avec le produit d'Euler comme point de départ. Des noms très illustres sont maintenant impliqués et non pas une seule étape d'actions mais de nombreuses étapes. Il serait trop long de citer et décrire chacune des étapes qui furent parcourues. Nous nous contenterons d'une large esquisse.

Trois éléments importants sont maintenant connus : l'intégrale d'Euler, le produit d'Euler, et la relation fonctionnelle ou de récurrence $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1),\ x > 0$. Cette dernière est la généralisation du fait arithmétique élémentaire que pour les entiers positifs, $(n+1)n! = (n+1)!$. C'est une relation particulièrement utile d'autant plus qu'elle nous permet de l'appliquer autant de fois que nécessaire pour réduire le problème de l'évaluation d'une factorielle d'un nombre quelconque compris entre 0 et 1. Ainsi, si nous écrivons $n = 4\frac{1}{2}$ dans la formule ci-dessus, nous obtenons $(4\frac{1}{2}+1)! = 5\frac{1}{2}(4\frac{1}{2})!$. Si nous pouvions seulement trouver ce que vaut $(4\frac{1}{2})!$, alors nous saurions ce que vaut $(5\frac{1}{2})!$. Ce procédé de réduction à des nombres plus petits peut toujours être appliqué et amène à

$$(5\tfrac{1}{2})! = (3/2)(5/2)(7/2)(9/2)(11/2)(1/2)! \tag{22}$$

et puisque nous avons $(\frac{1}{2})! = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ de (1) et (2), nous pouvons calculer notre réponse. Un tel dispositif est évidemment très important pour qui doit effectuer des calculs avec la fonction gamma. D'autres informations peuvent être obtenues de la relation de récurrence. Bien que la formule $(n+1)n! = (n+1)!$ comme condensé de l'identité arithmétique $(n+1).1.2\ldots n = 1.2\ldots n.(n+1)$ n'ait du sens que pour $n = 1, 2$, etc., des insertions à l'aveugle d'autres valeurs produisent des résultats intéressants. Ainsi, en insérant $n = 0$, on obtient $0! = 1$. Avec successivement $n = -5\frac{1}{2}$, $n = -4\frac{1}{2}, \ldots$ et en réduisant vers le haut, on découvre

$$(-5\tfrac{1}{2})! = (2/1)(-2/1)(-2/3)(-2/5)(-2/7)(-2/9)(1/2)! \tag{23}$$

Puisque nous connaissons déjà la valeur de $(\frac{1}{2})!$, nous pouvons calculer $(5\frac{1}{2})!$. De cette manière, la relation de récurrence nous permet de calculer les valeurs des factorielles de nombres négatifs.

En retournant maintenant à l'intégrale d'Euler, on peut montrer que pour les valeurs de la variable inférieures à 0, les théorèmes habituels de l'analyse ne suffisent pas à attribuer un sens à l'intégrale, car elle est divergente. De l'autre côté, elle a du sens et elle fournit une valeur si on substitue à x n'importe quel nombre complexe de la forme $a + bi$ avec $a > 0$. Avec de telles substitutions, l'intégrale devient alors une fonction à valeur complexe qui est définie pour tous les nombres complexes dans la moitié droite du plan et qui coïncide avec la fonction gamma ordinaire pour les valeurs réelles. Le produit d'Euler est même plus fort. Avec comme exceptions $0, -1, -2, \ldots$, tout nombre complexe quel qu'il soit peut être inséré comme variable et le produit infini converge alors, fournissant une valeur. Ainsi il apparaît que nous avons à notre disposition un certain nombre de méthodes, conceptuellement et opérationnellement différentes pour étendre le domaine de définition de la fonction gamma. Ces différentes méthodes fournissent-elles le même résultat ? Oui, mais pourquoi ?

La réponse peut être trouvée dans la notion de fonction analytique. C'est le point focal de la théorie des fonctions à variable complexe et une excroissance de l'ancienne notion d'expression analytique. Comme nous l'avons insinué, les mathématiques de l'époque étaient vagues à propos de cette notion, l'expression signifiant alors fonction que l'on rencontre d'une façon naturelle en analyse mathématique. Quand plus tard, J. B. J. Fourier (1768-1830) a découvert que les fonctions de portée générale et les fonctions avec des caractéristiques déplaisantes pouvaient être produites par une superposition infinie de sinus et cosinus ordinaires, il devint clair que le critère tel que le fait de “rencontrer de telles fonctions de manière naturelle” devait être oublié. La découverte a simultanément forcé un élargissement de l’idée de fonction et un rétrécissement de ce que recouvrait la notion de fonction analytique.

Les fonctions analytiques ne sont pas si arbitraires dans leur comportement. Au contraire, elles possèdent de forts liens internes. Définies très précisément comme des fonctions qui possèdent une dérivée complexe ou de manière équivalente comme des fonctions qui possèdent des expansions en séries de puissances $a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$, elle montrent le phénomène remarquable d’“action à distance.”. Cela signifie que la détermination du comportement d’une fonction analytique sur tout intervalle aussi petit soit-il est suffisante pour entraîner la possibilité de déterminer son comportement partout ailleurs ; son domaine potentiel de définition et ses valeurs sont théoriquement obtenables à partir de cette information. Les fonctions analytiques, de plus, obéissent au principe de permanence de relations fonctionnelles ; si une fonction analytique satisfait dans certaines parties de son domaine de définition une certaine relation fonctionnelle, alors elle doit le faire partout où elle est définie. Inversement, une telle relation peut être utilisée pour étendre la définition aux régions inconnues. Notre compréhension du processus de prolongement analytique, selon la façon dont ce phénomène est connu, est basé sur le travail de Bernhard Riemann (1826-1866) et Karl Weierstrass (1815-1897). La fonction à valeurs complexes qui résulte de la substitution de nombres complexes dans l’intégrale d’Euler est une fonction analytique. La fonction qui provient d’un produit eulérien est une fonction analytique. La relation de récurrence pour la fonction gamma si elle est satisfaite dans une région doit l’être dans toute autre région dans laquelle la fonction peut être “prolongée” analytiquement et peut par exemple être utilisée pour effectuer de telles extensions. Toutes les portions du plan complexe, à l’exception des valeurs $0, -1, -2, \ldots$ sont accessibles par la fonction gamma complexe qui est devenue l’unique extension analytique de l’intégrale d’Euler aux valeurs complexes (voir Fig. 3).

The Gamma Function

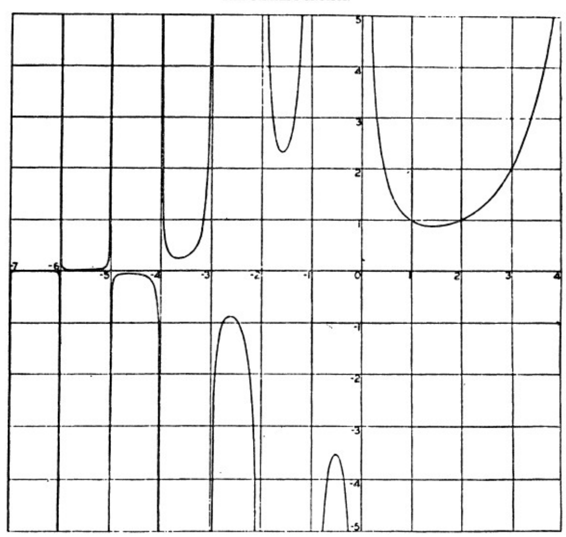


Fig. 2*

Pour comprendre pourquoi certains points doivent être exclus, observons que $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$, et lorsque x tend vers 0, nous obtenons $\Gamma(0) = 1/0$. Cela vaut $+\infty$ ou $-\infty$ selon que 0 est approché par des valeurs positives ou négatives. L’équation fonctionnelle (19) induit alors ce comportement encore et encore à chaque entier négatif. La fonction gamma (réelle) comprend un nombre infini de portions déconnectées s’ouvrant vers le haut et vers le bas alternativement. Les portions correspondant à des valeurs négatives sont chacune resserrées en une bande infinie d’une unité de large, mais la plus grande portion qui correspond aux

x positifs et qui contient les factorielles est de largeur infinie (voir Fig. 2 [3]). Ainsi, il y a des points exclus pour la fonction gamma, ces points auxquels elle montre du point de vue ordinaire (des variables réelles) un comportement plutôt déplaisant et capricieux.

THE ABSOLUTE VALUE OF THE COMPLEX GAMMA FUNCTION, EXHIBITING THE POLES AT THE NEGATIVE INTEGERS

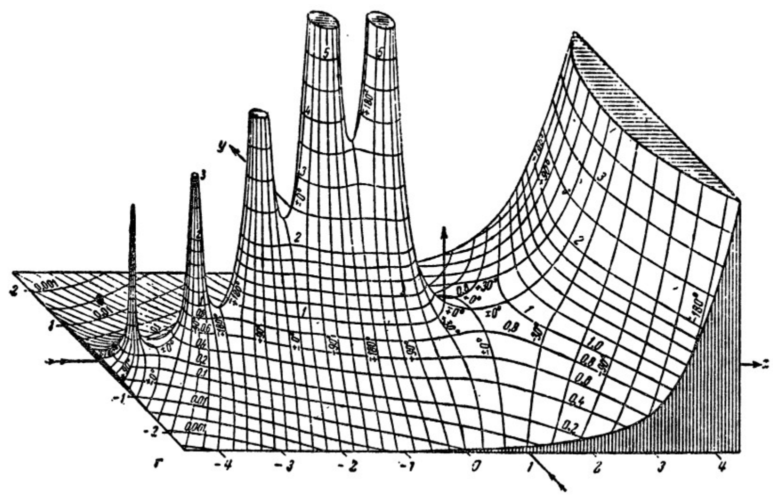


FIG. 3*

Mais du point de vue complexe, ces points au comportement singulier (singulier au sens de Sherlock Holmes) méritent une étude particulière et deviennent une part importante de l'histoire. Dans les images de la fonction gamma complexe, ils se présentent comme une rangée infinie de "stalagmites," chacune de hauteur infinie (celles sur la figure sont nécessairement tronquées) qui deviennent de plus en plus aigues comme elles vont vers l'infini (voir Fig. 3[4]). On les appelle des pôles. Les pôles sont des points où la fonction a un comportement infini de type spécialement simple, un comportement ressemblant à celui de fonctions simples telles que l'hyperbole $y = 1/x$ en $x = 0$ ou de $y = \tan x$ en $x = \pi/2$. La théorie des fonctions analytiques s'intéresse spécialement à ce comportement singulier, et consacre beaucoup de pages à l'étude des singularités. Les fonctions analytiques possèdent de nombreuses sortes de singularités et celles qui n'ont que des pôles sont appelées méromorphes. Il y a aussi des fonctions qui ont assez de chance pour n'avoir aucune singularité pour des arguments finis. De telles fonctions forment une élite et sont connues sous le nom de fonctions entières. Elles sont semblables à des polynômes tandis que les fonctions méromorphes sont semblables à des quotients de polynômes. La fonction gamma est méromorphe. Son inverse, $1/\Gamma(x)$, n'a au contraire aucun point exclus. Elle ne présente de problème nulle part. Aux points $0, 1, 2, \ldots$, elle s'annule simplement. Et une valeur de 0 qui advient une infinité de fois, rappelle fortement la fonction sinus.

Lors du réveil par l'extension au domaine complexe, de nombreuses identités remarquables surgissent, et même si certaines d'entre elles peuvent être et furent obtenues sans référence au plan complexe, elles acquièrent une signification plus profonde et plus riche lorsqu'on les regarde selon ce point de vue étendu. Il y a la formule de réflexion d'Euler

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z. \tag{24}$$

[3] De H. T. Davis, Tables des fonctions mathématiques supérieures, vol. I, Bloomington, Indiana, 1933.

[4] De : E. Jahnke et F. Emde, Tafeln höherer Funktionen, 4ème éd., Leipzig, 1948.

Il peut être facilement montré, en utilisant la relation de récurrence de la fonction gamma, que le produit $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ est une fonction périodique de période 2 ; mais malgré le fait que $\sin\pi z$ est une des fonctions périodiques les plus simples, qui aurait pu anticiper la relation (24) ? Qu'est-ce que la trigonométrie, après tout, a à voir avec la séquence 1, 2, 6, 24 par laquelle la discussion dans son ensemble a commencé ? C'est un bel exemple des formes délicates qui rendent les mathématiques de cette période si magiques. Du point de vue complexe, une raison partielle de cette identité provient de la similarité entre les zéros de la fonction sinus et les pôles de la fonction gamma. On a la formule de duplication

$$\Gamma(2z) = (2\pi)^{-1/2}2^{2z-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) \tag{25}$$

découverte par Legendre et étendue par Gauss dans ses recherches sur la fonction hypergéométrique à la formule de multiplication

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{1/2(1-n)}n^{nz-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right) \tag{26}$$

Il y a de jolies formules pour les dérivées de la fonction gamma comme

$$d^2 \log\Gamma(z)/dz^2 = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\dots. \tag{27}$$

Voici l'exemple d'un type de séries infinies à partir desquelles G. Mittag-Leffler (1846-1927) créa plus tard sa théorie des développements des fonctions méromorphes en fractions partielles. Il y a une relation étroite entre la fonction gamma et la fonction zeta qui a été d'une importance fondamentale dans l'étude de la distribution des nombres premiers,

$$\zeta(z) = \zeta(1-z)\Gamma(1-z)2^z\pi^{z-1}\sin\tfrac{1}{2}\pi z, \tag{28}$$

où

$$\zeta(z) = 1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\dots. \tag{29}$$

Une histoire intéressante est attachée à cette formule. Elle a d'abord été démontrée par Riemann en 1859 et elle lui a été attribuée par convention. Puis en 1894, on a découvert qu'une version modifiée de l'identité apparaissait dans un certain travail d'Euler effectué en 1749. Euler n'avait pas revendiqué d'avoir prouvé la formule. Pourtant, il la "vérifia" pour les entiers, pour $\frac{1}{2}$, et pour $3/2$. La vérification pour $\frac{1}{2}$ se fait par substitution directe, mais pour toutes les autres valeurs, Euler travaille avec des séries infinies divergentes. Cela a été fait plus de 100 ans avant que ne naisse une théorie solide sur ces séries, mais avec une intuition infaillible, Euler réussit à les ajouter par ce que l'on appelle de nos jours la méthode de sommation d'Abel. Le cas $3/2$ est encore plus intéressant. Là, en invoquant à la fois les séries divergentes et l'évaluation numérique, il réussit à obtenir un accord numérique jusqu'à la cinquième décimale ! Tout ce travail le convainquit de la vérité de son identité. Les preuves modernes rigoureuses n'ont pas besoin de la théorie des séries divergentes, mais les notions de prolongement analytique sont cruciales.

Pour l'unité essentielle de la fonction gamma sur la totalité du plan complexe, il est théoriquement et esthétiquement important d'avoir une formule qui marche pour tous les nombres complexes. Une telle formule a été fournie en 1848 par F. W. Newman :

$$(30) \qquad 1/\Gamma(z) = ze^{\gamma z}\left\{(1+z)e^{-z}\right\}\left\{(1+z/2)e^{-z/2}\right\}\dots, \qquad \text{où } \gamma = .5772156649\dots.$$

Cette formule est essentiellement une factorisation de $1/\Gamma(z)$ et est proche d'une factorisation de polynômes. Elle montre clairement quand la fonction s'évanouit. En annulant chaque facteur, on trouve que $1/\Gamma(z)$ est nul pour $z = 0, z = -1, z = -2, \dots$. Dans les mains de Weierstrass, ce résultat est devenu le point de départ de son étude particulière de la fonction gamma. Weierstrass était intéressé par la manière dont des fonctions autres que polynomiales peuvent être factorisées. Un certain nombre de factorisations isolées étaient alors connues, la formule de Newman (30) et la factorisation plus ancienne du sinus

$$(31) \qquad \sin \pi z = \pi z(1-z^2)\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\left(1-\frac{z^2}{9}\right)\dots$$

en font partie. La factorisation des polynômes est surtout un sujet algébrique mais l'extension à des fonctions comme la fonction sinus ont une infinité de racines qui nécessitent la construction d'une théorie des produits infinis. En 1876, Weierstrass réussit à produire une théorie extensive des factorisations qui incluait les cas particuliers bien connus des produits infinis, ainsi que ceux des fonctions doublement périodiques.

La formule (30) fait bien plus que simplement montrer les racines de $1/\Gamma(z)$.

Elle montre immédiatement que l'inverse de la fonction gamma est une fonction beaucoup moins difficile à traiter que la fonction gamma elle-même. C'est une fonction entière, c'est-à-dire une de ces fonctions particulières qui ne possèdent aucune singularité quels que soient ses arguments finis. Weierstrass était si étonné par les avantages gagnés à commencer par $1/\Gamma(z)$ qu'il introduisit une notation spéciale pour elle. Il appela $1/\Gamma(u+1)$ la *factorielle* de u et la nota $Fc(u)$.

La théorie des fonctions d'une variable complexe unifie tout un fatras de courbes et un patchwork de méthodes. C'est dans cette théorie, avec ses études hautement développées des séries infinies de différents types, que furent effectuées les tentatives malheureuses de Stirling de résoudre le problème de l'interpolation pour les factorielles. Stirling réalisa un travail considérable sur les séries infinies de la forme

$$A + Bz + Cz(z-1) + Dz(z-1)(z-2) + \dots.$$

Cette série est particulièrement utile pour s'adapter à des polynômes dont les valeurs sont données aux entiers $s = 0, 1, 2, \dots$. La méthode pour trouver les coefficients $A, B, C, \dots$ était bien connue. Mais quand une quantité infinie d'adaptation est nécessaire, il faut bien plus qu'un simple travail formel, car nous sommes alors face à une série infinie de bonne foi dont la convergence doit être analysée. En commençant par la série $1, 2, 6, 24, \dots$, Stirling trouva des polynômes d'interpolation à travers les séries ci-dessus. La série infinie résultante est divergente. Les factorielles grossissent trop vite. Stirling le réalisa et émit la suggestion que peut-être que si l'on commençait avec les logarithmes des factorielles au lieu des factorielles elles-mêmes, la taille serait suffisamment amoindrie pour qu'on puisse faire quelque-chose. Les choses en restèrent là jusqu'à 1900 lorsque Charles Hermite (1822-1901) écrivit la série de Stirling pour $\log \Gamma(1+z)$

$$(32) \qquad \log \Gamma(1+z) = \frac{z(z-1)}{1.2}\log 2 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}(\log 3 - 2\log 2) + \dots$$

et montra que cette identité est valide à chaque fois que z est un nombre complexe de la forme $a + ib$ avec $a > 0$. L'identité elle-même aurait pu être réécrite par Stirling, mais trouver la preuve aurait été une autre histoire. Un point de départ bien plus simple est la fonction $\psi(z) = (d/dz) \log \Gamma(z)$, maintenant connue sous le nom de fonction digamma ou psi. Cela amène à la série de Stirling

$$\frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = -\gamma + (z-1) - \frac{(z-1)(z-2)}{2.2!} + \frac{(z-1)(z-2)(z-3)}{3.3!} \ldots, \tag{33}$$

dont la convergence lorsque $a > 0$ fut démontrée en 1847 par M. A. Stern, un professeur de Riemann. Tous ces exemples sont maintenant des cas particuliers de la théorie extensive de la convergence des séries d'interpolation.

Les fonctions sont les blocs de construction de l'analyse mathématique. Aux XVIII$^{\text{ème}}$ et XIX$^{\text{ème}}$ siècles, les mathématiciens consacrèrent beaucoup de temps et de soin amoureux à développer les propriétés et les inter-relations entre les fonctions spéciales. Les puissances, les racines, les fonctions algébriques, les fonctions trigonométriques, les fonctions exponentielles, les fonctions logarithmiques, la fonction gamma, la fonction beta, la fonction hypergéométrique, les fonctions elliptiques, la fonction theta, les fonctions de Bessel, les fonctions de Mathieu, la fonction de Weber, celle de Struve, la fonction de Airy, les fonctions de Lamé, littéralement des centaines de fonctions spéciales furent isolées puis examinées minutieusement et leurs caractéristiques principales furent répertoriées. C'est un art qui n'est plus cultivé de nos jours. Les temps ont changé et l'accent s'est déplacé. Les mathématiciens préfèrent maintenant des éléments plus abstraits. De larges classes de fonctions sont étudiées plutôt que des fonctions individuelles. La sociologie a remplacé la biographie. Le domaine des fonctions spéciales, comme il est connu aujourd'hui, est plutôt grandement laissé à un petit mais ardent groupe d'enthousiastes, ainsi qu'à ceux qui travaillent en physique et ingénierie et qui se trouvent confrontés directement avec la nécessité de gérer de tels problèmes.

Le début des années 1950 vit la publication de quelques calculs très complets de la fonction gamma dans le plan complexe. Débutés en 1950 par une table à six places calculée en Angleterre, ils furent suivis en Russie par la publication d'une table très complète à 6 places. Ceci fut suivi en retour par la publication par le Bureau National des Standards de Washington d'une table à douze places. D'autres publications de la fonction gamma et des fonctions reliées sont apparues dans ce pays, en Angleterre, et au Japon. Dans le passé, les calculs principaux de la fonction gamma avaient été confinés dans les valeurs réelles. Deux jolies tables, l'une par Gauss en 1813 et l'autre par Legendre en 1825, ont semblé répondre aux besoins d'un siècle. La technologie moderne a aussi été rattrapée par la fonction gamma. Les tables des années 1800 avaient laborieusement été calculées à la main, et les récentes l'ont été par des ordinateurs électroniques digitaux.

Mais qu'est-ce qui stoppa cette recrudescence d'activité calculatoire ? Jusqu'aux travaux initiaux de H. T. Davis de l'Université d'Indiana dans le début des années 1930, les valeurs complexes de la fonction gamma avaient été peu étudiées. Ce fut donc un curieux tour que prennent parfois les événements lorsque la fonction gamma apparut dans la solution de plusieurs problèmes théoriques de physique nucléaire et atomique. Par exemple, les fonctions d'onde radiales pour les états d'énergie positive dans un champ de Coulomb amènent à une équation différentielle dont la solution fait intervenir la fonction de gamma complexe. La fonction de gamma complexe apparaît dans des formules de diffusion de particules chargées, dans les forces nucléaires entre protons, dans la formule d'approximation de Fermi pour la probabilité de la β-radiation, et en de nombreux autres endroits. L'importance de ces problèmes pour les physiciens a eu comme effet de bord que les mathématiques computationnelles rattrapent finalement deux siècles un quart de développement théorique.

Comme l'analyse se développait, à la fois du fait de la création de fonctions spéciales mais également de la délimitation de larges classes de fonctions, des classifications variées furent utilisées pour les organiser avec comme objectif de les étudier convenablement. Les premiers mathématiciens organisèrent les fonctions à partir de rien, de manière opérationnelle, en se demandant quelles opérations d'arithmétique ou de calcul devaient être effectuées pour les obtenir. Aujourd'hui, il y a une plus grande tendance à regarder les fonctions de l'intérieur, organiquement, en considérant leur construction comme achevée et en se demandant quelles caractéristiques géométriques elles possèdent. Dans la classification des premiers temps, nous avons au niveau le plus bas et le plus accessible des puissances, des racines, et tout ce qui peut être concocté à partir d'elles par la manipulation algébrique ordinaire. On les appelle les fonctions algébriques. Le calcul, avec son opération caractéristique de calcul de limites, introduisit les logarithmes et les exponentielles, ces derniers englobant, comme Euler le montra, les sinus et les cosinus de la trigonométrie qui avaient été utiles dans les périodes initiales de la découverte. Il y a un mur indépassable entre les fonctions algébriques et les nouvelles fonctions de calcul de limites. Ce mur consiste en le fait qu'on ne peut réussir en construisant une fonction trigonométrique quelle qu'elle soit car elle est définitivement hors du matériau fini de l'algèbre. En termes plus techniques, les fonctions algébriques sont fermées selon le processus algébrique et les fonctions trigonométriques sont définitivement en dehors de ce champ. (Au moyen d'une simple analogie : les entiers pairs sont fermés selon l'addition, la soustraction et la multiplication ; vous ne pouvez pas produire un nombre impair à partir de l'ensemble des nombres pairs en utilisant ces outils.). Cela amena au concept de fonctions transcendantes. Ce sont des fonctions qui ne sont pas algébriques. Les fonctions transcendantes comptent parmi leurs membres les fonctions trigonométriques, les fonctions logarithmiques, les fonctions exponentielles, les fonctions elliptiques, en bref, pratiquement toutes les fonctions spéciales qui ont été isolées pour des études particulières. Mais un tel flot de créations indiscriminées a produit une trop grande classe pour être traitée d'une seule manière. Les fonctions transcendantes doivent être séparées pour pouvoir être traitées pratiquement. Un outil majeur d'analyse est l'équation différentielle, qui exprime la relation entre une fonction et son niveau de croissance. On a trouvé que certaines fonctions, disons les fonctions trigonométriques, bien qu'elles soient transcendantes et ainsi ne satisfassent pas d'équation algébrique, ne satisfaisaient pas non plus d'équation différentielle dont les coefficients sont algébriques. Les solutions des équations différentielles algébriques forment une classe large de fonctions transcendantes même si cette classe ne les englobe pas toutes. Elle compte parmi ses membres de nombreuses fonctions spéciales qui interviennent en physique mathématique.

Où la fonction gamma se situe-t-elle là-dedans ? Ce n'est pas une fonction algébrique. Cela a été su tôt. C'est une fonction transcendante. Mais pendant longtemps, cela resta une question ouverte que de savoir si la fonction gamma satisfaisait une équation différentielle algébrique. Il fut répondu négativement à cette question en 1887 par O. Holder (1859-1937). La fonction gamma ne satisfait pas une telle équation. Elle est d'un ordre de transcendance plus élevé. C'est une fonction que l'on appelle transcendantalement transcendante, inatteignable par la résolution d'équations algébriques, et également inatteignable en résolvant des équations différentielles algébriques. Le sujet a intéressé de nombreuses personnes au cours des années et en 1925, Alexander Ostrowski, maintenant Professeur Émérite de l'Université de Bâle, en Suisse, a donné une preuve alternative au théorème de Holder.

Les problèmes de classification sont très difficiles à résoudre. Considérons, par exemple, les problèmes suivants : l'équation $x^7 + 8x + 1$ peut-elle être résolue par radicaux ? π est-il transcendant ? $\int dx/\sqrt{(x^3+1)}$ peut-elle être calculée au moyen de fonctions spécifiques élémentaires ? L'équation différentielle $dy/dx = (1/x) + (1/y)$ peut-elle être résolue au moyen de quadratures ? Les problèmes généraux, dont ceux-ci sont des représentants, sont même de nos jours loin d'être résolus et ce malgré des théories célèbres telles que la théorie de Galois, la théorie de Lie, la théorie des intégrales Abéliennes qui a découlé de telles questions simples. Tout problème individuel peut être résolu par des méthodes qui ne marchent que pour lui seul et qui nécessitent une incroyable sagacité.

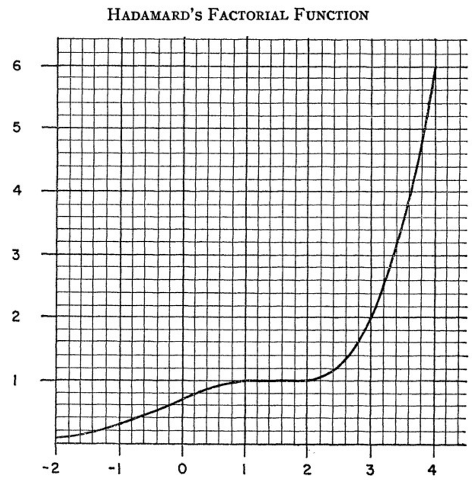


FIG. 4

Il y a une infinité de fonctions qui produisent des factorielles. La fonction

$$F(x) = (1/\Gamma(1-x))(d/dx)\log\{\Gamma((1-x)/2)/\Gamma(1-x/2)\}$$

est une fonction entière analytique qui coïncide avec la fonction gamma sur les entiers positifs. Elle satisfait l'équation fonctionnelle $F(x+1) = xF(x) + (1/\Gamma(1-x))$.

Retournons à nouveau à notre problème d'interpolation. Nous avons montré comment, pour parler strictement, il y a un nombre illimité de solutions à ce problème. Pour insister sur ce point, nous pourrions mentionner une curieuse solution donnée en 1894 par Jacques Hadamard (1865-[5]). Hadamard trouva une formule relativement simple impliquant la fonction gamma qui produit également des valeurs de factorielles aux entiers positifs (voir les figures 1 et 4.). Mais la fonction d'Hadamard

$$y = \frac{1}{\Gamma(1-x)} \frac{d}{dx} \log \left[\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) / \Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right) \right], \tag{34}$$

contrairement à la fonction gamma elle-même ne possède de singularités nulle part dans le plan complexe fini. C'est une solution analytique entière du problème d'interpolation et par conséquent, du point de vue de la théorie des fonctions, elle constitue une solution plus simple. Au vu de toute cette ambiguité, pourquoi alors la solution d'Euler devrait-elle être considérée comme la solution par excellence ?

Du point de vue des intégrales, la réponse est claire. L'intégrale d'Euler apparaît partout et est inextriquablement liée à l'hôte de fonctions spéciales. Sa fréquence et sa simplicité la rendent fondamentale. Quand les puces sont en panne, c'est tout à fait la forme de l'intégrale et de ses modifications qui lui prêtent son utilité et son importance. Du point de vue de l'interpolation, nous ne pouvons prétendre à cela. Nous devons mieux regarder la fonction gamma et montrer qu'elle est la plus simple de toutes les solutions au problème de l'interpolation. C'est partiellement un problème d'esthétique mathématique.

[5] Hadamard est décédé en 1963.

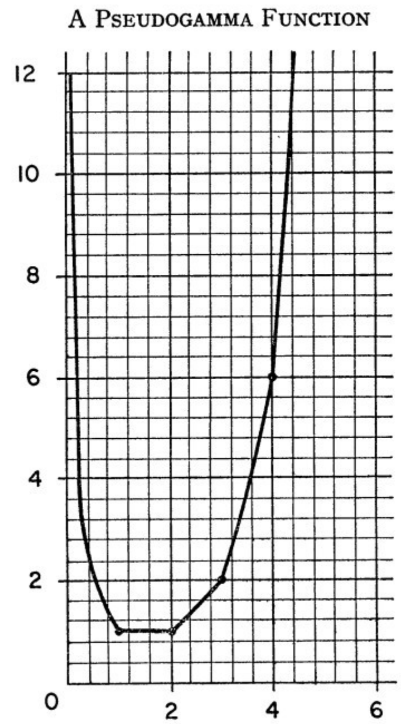


Fig. 5

La fonction illustrée produit des factorielles, satisfait l'équation fonctionnelle de la fonction gamma, et est convexe.

Nous avons déjà observé que l'intégrale d'Euler satisfait l'équation de récurrence fondamentale, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, et que cette équation nous permet de calculer toutes les valeurs réelles de la fonction gamma à partir simplement de la connaissance que l'on a de ces valeurs dans l'intervalle de 0 à 1. Puisque la solution au problème d'interpolation n'est pas déterminée de manière unique, cela a du sens d'ajouter au problème davantage de conditions et de se demander si le problème augmenté possède alors une solution unique. Si tel était le cas, nous espèrerions que cette solution coïncide avec celle d'Euler. La relation de récurrence est une condition naturelle à ajouter. Si nous l'ajoutons, nous trouvons que la fonction gamma n'est à nouveau pas la seule fonction qui satisfait cette relation de récurrence et qui produit des factorielles. On peut aisément construire une "pseudo" fonction gamma $\Gamma_S(x)$ en la définissant entre, disons, 1 et 2 de n'importe quelle façon (du moment qu'elle est telle que $\Gamma_S(1) = 1, \Gamma_S(2) = 1$), et en laissant la relation de récurrence étendre ses valeurs partout ailleurs.

Si, par exemple, nous posons $\Gamma_S(x)$ vaut 1 partout entre 1 et 2, la relation de récurrence nous amènera à la fonction (voir Fig. 5).

$$\begin{aligned}
&\Gamma_S(x) = 1/x & & 0 < x \leqq 1;\\
&\Gamma_S(x) = 1, & & 1 \leqq x \leqq 2;\\
&\Gamma_S(x) = x-1, & & 2 \leqq x \leqq 3;\\
&\Gamma_S(x) = (x-1)(x-2), & & 3 \leqq x \leqq 4;\ldots.
\end{aligned} \tag{35}$$

Nous pourrions terminer avec un résultat assez étrange, dépendant de celui par lequel nous avons commencé. Même si nous imposons que le résultat final soit une fonction analytique, il y a des moyens de le faire. Par exemple, prenons n'importe quelle fonction qui est à la fois analytique et à la fois périodique de période 1. Appelons-la $p(x)$. Soyons sûr que $p(1) = 1$. La fonction $1 + \sin 2\pi x$ pourra être $p(x)$. Maintenant, multiplions la fonction gamma ordinaire $\Gamma(x)$ par $p(x)$ et le résultat $\Gamma(x)p(x)$ sera une "pseudo" fonction gamma qui est analytique, qui satisfait la relation de récurrence, et qui produit des factorielles ! Par conséquent, nous n'avons toujours pas assez de conditions. Nous devons à nouveau augmenter le problème. Mais qu'ajouter ?

Vers le milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, il fut reconnu que la fonction gamma d'Euler était la seule fonction continue qui satisfaisait simultanément la relation de récurrence, la formule de réflexion et la formule de multiplication. Weierstrass montra plus tard que la fonction gamma était la seule solution continue à la relation de récurrence pour laquelle $\{\Gamma(x+n)\}/\{(n-1)n^x\} \to 1$ pour tout x. Ces conditions ajoutées au problème d'interpolation serviraient à produire une solution unique et qui coïncide avec celle d'Euler. Mais elles semblaient trop lourdes et trop nombreuses comme les quart-arrières du lundi matin. C'est-à-dire que les conditions ajoutées étaient difficilement naturelles car elles étaient liées aux propriétés analytiques plus profondes de la fonction gamma. La recherche continua.

Les conditions esthétiques ne devaient pas être trouvées dans d'anciennes considérations analytiques, mais dans une approche plus nouvelle, interne, organique, de la théorie des fonctions qui fut développée au tournant du siècle. Sauvée par la théorie des ensembles de Cantor et la théorie émergente de la topologie, la nouvelle théorie des fonctions ne s'intéressait pas tant que ça aux équations et identités mais plutôt aux propriétés géométriques fondamentales. La condition souhaitée fut trouvée dans des notions de convexité. Une courbe est convexe si elle vérifie la chose suivante : prenez deux points de la courbe et joignez-les par un segment de droite ; alors, la portion de courbe entre les points reste sous la courbe. Une courbe convexe ne sinue pas ; elle ne peut ressembler à un dos de chameau. Au tournant du siècle, la convexité était dans l'air mathématique. On trouva qu'elle était intrinsèque à de nombreux phénomènes divers. Sur la durée d'une génération, elle fut recherchée, généralisée, abstraite, étudiée pour son propre intérêt, elle fut appliquée. Attirant l'attention sur elle via le travail de H. T. Brunn en 1887 et celui de H. Minkowski en 1903 sur les corps convexes et provoquant un intérêt indépendant en 1906 par le travail de J. L. W. V. Jensen, l'idée de convexité se propagea et s'établit elle-même dans la théorie des valeurs moyennes, la théorie du potentiel, la topologie, et plus récemment dans la théorie des jeux et la programmation linéaire. Au tournant du siècle donc, une application de la convexité à la fonction gamma aurait été naturelle et dans l'ordre des choses.

Les courbes individuelles qui constituent la fonction gamma sont toutes convexes. Un regard à la figure 2 montre que cela est vrai. Si, comme dans le paragraphe précédent, une fonction pseudo-gamma satisfaisant la formule de récurrence était produite en introduisant l'ondulation $1 + \sin 2\pi x$ comme facteur, ce ne serait plus vrai. Il a pu arriver à de nombreux mathématiciens de penser que la fonction gamma est la seule qui prend des valeurs de factorielles, satisfait la relation de récurrence, et est convexe par le dessous pour tout $x > 0$. Malheureusement, ça n'est pas vrai. La figure 5 montre une fonction pseudo-gamma qui possède justement ces propriétés. Il a fallu attendre 1922 pour découvrir une formulation correcte. Mais la solution n'était pas bien loin. La fonction gamma est non seulement convexe, mais elle est également logarithmiquement convexe. C'est-à-dire que le graphe de $\log \Gamma(x)$ est également convexe par en-dessous pour $x > 0$. Ce fait est implicite dans la formule (27). La convexité logarithmique est une condition plus forte que la convexité ordinaire car la convexité logarithmique implique, mais n'est pas impliquée par, la convexité ordinaire. Maintenant Harald Bohr et J. Mollerup ont été capables de démontrer le fait surprenant que la fonction gamma est la seule fonction qui satisfait la relation de récurrence et est logarithmiquement convexe. La preuve originale a été simplifiée quelques années plus tard par Emil Artin, maintenant professeur à l'Université de Princeton, et le théorème avec la méthode d'Artin constitue maintenant le théorème de Bohr-Mollerup-Artin. Sa formulation exacte est celle-ci :

La fonction gamma d'Euler est la seule fonction définie pour $x > 0$ qui est positive, qui vaut 1 en $x = 1$, qui satisfait l'équation fonctionnelle $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, et qui est logarithmiquement convexe.

Ce théorème est à la fois si surprenant et si satisfaisant que le synode d'abstraitistes qui écrivent les canons mathématiques sous le nom de plume de N. Bourbaki l'ont adopté comme point de départ de leur exposition de la fonction gamma. Preuve : une page ; découverte : 193 ans.

Nous en savons beaucoup plus sur la fonction gamma. Depuis l'époque d'Euler, plus de 400 articles majeurs la concernant ont été écrits. Mais quelques choses restent non encore connues et que nous aimerions savoir. Peut-être que le problème non résolu le plus difficile traite de questions de rationnalité et de transcendance. Considérons, par exemple, le nombre $\gamma = .57721\ldots$ qui apparaît dans la formule (30). C'est la constante d'Euler-Mascheroni. Beaucoup d'expressions peuvent l'égaler. Ainsi,

$$\gamma = -d\Gamma(x)/dx|_{z=1}, \tag{36}$$

$$\gamma = \underset{n\to\infty}{lim} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \log n. \tag{37}$$

Bien que la valeur numérique de γ soit connue jusqu'à des centaines de décimales, on ne sait pas aujourd'hui (où cet article est écrit) si γ est ou n'est pas un nombre rationnel. Un autre problème de cette sorte traite des valeurs de la fonction gamma elle-même.

Bien que, assez curieusement, le produit $\Gamma(1/4)/\sqrt[4]{\pi}$ puisse être prouvé comme étant transcendant, on ne sait pas si $\Gamma(1/4)$ est rationnel.

George Gamow, le physicien renommé, cite Laplace qui a dit qu'au fur et à mesure que les zones de connaissance autour d'un sujet grandissent, le champ d'application du sujet en question grandit lui aussi. Laplace avait clairement en tête l'image d'un cercle s'étendant dans un plan infini. Gamow affrontait des problèmes de physique et avait en tête un cercle grandissant sur une surface sphérique. Comme le cercle grandit, la zone que le cercle délimite commence par grandir, mais ensuite elle se contracte. L'auteur de cet article est d'accord avec Gamow en ce qui concerne les mathématiques. Il faut ajouter ceci : chaque génération a trouvé quelque chose d'intéressant à dire à propos de la fonction gamma. Peut-être que la génération prochaine le fera aussi.

L'auteur souhaiterait remercier le Professeur C. Truesdell pour ses commentaires très utiles et critiques et le Dr. H. E. Salzer pour de nombreuses références utiles.

Bibliographie

1. E, Artin, Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1931.

2. N. Bourbaki, Éléments de Mathématique, Book IV, Ch. VII, La Fonction Gamma, Paris, 1951.

3. H. T. Davis, Tables of the Higher Mathematical Functions, vol. 1, Bloomington, Indiana, 1933.

4. L. Euler, Opera omnia, vol. $I_{14}, Leipzig - Berlin, 1924$.

5. P. H. Fuss, Ed., Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célèbres Géomètres du XVIII$^{\text{ième}}$ Siècle, Tome I, St. Petersbourg, 1843.

6. G. H. Hardy, Divergent Series, Oxford, 1949, Ch. II.

7. F. Lösch et F. Schoblik, Die Fakultät und verwandte Funktionen, Leipzig, 1951.

8. N, Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1906.

9. Table of the Gamma Function for Complex Arguments, National Bureau of Standards, Applied Math. Ser. 34, Washington, 1954, (Introduction D'Herbert E. Salzer.).

10. E. T. Whittaker et G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge, 1947, Ch. 12.

Préhistoire de la fonction zeta

André Weil

En substance au moins, le fait qu'une série *infinie* de termes puisse avoir une somme *finie* était connu des Grecs, d'abord comme le paradoxe philosophique d'"Achille et la tortue"), puis, par Archimède si ce n'est plus tôt, comme résultat mathématique utilisé par lui dans sa *Quadrature de la Parabole* (v. [1], p. 312-315, prop. XXIV) ; là, en substance, il somme la progression géométrique infinie de raison $\frac{1}{4}$. Avec la même facilité, en utilisant *Eucl.* IX.35, il aurait pu sommer n'importe quelle progression de raison < 1 ; le cas de la raison $\frac{1}{2}$ est aussi implicite dans *Eucl.* X.1.

En 1644, inspiré de façon évidente par le traité d'Archimède, Torricelli publie à Florence son *De dimensione parabolae* (qu'il appela "*le plus banal de tous les sujets banals*"), qui couvre le même domaine et bien davantage ([2] p. 89-162). Là, mécontent des progressions géométriques, il écrit ([2], p. 149-150) une assertion marginale, pour toute séquence décroissante "finie ou infinie" de nombres positifs, l'identité qu'il devrait écrire, dans le cas d'une séquence finie $(a_0, a_1, .., a_n)$, comme

$$a_0 = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) + a_n;$$

ici a_n est "le dernier nombre" de la séquence, avec la compréhension que,

 N.B.

Dans cet article, la notation $\zeta(m)$, avec m réel, sera utilisée comme une abréviation pour la série (convergente ou non) qui, en notation moderne, s'écrirait $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-m}$ et que les mathématiciens précédents (incluant Euler, mais pas encore Mengoli) écrivaient

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \text{etc.}$$

pour une progression infinie géométrique, ce “dernier nombre” est “rien ou un point” ; dans notre langage, bien sûr, on devrait dire que a_n doit être remplacé par la limite de la séquence. De cela, Torricelli dérive une preuve élégante pour la somme d'une progression géométrique infinie de raison < 1.

En 1650, potentiellement peut-être sous l'influence de cette note marginale, un jeune professeur à Bologne, Pietro Mengoli, le successeur du grand Cavalieri, publie un livre ([3]) entièrement dédié à la théorie des séries infinies. Son titre, *Novae Quadraturae Arithmeticae Seu De Additione Fractionum*, semble être une référence à Archimède et Torricelli ; vraiment aucune “quadrature” (i.e., aucun calcul d'aires) n'apparaît dans le livre. Même pour ses contemporains, le manque presque complet de notations algébriques doit l'avoir rendu difficile à lire (cf. [4]). Avec deux exceptions (qu'il faut bien prendre en compte), il traite exclusivement de séries dans lesquelles la somme peut être effectuée explicitement par des moyens élémentaires, en effet, comme application de l'identité de Torricelli. Le premier exemple, et un exemple typique, est celui de la somme des inverses des “nombres triangulaires” $n(n+1)/2$, i.e., de la série

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\text{etc.}$$

Ici, bien sûr, le m-ième terme est

$$\frac{2}{(m+1)(m+2)}=\frac{2}{m+1}-\frac{2}{m+2}$$

de telle manière que la somme des m premiers termes est $1-2/m+2$, et la somme de la série est 1.

Plus important pour notre présent sujet est le fait que Mengoli prouve la divergence de la “série harmonique” $\zeta(1)$ et fait surgir, pour la première fois, la question de la sommation de la série $\zeta(2)$. À propos de cette dernière, il exprime (aussi bien qu'il le peut) son questionnement à propos du fait que les inverses des "nombres triangulaires" peuvent être sommés, mais non pas ceux des "nombres carrés" ; "*cela*", écrit-il, "*nécessite l'aide d'un intellect plus riche [que le mien]*". Pour la divergence des séries harmoniques, pourtant, il apporte une preuve plus intelligente, basée sur l'inégalité

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}>\frac{3}{a},$$

qui peut être représentée par le schéma

$$\frac{1}{1}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{3}{3}=1}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{>\frac{3}{6}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}}_{>\frac{3}{9}=\frac{1}{3}}+\underbrace{\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}}_{>\frac{3}{12}=\frac{1}{4}}}_{>\frac{3}{3}=1,}+\text{etc.}$$

montrant que la série peut être décomposée en une infinité de sommes partielles (avec, respectivement, 1, 3, 9, 27 ... termes), chacune d'entre elles étant > 1.

Le *Novae Quadraturae* de Mengoli semble être resté presque complètement inconnu ; la seule référence contemporaine à ce texte apparaît dans une communication de Collins, contenue dans une lettre de 1673 de Oldenburg à Leibniz ([5a], Vol. I-1, p. 39 ; [5b], p. 85), où Collins note quelques uns des résultats de Mengoli et répète la question de Mengoli à propos de la somme de $\zeta(2)$. Pendant ce temps, cependant, des progrès notables sont faits. D'abord, en 1668, N. Kaufman, plus connu sous le nom de Mercator, a effectué “la quadrature de l’hyperbole.” ([6]) Sa méthode, qui consistait en l’intégration terme à terme de la série

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots,$$

lui fit donner pour $\log(1+x)$ la série de puissances

$$\log\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

avec $0 < x < 1$. La même année également, au moyen d’une analyse minutieuse, Brouncker établit la validité de la formule ci-dessus pour $x = 1$ ([7]). i.e.,

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots$$

(une série étroitement liée à $\zeta(1)$, ce que Jacob Bernoulli observera plus tard). Newton ensuite, dans son *De Analysi per Aequationes Infinitas* ([8]), avait élevé les expansions des séries de puissances au statut d’outil universel pour l’analyse. Bientôt Leibniz devait effectuer “la quadrature du cercle”, cette expression correspondant à la formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

qu’il prouva en substance en intégrant la série

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

La découverte de Leibniz ne fut pas imprimée avant 1682, ni celle de Newton qui le fut bien plus tard. En 1682 Leibniz publia sa formule $\pi/4$, mentionnant aussi quelques autres séries que celles ci-dessus, dans un article ([5a], Vol. II-1, p. 118-122) dans un des premiers numéros des *Acta Erudito-*

rum, nouvellement créés à Leipzig sous ses auspices. Plus tard, en 1689, un mathématicien de Bâle, encore peu connu à ce moment-là, Jacob Bernoulli, initia, sous le titre *Positiones de Seriebus Infinitis*, une série de thèses qui seraient "défendues" par ses étudiants à l'université, qu'il rassembla finalement en un traité systématique sur les séries infinies. Dans la première installation ([9], p. 375-402), il redécouvrit, parmi d'autres résultats qui étaient déjà connus de Mengoli, la divergence des séries $\zeta(1)$, et, exactement comme Mengoli, il exprima son interrogation au sujet de la difficulté de $\zeta(2)$; "*elle est finie*", écrit-il, "*comme cela apparaît en la comparant à une autre qui la majore trivialement", mais "sa sommation est plus difficile à trouver que ce à quoi on aurait pu s'attendre, et quiconque l'obtiendrait et nous la communiquerait gagnerait notre profonde gratitude.*"

Jusque là, de toutes les séries $\zeta(m)$, seules $\zeta(1)$, $\zeta(2)$, et une fois, incidemment, $\zeta(3)$ avaient été mentionnées. Cela change avec le second *Positiones* de Jacob Bernoulli en 1692 ([9], p. 517-542). Comme il n'a pas encore à sa disposition la fonction exponentielle a^x pour tous les réels x, il prend pour m un nombre rationnel arbitraire (supposément positif). Clairement il sait que $\zeta(m)$ converge pour $m \geq 2$ et diverge pour $m \leq 1$, puisque c'est ce qu'elle fait pour $m = 2$ et $m = 1$. Il n'est pas clair s'il sait qu'elle converge pour $1 < m < 2$, mais, cependant, son traitement sur ce point (*Pos.* XXIV, *Schol.* ; [9] p. 529-533) est purement formel. Séparant la série $\zeta(m)$ en les séries

$$\phi(m) = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + etc. \qquad \psi(m) = 1 + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + etc.$$

il obtient

$$\zeta(m) = \phi(m) + \psi(m), \qquad \phi(m) = 2^{-m}\zeta(m),$$

et par conséquent

$$\frac{\psi(m)}{\phi(m)} = 2^m - 1,$$

un résultat qu'il trouve paradoxal pour $m = \frac{1}{2}$, puisque dans ce cas, cela donne $\psi(m) < \phi(m)$, alors que chaque terme dans la série $\psi(m)$ est plus grand que le terme correspondant dans $\phi(m)$. "*Il semble*", ajoute-t-il, "*qu'un esprit fini ne peut pas comprendre l'infini*" ! Aurait-il, plutôt que de faire cette naïve remarque, réécrit son résultat sous la forme

$$\zeta(m) = (1 - 2^{-m})^{-1}\psi(m)$$

il aurait grimpé sur la première marche vers l'expression de $\zeta(m)$ comme un produit "Eulérien".

Aucune mention n'a encore été faite de l'évaluation numérique de la série $\zeta(m)$, un sérieux problème au vu de leur lente convergence. On peut lire avec difficulté les longues discussions sans conclusions, dans la correspondance entre Leibniz et Jacob Bernoulli ([5a], Vol. II-3, p. 25-27, 32-34, 44-45, 49) sur l'évaluation des sommes partielles de $\zeta(1)$ comme une contribution à ce sujet. Le calcul de $\zeta(2)$ a été entrepris par Daniel Bernoulli en 1728 et par Goldbach en 1729 ([10], Vol. II, p. 263 et 281-282), avec des résultats préliminaires, qui seraient bientôt améliorés par Euler.

Cela semble avoir donné à Euler sa première opportunité d'un contact avec la fonction ζ. Comme pour la plupart des questions qui ont un jour attiré son attention, il ne l'abandonna jamais, faisant souvent un certain nombre de contributions fondamentales à son sujet (cf. [11], p. 257-276). D'abord, il découvrit la formule ainsi appelée formule d'Euler-MacLaurin, qui lui a permis de calculer, avec un grand degré d'approximation, les sommes $\zeta(m)$ pour $m \geq 2$ et les sommes partielles de $\zeta(1)$ ([12], t. 14, p. 119-122). Ceci, pourtant, n'apporta pas de lumière sur la théorie de la fonction zeta, si ce n'est que cela introduisit pour la première fois les nombres de Bernoulli dans ce sujet, mais simplement comme coefficients de la formule d'Euler-MacLaurin.

Alors vint, en 1735, la découverte sensationnelle de la formule

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

basée sur une application audacieuse de la théorie des équations algébriques à l'équation transcendente $0 = 1 - \sin\, x$ ([12], t. 14, p. 13-14). Cela a été bientôt suivi par le calcul de $\zeta(m)$ pour $m = 4,\ 6$, etc. par la même méthode, et par un certain nombre de contributions à la théorie des fonctions trigonométriques qui légitima finalement les résultats sur $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, etc.

Un autre article, en 1737 ([12], t. 14, p. 216-244), établit le "produit Eulérien" pour $\zeta(m)$ et des séries diverses liées, incluant

$$L(m) = 1 - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} + \text{etc.}$$

Il consacra un chapitre entier (le chapitre XV) de sa grande *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1745 ([12], t. 8) à ce même sujet. De cela, il dériva, ou pensa qu'il pourrait dériver, le produit infini pour $L(1)$ ([12], t. 14, p. 233)

$$L(1) = \prod \frac{p}{p \pm 1}$$

où le produit est pris sur tous les nombres premiers impairs arrangés en ordre croissant et le signe est donné par $p \pm 1 \equiv 0 \pmod 4$.

Également importante dans ses conséquences finales, mais non moins négligée pendant plus d'un siècle, il y a la découverte d'Euler des équations fonctionnelles pour les séries en question. Cela commença en 1739 ([12], t.

14, p. 443) avec la relation

$$1 - 2^m + 3^m - 4^m + etc. = \frac{\pm 2.1.2.3\ldots m}{\pi^{m+1}}\left(1 + \frac{1}{3^{m+1}} + \frac{1}{5^{m+1}} + etc.\right)$$

pour $m = 1, 3, 5, 7$. Le côté gauche doit être compris ici selon les idées d'Euler sur les séries divergentes, i.e. dans ce cas, par ce qui est connu sous le nom de sommation d'Abel. Ceci est clairement équivalent à l'équation fonctionnelle pour $\zeta(s)$ quand $s = 2, 4, 6, 8$, ou, plutôt, comme Euler le suggère une fois, pour toutes les valeurs positives paires de s. En 1749, sous le titre "*Remarques sur un beau rapport entre les séries de puissances tant directes qu'inverses*" ([12], t. 15, p. 70-90), Euler non seulement donna une tentative de preuve pour la formule ci-dessus, mais écrivit de façon conjecturale l'équation fonctionnelle pour la fonction zeta pour des valeurs arbitraires de l'argument (ou, plutôt, ce qui revient au même, pour la série très liée

$$(1 - 2^{1-n})\zeta(n) = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + etc.).$$

et également pour la série $L(n)$ donnée comme ci-dessus, ajoutant que la dernière était juste aussi certaine que la première et pourrait être plus facile à démontrer, "*apportant ainsi plus de lumière sur un certain nombre d'investigations semblables.*"

Le dernier article d'Euler sur le sujet, basé sur des recherches menées en 1752, a été écrit en 1775 et publié à titre posthume en 1785 ([12], t.4, p. 146-153). Il traite de la série $\sum \pm 1/p$, où la somme est calculée pour tous les nombres premiers impairs (en ordre croissant), et le signe, comme dans le produit infini de $L(1)$, est donné par $p \pm 1 \equiv 0 \pmod 4$. Ici il prend comme point de départ son produit infini pour $\zeta(2)$ et $L(1)$, dont il connaît les valeurs $\zeta(2) = \pi^2/6$ et $L(1) = \pi/4$, ce qui donne la formule

$$\frac{3\zeta(2)}{4L(1)^2} = 2 = \prod \frac{p \pm 1}{p \mp 1},$$

et par conséquent,

$$\frac{1}{2} \log 2 = 0.3465735902\ldots = \sum \pm \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \sum \pm \frac{1}{p^3} + \frac{1}{5} \sum \pm \frac{1}{p^5} + \mathit{etc.}$$

Du côté droit, la première série est celle qui doit être calculée ; toutes les autres sont absolument (mais lentement) convergentes. Euler les évalue numériquement par comparaison avec les valeurs connues de $L(3)$, $L(5)$, etc., et obtient finalement

$$\sum \pm \frac{1}{p} = 0.3349816\ldots$$

(alors qu'en 1752, il avait seulement obtenu pour cela la valeur 0,334980...).

Au vu de ce fait, conséquence également des ses résultats antérieurs, que $\sum 1/p$ est infini, cela lui permet de conclure qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4n+1$, et une infinité de nombres premiers de la forme $4n-1$, ceci étant un prélude aux articles célèbres de Dirichlet de 1837 sur les progressions arithmétiques ([13], Bd. I, p. 307-343).

Les articles de Dirichlet, si exceptionnels de rigueur mathématique alors qu'Euler ne se préoccupait pas de celle-ci, sont trop bien connus pour nécessiter des commentaires détaillés ici. Il suffira de noter que, basés comme ils le sont sur l'*Introductio* d'Euler de 1745 et sur le traitement par Gauss du groupe multiplicatif des entiers premiers à N modulo N quel que soit N, ils introduisent pour la première fois les “séries de Dirichlet” $L_\chi(s)$ attachées aux caractères de tels groupes, mais seulement pour les réels $s > 1$ quand elles sont absolument convergentes ; en fait, ces articles traitent les cas des propriétés de telles séries lorsque s tend vers 1. Il y avait encore un long saut à effectuer pour passer de cela à leur continuation analytique et à leur équation fonctionnelle.

La dernière étape a été effectuée par Riemann en 1859, au moins pour la fonction zeta elle-même ; mais elle avait été précédée par trois preuves pour l'équation fonctionnelle pour la série

$$L(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + etc.$$

dans le domaine $0 < s < 1$, où elle est convergente de façon conditionnelle. Le mathématicien suisse Malmstén a apporté sa preuve (mentionnant qu'une preuve similaire pouvait être donnée pour la fonction

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + etc.$$

et rappelant que ces deux résultats avaient été annoncés par Euler) dans un long article ([14]) écrit en mai 1846 et publié dans le Journal de Crelle en 1849. Schlömilch, clairement ignorant de l'article de Malmstén ainsi que de la priorité d'Euler, annonça le même résultat comme un exercice dans le *Grunert's Archiv*, également en 1849 ([15]) ; Clausen publia une solution à cet "exercice" dans le même *Archiv* en 1858 ([16]), et Schlömilch en publia sa propre démonstration ([17]).

Il a parfois été suggéré que ces publications ont fourni à Riemann la motivation de ses recherches sur la fonction zeta ; mais une source encore plus probable a été fournie récemment ([18]) sous la forme de la propre copie d'Eisenstein des *Disquisitiones* de Gauss dans leur traduction française par Poullet-Delisle (Paris, 1807). Sur la dernière page blanche de ce volume, Eisenstein a noté encore une autre preuve pour l'équation fonctionnelle de

$L(s)$; elle consiste essentiellement en une application évidente, sans aucune remarque ou référence pour la justifier, de la sommation de Poisson à la série en question, couplée à la formule

$$\int_0^\infty e^{\sigma\psi i}\psi^{q-1}d\psi = \frac{\Gamma(q)}{\sigma^q}e^{q\pi i/2} \qquad (0 < q < 1, \sigma > 0),$$

pour laquelle Eisenstein cite Dirichlet ([13], Bd. I, p. 401). Elle rend la transformation de Fourier de l'équation fonctionnelle égale à 0 pour $x < 0$ et à x^{q-1} pour $x > 0$.

La preuve d'Eisenstein est datée avec les mots “Scripsi 7 Avril 1849”. Comme il ne revendique pas les résultats comme étant les siens, il pourrait les avoir obtenus de Malmstén ou de Schlömilch. Un fait intéressant, pourtant, est que le mois d'avril 1849 est précisément le mois où Riemann quitta finalement Berlin pour Göttingen. Lui et Eisenstein avaient été des amis intimes. Ainsi il n'est pas seulement possible, mais même plutôt probable, qu'Eisenstein ait discuté de sa preuve de 1849 avec Riemann avant le départ de ce dernier. S'il en est ainsi, cela aurait pu être l'origine de l'article de Riemann de 1859.

Bibliographie

[1] Archimedes, *Opera Omnia...*, Vol. II. J. L. Heiberg, ed., Lipsiae, (1913).

[2] Torricelli, *Opere di Evangelista Torricelli*, Vol. I, Part 1. G. Loria and G. Vassura, eds, Faenza (1919).

[3] Mengoli, Pietro. *Novae Qudraturae Arithmeticae seu De Additione Fractionum*, Bononiae (1650).

[4] Eneström, G. "Zur Geschichte der unendlichen Reihen um die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts," *Bibl. Math.* (III) 12 :135-148 (1911-12).

[5a] Gerhardt, C. I., ed. *Leibnizens mathematische Schriften.* 6 vols., Halle (1849-63).

[5b] Gerhardt, C. I. ed. *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibnitz.* Berlin (1899) ; G. Olm, ed., Hildesheim (1962).

[6] Mercator, Auctore Nicolao Mercatore. *Logarithmotechnia. . . accedit vera Quadratura Hyperbolae . . .* , Londini (MDCLXVIII).

[7] Brouncker, Lord Viscount. "The Squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational Numbers. . . by that eminent Mathematician the right Honourable the Lord Viscount Brouncker," *Phil. Trans.* (1668).

[8] Whiteside, D. T., ed. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. II, Cambridge (1968).

[9] Bernoulli, Jacob. *Opera*, Tomus Primus, Genevae (1744).

[10] Fuss, P.H. *Correspondance mathématique et physique. . .* , Vol. II, St Petersbourg (1843), Johnson Reprint Corp. (1968).

[11] Weil, A. *Number Theory : An Approach through History*, Birkhäuser Boston (1983).

[12] Euler, Leonhard. *Opera Omnia, Series Prima*, 27 vols, Leipzig, Zurich (1911-56).

[13] Dirichlet, G. *Lejeune Dirichlet's Werke*, Bd. I, Berlin (1889).

[14] Malmstén, C. J. "De integralibus quibusdam definitis seriebusque infinitis," *J. fur reine u. ang. Math.* (Crelle's Journal), 38 :1-39 (1849).

[15] Schlömilch, O. "Uebungsaufgaben für Schüler, Lehrsatz von dem Herm Prof. Dr. Schlömilch," *Archiv der Math. u. Phys.* (Grunert's Archiv), 12 :415 (1849).

[16] Clausen, T. “Beweis des von Schlömilch . . . aufgestellten Lehrsatzes,” *Archiv der Math. u. Phys.* (Grunert’s Archiv), 30 :166-169 (1858).

[17] Schlömilch, O. “Ueber eine Eigenschaft gewisser Reihen,” *Zeitschr. fur Math. u. Phys.* 3 :130-132 (1858).

[18] Weil, A. *On Eisenstein’s copy of the Disquisitiones*, to appear.

Theorem IX. *In any of the formal systems mentioned in Theorem VI,*[53] *there are undecidable problems of the restricted functional calculus*[54] (that is, formulas of the restricted functional calculus for which neither validity nor the existence of a counterexample is provable).[55]

This is a consequence of

Theorem X. *Every problem of the form* $(x)F(x)$ (*with recursive* F) *can be reduced to the question whether a certain formula of the restricted functional calculus is satisfiable* (that is, for every recursive F, we can find a formula of the restricted functional calculus that is satisfiable if and only if $(x)F(x)$ is true).

By formulas of the restricted functional calculus (r. f. c.) we understand expressions formed from the primitive signs $\overline{}$, $\vee$, (x), $=$, x, $y, \ldots$ (individual variables), $F(x), G(x,y), H(x,y,z), \ldots$ (predicate and relation variables), where (x) and $=$ apply to individuals only.[56] To these signs we add a third kind of variables, $\phi(x)$, $\psi(x,y)$, $\chi(x,y,z)$, and so on, which stand for functions of individuals (that is, $\phi(x)$, $\psi(x,y)$, and so on denote single-valued functions whose arguments and values are individuals).[57] A formula that contains variables of the third kind in addition to the signs of the r. f. c. first mentioned will be called a formula in the extended sense (i. e. s.).[58] The notions "satisfiable" and "valid" carry over immediately to formulas i. e. s., and we have the theorem that, for any formula A i. e. s., we can find a formula B of the r. f. c. proper such that A is satisfiable if and only if B is. We obtain B from A by replacing the variables of the third kind, $\phi(x), \psi(x,y), \ldots$, that occur in A with expressions of the form $(\imath z)F(z,x)$, $(\imath z)G(z,x,y), \ldots$, by eliminating the "descriptive" functions by the method used in *PM* (I, $*14$), and by logically multiplying[59] the formula thus obtained by an expression stating about each $F, G, \ldots$ put in place of

[54]See *Hilbert and Ackermann 1928*. In the system P we must understand by formulas of the restricted functional calculus those that result from the formulas of the restricted functional calculus of *PM* when relations are replaced by classes of higher types as indicated on page 153 above.

[55]In *1930* I showed that every formula of the restricted functional calculus either can be proved to be valid or has a counterexample. However, by Theorem IX the existence of this counterexample is *not* always provable (in the formal systems we have been considering).

[56]Hilbert and Ackermann (*1928*) do not include the sign $=$ in the restricted functional calculus. But for every formula in which the sign $=$ occurs there exists a formula that does not contain this sign and is satisfiable if and only if the original formula is (see *Gödel 1930*).

[57]Moreover, the domain of definition is always supposed to be the *entire* domain of individuals.

[58]Variables of the third kind may occur at all argument places occupied by individual variables, for example, $y = \phi(x)$, $F(x, \phi(y))$, $G(\psi(x, \phi(y)), x)$, and the like.

[59]That is, by forming the conjunction.

some $\phi, \psi, \ldots$ that it holds for a unique value of the first argument [for any choice of values for the other arguments].

We now show that, for every problem of the form $(x)F(x)$ (with recursive F), there is an equivalent problem concerning the satisfiability of a formula i. e. s., so that, on account of the remark just made, Theorem X follows.

Since F is recursive, there is a recursive function $\Phi(x)$ such that

$$F(x) \sim [\Phi(x) = 0],$$

and for Φ there is a sequence of functions, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, such that $\Phi_n = \Phi$, $\Phi_1(x) = x + 1$, and for every Φ_k $(1 < k \leq n)$ we have either

$$\begin{aligned} \text{1.} \qquad & (x_2, \ldots, x_m)[\Phi_k(0, x_2, \ldots, x_m) = \Phi_p(x_2, \ldots, x_m)], \\ & (x, x_2, \ldots, x_m)\{\Phi_k[\Phi_1(x), x_2, \ldots, x_m] = \\ & \qquad \Phi_q[x, \Phi_k(x, x_2, \ldots, x_m), x_2, \ldots, x_m]\}, \\ & \text{with } p, q < k,^{59a} \end{aligned} \tag{18}$$

or

$$\begin{aligned} \text{2.} \qquad & (x_1, \ldots, x_m)[\Phi_k(x_1, \ldots, x_m) = \Phi_r(\Phi_{i_1}(\mathfrak{x}_1), \ldots, \Phi_{i_s}(\mathfrak{x}_s))], \\ & \text{with } r < k, \quad i_v < k \quad (\text{for } v = 1, 2, \ldots, s),^{60} \end{aligned} \tag{19}$$

or

$$\text{3.} \qquad (x_1, \ldots, x_m)[\Phi_k(x_1, \ldots, x_m) = \Phi_1(\Phi_1(\ldots(\Phi_1(0))\ldots))]. \tag{20}$$

We then form the propositions

$$(x)\overline{\Phi_1(x) = 0} \,\&\, (x, y)[\Phi_1(x) = \Phi_1(y) \rightarrow x = y], \tag{21}$$

$$(x)[\Phi_n(x) = 0]. \tag{22}$$

In all of the formulas (18), (19), (20) (for $k = 2, 3, \ldots, n$) and in (21) and (22) we now replace the functions Φ_i by function variables ϕ_i and the number 0 by an individual variable x_0 not used so far, and we form the conjunction C of all the formulas thus obtained.

The formula $(Ex_0)C$ then has the required property, that is,

[59a] [The last clause of footnote 27 was not taken into account in the formulas (18). But an explicit formulation of the cases with fewer variables on the right side is actually necessary here for the formal correctness of the proof, unless the identity function, $I(x) = x$, is added to the initial functions.]

[60] The $\mathfrak{x}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ stand for finite sequences of the variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$; for example, x_1, x_3, x_2.

1. If $(x)[\Phi(x) = 0]$ holds, $(Ex_0)C$ is satisfiable. For the functions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ obviously yield a true proposition when substituted for $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ in $(Ex_0)C$.

2. If $(Ex_0)C$ is satisfiable, $(x)[\Phi(x) = 0]$ holds.

Proof: Let $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ be the functions (which exist by assumption) that yield a true proposition when substituted for $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ in $(Ex_0)C$. Let $\mathfrak{J}$ be their domain of individuals. Since $(Ex_0)C$ holds for the functions Ψ_i, there is an individual a (in $\mathfrak{J}$) such that all of the formulas (18)–(22) go over into true propositions, (18′)–(22′), when the Φ_i are replaced by the Ψ_i and 0 by a. We now form the smallest subclass of $\mathfrak{J}$ that contains a and is closed under the operation $\Psi_1(x)$. This subclass ($\mathfrak{J}'$) has the property that every function Ψ_i, when applied to elements of $\mathfrak{J}'$, again yields elements of $\mathfrak{J}'$. For this holds of Ψ_1 by the definition of $\mathfrak{J}'$, and by (18′), (19′), and (20′) it carries over from Ψ_i with smaller subscripts to Ψ_i with larger ones. The functions that result from the Ψ_i when these are restricted to the domain $\mathfrak{J}'$ of individuals will be denoted by Ψ'_i. All of the formulas (18)–(22) hold for these functions also (when we replace 0 by a and Φ_i by Ψ'_i).

Because (21) holds for Ψ'_1 and a, we can map the individuals of $\mathfrak{J}'$ one-to-one onto the natural numbers in such a manner that a goes over into 0 and the function Ψ'_1 into the successor function Φ_1. But by this mapping the functions Ψ'_i go over into the functions Φ_i; and, since (22) holds for Ψ'_n and a,

$$(x)[\Phi_n(x) = 0],$$

that is, $(x)[\Phi(x) = 0]$, holds, which was to be proved.[61]

Since (for each particular F) the argument leading to Theorem X can be carried out in the system P, it follows that any proposition of the form $(x)F(x)$ (with recursive F) can in P be proved equivalent to the proposition that states about the corresponding formula of the r. f. c. that it is satisfiable. Hence the undecidability of one implies that of the other, which proves Theorem IX.[62]

4

The results of Section 2 have a surprising consequence concerning a consistency proof for the system P (and its extensions), which can be stated as follows:

[61]Theorem X implies, for example, that Fermat's problem and Goldbach's problem could be solved if the decision problem for the r. f. c. were solved.

[62]Theorem IX, of course, also holds for the axiom system of set theory and for its extensions by recursively definable ω-consistent classes of axioms, since there are undecidable propositions of the form $(x)F(x)$ (with recursive F) in these systems too.

Discussion on providing a foundation for mathematics (*1931a*)

* * *

According to the formalist view one adjoins to the meaningful propositions of mathematics transfinite (pseudo-)assertions, which in themselves have no meaning, but serve only to round out the system, just as in geometry one rounds out a system by the introduction of points at infinity. This view presupposes that, if one adjoins to the system S of meaningful propositions the system T of transfinite propositions and axioms and then proves a theorem of S by making a detour through theorems of T, this theorem is also contentually correct, hence that through the adjunction of the transfinite axioms no contentually false theorems become provable. This requirement is customarily replaced by that of consistency. Now I would like to point out that one cannot, without further ado, regard these two demands as equivalent. For, if in a consistent formal system A (say that of classical mathematics) a meaningful proposition p is provable with the help of the transfinite axioms, there follows from the consistency of A only that not-p is not formally provable *within* the system A. Nonetheless it remains conceivable that one could ascertain not-p through some sort of contentual (intuitionistic) considerations that are *not* formally representable in A. In that case, despite the consistency of A, there would be provable in A a proposition whose falsity one could ascertain through finitary considerations. To be sure, as soon as one interprets the notion "meaningful proposition" sufficiently narrowly (for example, as restricted to finitary numerical equations), something of that kind cannot happen. However, it is quite possible, for example, that one could prove a statement of the form $(Ex)F(x)$, where F is a finitary property of natural numbers (the negation of Goldbach's conjecture, for example, has this form), by the transfinite means of classical mathematics, and on the other hand could ascertain by means of contentual considerations that all numbers have the property not-F; indeed, and here is precisely my point, this would still be possible even if one had demonstrated the consistency of the formal system of classical mathematics. For of no formal system can one affirm with certainty that all contentual considerations are representable within it.

* * *

(Assuming the consistency of classical mathematics) one can even give examples of propositions (and in fact of those of the type of Goldbach or Fermat) that, while contentually true, are unprovable in the formal system of classical mathematics. Therefore, if one adjoins the negation of such a proposition to the axioms of classical mathematics, one obtains a consistent system in which a contentually false proposition is provable.

* * *

Postscript

I have been invited by the editors of *Erkenntnis* to give a synopsis of the results of my *1931*, which has recently appeared in *Monatshefte für Mathematik und Physik 38*, but was not yet available at the time of the Königsberg conference. That paper deals with problems of two kinds, namely: (1) the question of the completeness (decidability) of formal systems of mathematics; (2) the question of consistency proofs for such systems. A formal system is said to be complete if every proposition expressible by means of its symbols is formally decidable from the axioms, that is, if for each such proposition A there exists a finite chain of inferences, proceeding according to the rules of the logical calculus, that begins with some of the axioms and ends with the proposition A or the proposition not-A. A system $\mathfrak{S}$ is said to be complete with respect to a certain class of propositions $\mathfrak{K}$ if at least every statement of $\mathfrak{K}$ is decidable from the axioms of $\mathfrak{S}$. What is shown in the work cited above is that there is no system with finitely many axioms that is complete even with respect only to arithmetical propositions.[1] Here by "arithmetical propositions" are to be understood those propositions in which no notions occur other than $+$, $\cdot$, $=$ (addition, multiplication, identity, with respect to just the natural numbers), as well as the logical connectives of the propositional calculus and, finally, the universal and existential quantifiers, restricted, however, to variables whose domains are the natural numbers. (In arithmetical propositions, therefore, no variables other than those for natural numbers can occur at all.) Even in systems that have infinitely many axioms, there are always undecidable arithmetical propositions if only the "axiom scheme" satisfies certain (very general) assumptions. In particular, it follows from what has just been said that in all the well-known formal systems of mathematics—for example, *Principia mathematica* (together with the axioms of reducibility, choice and infinity), the Zermelo–Fraenkel and von Neumann axiom systems for set theory, and the formal systems

[1]Under the assumption that no false (that is, contentually refutable) arithmetical propositions are derivable from the axioms of the system in question.

represent an aspect of objective reality, but, as opposed to the sensations, their presence in us may be due to another kind of relationship between ourselves and reality.

However, the question of the objective existence of the objects of mathematical intuition (which, incidentally, is an exact replica of the question of the objective existence of the outer world) is not decisive for the problem under discussion here. The mere psychological fact of the existence of an intuition which is sufficiently clear to produce the axioms of set theory and an open series of extensions of them suffices to give meaning to the question of the truth or falsity of propositions like Cantor's continuum hypothesis. What, however, perhaps more than anything else, justifies the

[40] Note that there is a close relationship between the concept of set explained in footnote 14 and the categories of pure understanding in Kant's sense. Namely, the function of both is "synthesis", i.e., the generating of unities out of manifolds (e.g., in Kant, of the idea of *one* object out of its various aspects).

acceptance of this criterion of truth in set theory is the fact that continued appeals to mathematical intuition are necessary not only for obtaining unambiguous answers to the questions of transfinite set theory, but also for the solution of the problems of finitary number theory[41] (of the type of Goldbach's conjecture),[42] where the meaningfulness and unambiguity of the concepts entering into them can hardly be doubted. This follows from the fact that for every axiomatic system there are infinitely many undecidable propositions of this type.

It was pointed out earlier (page 265) that, besides mathematical intuition, there exists another (though only probable) criterion of the truth of mathematical axioms, namely their fruitfulness in mathematics and, one

1974. But for the usual systems and the various non-constructive extensions that have been considered, it is both much more natural and of greater generality to follow the lead of *Löb 1955*, in which quite elegant abstract derivability conditions (modifying those of Hilbert and Bernays) proved to be the appropriate means for settling the status of various self-referential statements and reflection principles in such systems. Löb's results have been put in an even more general logical context through the work of Solovay (*1976*) on the completeness of certain modal logics under the provability interpretation of the necessity operator.[j] Still, to study the question of applicability of Löb's derivability conditions, one must consider how formal systems may be presented within themselves. Here, as Kreisel has often stressed (see for example his *1965*, page 154), dealing with the question of what constitutes a *canonical presentation* of a formal system becomes the central concern. One solution has been provided in *Feferman 1982*.

One final technical point concerns incompleteness theorems for systems (much) weaker than arithmetic, for example those such as *PRA* which are quantifier-free. Gödel points out that his "most general" version of the second incompleteness theorem can be extended to apply to such systems. For the technical tools needed to deal with related versions of the theorem, see *Jeroslow 1973*.

Solomon Feferman

Remark 2

This remark begins with what Gödel terms "another version of the first undecidability theorem", which concerns the degree of complexity (or "complication", in Gödel's words) of axioms needed to settle problems of "Goldbach type" of high complexity. Gödel had also referred to problems of this type in *1964*, and he explained there (in footnote 42) that by such he meant "universal propositions about integers which can be decided in each individual instance".[k] Most generally, then, such propositions are statements of the form $\forall x R(x)$ with R general recursive (or effectively decidable, by Church's thesis). It is shown in recursion theory that every such statement is equivalent to one of the same form with R primitive recursive, and by definition these comprise the class of Π^0_1 statements. In fact, it is known through the work of

[j] See also *Boolos 1979*.

[k] See p. 269 above. Goldbach's own statement, dating from his 1742 letter to Euler, is the still unsettled conjecture that every even integer is the sum of two primes. (For Goldbach and Euler, 1 was a prime.)

Matiyasevich that every Π_1^0 statement is equivalent to one of the form $\forall x_1 \ldots \forall x_n[p(x_1,\ldots,x_n) \neq q(x_1,\ldots,x_n)]$, where p and q are polynomials with integer coefficients and $n \leq 13$.[l]

Gödel here takes the degree of complexity $d(A)$ of a formula A (in a given language) to be the number of basic symbols occurring in it. In other words, if, for a given basic stock of symbols $s_1,\ldots,s_m$, the formula is written as a concatenation $A = s_{i_1}\ldots s_{i_k}$, then $d(A)$ is defined to be k. For S a finite set of (distinct) formulas $A_1,\ldots,A_n$, considered as a system of non-logical axioms, the degree $d(S)$ is defined to be $d(A_1) + \cdots + d(A_n) + (n-1)$. The theorem stated informally by Gödel is that in order to solve all problems A of Goldbach type of a "certain" degree k, one needs a system of axioms S with degree $d(S) \geq k$, "up to a minor correction". It is not clear what kind of minor correction Gödel intended here, so we do not know just how he would have stated this as a precise result. After examining this question more closely, the authors have arrived at some results of the same character as Gödel's, but not quite as strong as what would be suggested by a first reading of his assertion; we have not, however, been able to establish the latter itself. These various statements and their status are explained as follows.

Let $\mathcal{L}$ be a language with a finite stock $s_1,\ldots,s_m$ of basic symbols, including logical symbols such as '$\neg$', '$\wedge$', '$\forall$', a constant symbol '$\boldsymbol{0}$', the successor symbol '$'$', a means for systematically forming variable symbols 'v_i' for $i = 0,1,2,\ldots$ from the basic symbols,[m] the equality symbol '=', and parentheses '(', ')'. $\mathcal{L}$ should also contain symbols, either directly or by definition, for a certain number of primitive recursive functions $f_0,\ldots,f_j$, where f_0 and f_1 are $+$ and $\cdot$, respectively. It is assumed that we have a consistent finite axiom system S_0 in $\mathcal{L}$ which contains (or proves) defining equations for $f_0,\ldots,f_j$, and enough of the axiom system of primitive recursive arithmetic for these functions in order to carry out Gödel's first incompleteness theorem. In particular, S_0 should be consistent and complete for Σ_1^0 sentences (and hence correct for Π_1^0 sentences). For the assertion of Gödel's being examined here, only those systems S are considered which are consistent and contain S_0. Then the following theorem can be proved:

[l]See *Davis, Matiyasevich and Robinson 1976*. Matiyasevich later showed that one could take $n \leq 9$; see his *1977*.

[m]One obvious way to do this is to identify v_i with $v\underbrace{\boldsymbol{0}''\ldots'}_{i}$ where 'v' is a new basic symbol; this makes $d(v_i) = i+2$. However, there are somewhat more efficient ways of building v_i from basic symbols, so that $d(v_i) = \log_2 i + O(\log_2 \log_2 i)$; we shall assume that such an encoding is being used in the discussion that follows.

(∗) There are positive integers c_1, c_2 such that for all $k > c_2$ and $k_1 = (k - c_2)/c_1$, no finite consistent extension S of S_0 with $d(S) \leq k_1$ proves all true Π^0_1 statements A having $d(A) \leq k$.

The proof of (∗) rests on an examination of Gödel's construction in his *1931* (for the first incompleteness theorem) of a true Π^0_1 statement G_S which is not provable from S for any finite consistent S extending S_0. G_S can be regarded as a statement which expresses that $\mathrm{Conj}(S) \rightarrow G_S$ is not logically provable, where $\mathrm{Conj}(S) = A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ for $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$. This construction is uniform in S; that is, for a suitable Π^0_1 formula $B(v_0)$ with at most v_0 free, we have G_S equivalent to $B(\ulcorner \mathrm{Conj}(S) \urcorner)$, where $\ulcorner \mathrm{Conj}(S) \urcorner$ is the numeral in $\mathcal{L}$ for a Gödel number of $\mathrm{Conj}(S)$. Using this, it may be shown that G_S can be chosen with $d(G_S) \leq c_1 d(S) + c_2$, where c_1 is a constant depending on the efficiency of the Gödel numbering of expressions. It turns out that one can take $c_1 = [\log_2 m] + 1$, where m is the number of basic symbols in $\mathcal{L}$.[n] For the usual logical systems m is between 8 and 16, hence $c_1 = 4$. But a first reading of Gödel's assertion under consideration would put $c_1 = 1$ in (∗); call that assertion (‡). (If (‡) holds, Gödel's "minor correction" would simply be c_2.)

The remainder of Gödel's remark does not depend essentially on whether one can obtain (‡) or not, but only that we at least have (∗). For Gödel's way of measuring complexity, the crucial thing is that the degree of complexity of axiom systems needed to establish true Π^0_1 sentences A increases roughly in direct proportion c_1 to the complexity of A, where c_1 is small.

We now pass from these technical questions to Gödel's discussion of their significance. This shifts, in effect, to systems of set theory. The reason is that all of present-day mathematics can be formalized in a relatively simple finite system S_1 of set theory (for example, the Bernays–Gödel system of sets and classes). According to Gödel, it follows from the result (‡), or (∗), that in order to solve problems of Goldbach type which can be formulated in a few pages, the axioms of S_1 "will have to be supplemented by a great number of new ones or by axioms of great complication." Naturally, one would be led to accept as axioms only those statements that are recognized to be evident, though not necessarily immediately so for the intended interpretation (that being, in the case of BG, sets in the cumulative hierarchy together with arbitrary classes of sets). Thus Gödel says that one may be led to doubt "whether evident

[n]Gödel's own numbering of expressions in *1931* is rather inefficient and gives a comparatively large value for c_1. The proof that $c_1 = [\log_2 m] + 1$ suffices relies particularly on the more efficient coding of variables mentioned in footnote m.

axioms in such great numbers (or of such great complexity) can exist at all, and therefore the theorem mentioned might be taken as an indication for the existence of mathematical yes or no questions undecidable for the human mind."

In response to such doubts, Gödel points out "the fact that there *do* exist unexplored series of axioms which are analytic in the sense that they only explicate the content of the concepts occuring in them". As his main example, he cites the axioms of infinity in set theory, "which assert the existence of sets of greater and greater cardinality or of higher and higher transfinite types" and "which only explicate the content of the general concept of set." Here Gödel repeats ideas broached in *1947* and more fully in its revised version *1964*.[o] There he said that the axioms for set theory "can be supplemented without arbitrariness by new axioms which only unfold the concept of set ..." (*1964*, page 264). Moreover, the axioms of set theory are recognized to be correct by a faculty of mathematical intuition, which Gödel says is analogous to that of sense perception of physical objects: "... we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true" (*1964*, page 271). He goes on to note there that "mathematical intuition need not be conceived of as a faculty giving an *immediate* knowledge of the objects concerned." In *1964* that point is elaborated by reference to Kantian philosophy. But at the end of the present remark, Gödel puts the matter in a way that is supported by the working experience of set theorists who have been led to accept axioms of infinity, namely: "These principles show that ever more (and ever more complicated) axioms appear during the development of mathematics. For, in order only to understand the axioms of infinity, one must first have developed set theory to a considerable extent." The implicit but unstated conclusion of all this is that such axioms of increasing complexity can be used to settle more and more complicated problems of "Goldbach type". In other words, *despite* results such as (∗) (or even (‡), if true) "mathematical yes or no questions undecidable for the human mind" need *not* exist, in principle.

There is one essential difference of aim in the discussions of *1964* and of the present remark, concerning the possible utility of axioms of infinity. In *1964*, Gödel thought that such axioms could be used to decide *CH*, whereas here he aims to use them to solve number-theoretic problems. The study of the so-called axioms of infinity goes back to Hausdorff (*1908*), followed by several publications by Mahlo (*1911, 1912, 1913*). After that, there was only scattered work in the subject until the late

[o]See particularly *1964*, pp. 264–265 and 271–272. Gödel first touched on axioms of infinity in footnote 48a of his *1931* and in *1932b*.

Some remarks on the undecidability results
(*1972a*)

1. *The best and most general version of the unprovability of consistency in the same system.*[1] Under the sole hypothesis that Z (number theory) is recursively one-to-one translatable into S, with demonstrability preserved in this direction, the consistency (in the sense of non-demonstrability of both a proposition and its negation), even of very strong systems S, *may* be provable in S, and even in primitive recursive number theory. However, what can be shown to be unprovable in S is the fact that the rules of the equational calculus applied to equations demonstrable in S between primitive recursive terms yield only correct numerical equations (provided that S possesses the property which is asserted to be unprovable). Note that it is necessary to prove this "outer" consistency of S (which for the usual systems is trivially equivalent with consistency) in order to "justify" the transfinite axioms of a system S in the sense of Hilbert's program. ("Rules of the equational calculus" in the foregoing means the two rules of substituting primitive recursive terms for variables and of substituting one such term for another one to which it has been proved equal.)

This theorem remains valid for much weaker systems than Z. With insignificant changes in the wording it even holds for any recursive translation of the primitive recursive equations into S.

2. *Another version of the first undecidability theorem.* The situation may be characterized by the following theorem: In order to solve all problems of Goldbach type of a certain degree of complication k one needs a system of axioms whose degree of complication, up to a minor correction, is $\geq$ k (where the degree of complication is measured by the number of symbols necessary to formulate the problem (or the system of axioms), of course with inclusion of the symbols occurring in the definitions of the non-primitive terms used). Now all of present day mathematics can be derived from a handful of rather simple axioms about a very few primitive terms. Therefore, even if only those problems are to be solvable which can be formulated in a few pages, the few simple axioms being used today will have to be supplemented by a great number of new ones or by axioms of great complication. It may be doubted whether evident axioms in such great numbers (or of such great complexity) can exist at all, and therefore the theorem mentioned might be taken as an indication for the existence of mathematical yes or no questions undecidable for the human mind. But

[1]This has already been published as a remark to footnote 1 of the translation (*1967*, p. 616) of my *1931*, but perhaps it has not received sufficient notice.

Vienna, 19 October 1930

Dear Mr. Behmann,

Dr. Gödel is right now with me and he raises the following objections against my constructivity claim and your proof of it:

He claims to be able to construct examples where clearly an existential claim is proved although one cannot give a construction. The simplest example mentioned by Gödel—which also serves in principle as representative for all the remaining examples—is the following:

Let there be given a one-to-one mapping between the natural numbers and certain rational numbers from the interval $(0, 1)$. Then one can prove in the usual fashion that the given sequence of rational numbers has an accumulation point, although it would not in general be possible to give it explicitly. Let us consider an example where one certainly cannot give an accumulation point explicitly. A number is called Goldbachian if all smaller even numbers are sums of two prime numbers. The sequence of rational numbers is now defined as follows: if n is Goldbachian the number $1/n$ is associated to it; if n is not Goldbachian the number $1 - 1/n$ is associated to it. Then one can prove that this sequence has an accumulation point (and indeed a rational one), that is, either 0 or 1. However, without a solution of Goldbach's problem no accumulation point can be given explicitly.

Gödel has also discussed the issue with Carnap who finds the objection made by Gödel very plausible.

I would be very grateful if you could let me know your reaction to this objection, and in the meantime I will also rack my brains over it.

Gödel also adds that although in this case it is a question of a disjunction between two possibilities, this is not essential; the disjunction between infinitely many cases could also remain undecided.

With most cordial greetings,

Yours,

Felix Kaufmann

Vienna, 19 October 1930

Postscript

Despite the objections presented, I do not doubt at all the correctness of the constructivity theorem. It seems to me that the way to invalidate the objections made lies in the direction that one shows that, in the case where the existential claim resolves into a disjunction of claims, there is no longer an existential claim at all after terminological abbreviations

Introductory note to *1932*

In this short note on intuitionistic propositional logic (**H**),[a] Gödel shows that

(1) **H** cannot be viewed as a system of many-valued logic[b]

(that is to say, we cannot find a finite set M of truth values, with a subset $D \subset M$ of designated values, plus an interpretation of $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ by binary operations on M and an interpretation of $\neg$ by a unary operation on M, such that $\mathbf{H} \vdash A$ if and only if, for all valuations ϕ in M, $\phi(A) \in D$) and that

(2) there is an infinite descending chain of logics intermediate in strength between **A** (classical propositional logic) and **H**.

From Gödel's argument one sees that one can take for this chain

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_2 \supset \mathbf{L}_3 \supset \mathbf{L}_4 \supset \ldots,$$

where $\mathbf{L}_n$ is the set of propositional formulas identically valid on the

[a]For the formal systems designated by A and H in Gödel's text we use bold face **A** and **H**, respectively, for greater typographical clarity.

[b]For an introduction to many-valued logics, see, e.g., *Rautenberg 1979*, Chapter III.

Zum intuitionistischen Aussagenkalkül (*1932*)

[In Beantwortung einer von Hahn aufgeworfenen Frage] für das von A. Heyting[1] aufgestellte System H des intuitionistischen Aussagenkalküls gelten folgende Sätze:

[1] *Heyting 1930*.

n-element linearly ordered Heyting algebra (pseudo-Boolean algebra). A finite axiomatization of $\mathbf{L}_n$ ($n \geq 2$) was first given by I. Thomas (*1962*), based on Dummett's (*1959*) axiomatization of the logic **LC** of tautologies on the linear Heyting algebra of order type ω. **LC** can be axiomatized by adding to **H** the axiom $(P \to Q) \vee (Q \to P)$, or, equivalently, the following characterization of $\vee$:

$$(A \vee B) \leftrightarrow [((A \to B) \to B) \wedge ((B \to A) \to A)].$$

$\mathbf{L}_n$ is then axiomatizable as $\mathbf{LC} + F_{n+1}$, where F_{n+1} is as defined in Gödel's note.

It is to be noted that (1) is in fact a consequence of (2), since it is not difficult to show that any propositional logic characterized by a finite set of truth values (in the sense indicated above) and containing **H** has only finitely many proper strengthenings.

Gödel's second result may be regarded as the first contribution to the topic of intermediate propositional logic.[c]

In the last line of his note Gödel stated the disjunction property for **H**; a proof was given by Gentzen in his *1935*.

A. S. Troelstra

[c]There is now an extensive literature on the subject. A survey of the literature up till 1970 may be found in *Hosoi and Ono 1973*. *Minari 1983* presents an extensive bibliography with historical comments. The reasons for studying intermediate logics are mainly technical; for example, intermediate logics give rise to interesting algebraic theories.

On the intuitionistic propositional calculus (*1932*)

[Answer to a question posed by Hahn:] For the system H, set up by Heyting,[1] of the intuitionistic propositional calculus the following theorems hold:

[1] *Heyting 1930.*

I. *There is no realization with* finitely *many elements (truth values) for which the formulas provable in H, and only those, are satisfied (that is, yield designated values for an arbitrary assignment).*

II. *Infinitely many systems lie between H and the system A of the ordinary propositional calculus, that is, there is a monotonically decreasing sequence of systems all of which include H as a subset and are included in A as subsets.*

The proof results from the following facts: Let F_n be the formula

$$\sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_i \supset\subset a_k),$$

where Σ denotes the iterated $\vee$-connective and the a_i are propositional variables. F_n is satisfied in every realization with fewer than n elements in which all formulas provable in H are satisfied. For, with every assignment, a_i and a_k are replaced by the same element e in at least one of the summands of F_n, and $e \supset\subset e \,.\vee\, b$ yields a designated value for arbitrary b, since the formula $a \supset\subset a \,.\vee\, b$ is provable in H. Further, let S_n be the following realization:

$$\begin{gathered}
\text{Elements: } \{1, 2, \ldots, n\}; \text{ designated element: } 1; \\
a \vee b = \min(a, b); \quad a \wedge b = \max(a, b); \\
a \supset b = 1 \text{ for } a \geq b; \quad a \supset b = b \text{ for } a < b; \\
\neg a = n \text{ for } a \neq n, \quad \neg n = 1.
\end{gathered}$$

Then, for S_n, all formulas of H and the formula F_{n+1}, as well as all F_i with greater subscript, are satisfied, while F_n, as well as all F_i with smaller subscript, are *not* satisfied. In particular, it follows that *no* F_n is provable in H. Besides, the following holds with full generality: a formula of the form $A \vee B$ can only be provable in H if either A or B is provable in H.

Une interview de Lawvere au sujet des catégories

Vous avez écrit un article, publié pour la première fois en 1986, intitulé "Prendre les catégories au sérieux"[1] *Pourquoi devrions-nous prendre les catégories au sérieux ?*

Dans tous les domaines dans lesquels la théorie des catégories est activement utilisée, le concept catégorique de foncteur adjoint s'est avéré remplir un rôle-clé. Un tel instrument universel pour guider l'apprentissage, le développement et l'utilisation des mathématiques avancées est également indiqué dans des domaines tels que les mathématiques scolaires et au collège, dans les relations les plus basiques entre l'espace et le nombre, et dans les calculs basés sur ces relations. En disant "Prenez les catégories au sérieux", je voulais exprimer le fait que l'on pourrait rechercher, cultiver et enseigner des exemples utiles de nature élémentaire.

La relation entre enseignement et recherche s'incarne en partie dans des concepts généraux simples qui peuvent guider l'élaboration d'exemples dans les deux cas. Les notions et les constructions, comme l'analyse spectrale des systèmes dynamiques, ont des aspects importants qui peuvent être compris et poursuivis sans les complications dues au fait de devoir limiter les modèles à des catégories spécifiques classiques. L'application de quelques concepts généraux simples de la théorie des catégories peut permettre de passer d'une clarification des constructions de base sur les systèmes dynamiques à une construction du système des nombres réels avec sa structure de catégorie fermée ; appliquée à cette catégorie fermée particulière, la théorie des catégories générale enrichie amène inexorablement aux théorèmes et notions de complétude de Cauchy, rotation, fermeture convexe, rayon et distance géodésique pour les systèmes métriques arbitraires. En fait, ces dernières notions se présentent elles-mêmes sous une forme telle que les calculs de l'analyse élémentaire et de la géométrie peuvent être explicitement guidés par l'expérience qui est concentrée dans le concept d'adjonction. Il semble certain que cette approche, combinée avec une application sobre de l'origine historique de toutes ces notions, pourra être appliquée à de nombreux exemples, unifiant ainsi nos efforts dans l'enseignement, la recherche et l'application des mathématiques.

Je crois également que nous devrions prendre au sérieux les précurseurs historiques de la théorie des catégories tels que Grassman, dont le travail est très clair, contrairement à sa réputation d'être obscur.

Pourriez-vous mentionner d'autres précurseurs historiques de la théorie des catégorie que Grassman, Emmy Noether et Heinz Hopf, que Mac Lane avait l'habitude de souvent citer ?

La méthode axiomatique implique de se concentrer sur les caractéristiques clés des applications courantes. Par exemple, Cantor s'est concentré sur le concept d'isomorphisme, qu'il a extrait du travail de Jakob Steiner en géométrie algébrique. La connexion entre Cantor et Steiner n'est pas mentionnée dans la plupart des livres ; il y a une malheureuse tendance dans les travaux standards d'histoire des sciences à perpétuer certains mythes, plutôt que de découvrir et clarifier les analyses conceptuelles. Le principe indispensable de "l'univers du discours" s'est raffiné dans l'idée de structure amenée par celle d'ensemble abstrait, impliquant de longues chaînes de raisonnement plus concevables par l'idée qu'"il n'y a rien dans la conclusion qui ne soit déjà dans les prémisses". Cette vision a été développée par Dedekind, Hausdorff, Fréchet, et d'autres mathématiciens du 20ème siècle.

En plus des portraits des inventeurs de la théorie des catégories, Eilenberg et Mac Lane, la couverture de notre livre "Ensembles pour les Mathématiques", écrit en collaboration avec Robert Rosebrugh, contient les portraits de Cantor et Dedekind.

Le cœur des théories mathématiques est dans la variation de la quantité dans l'espace et dans l'émergence de la qualité là-dedans. Les branches fondamentales, telles que la géométrie différentielle et la théorie de la mesure géométrique donne naissance aux deux grandes disciplines auxiliaires que sont la topologie algébrique et l'analyse fonctionnelle. Un grand élan à leur cristallisation a été la théorie électromagnétique de Maxwell-Hertz-Heaviside et la science des matériaux de Maxwell-Boltzmann. Ces deux disciplines ainsi que ces applications ont été rendues explicites dans le travail de Volterra. Comme noté par de Rham à l'adresse de Narasimhan, c'est Volterra qui, dans les années 1880, non seulement a prouvé que l'opérateur dérivé extérieur satisfait $d^2 = 0$, mais il a également prouvé un théorème d'existence local auquel on fait habituellement référence de manière inexacte en l'appelant le lemme de Poincaré ; ces résultats restent au

1. Revue Colombienne de Mathématiques 20 (1986) 147-178. Réimprimé dans *Repr. Theory Appl. Categ.* 8 (2005) 1-24 (version électronique).

cœur de la topologie algébrique comme cela s'exprime dans le théorème de De Rham et dans la cohomologie des faisceaux.

Habituellement, la catégorie codomaine d'un foncteur quantitatif sur X est une catégorie $\mathrm{Mod}(X)$ de structures linéaires dans X lui-même ; ainsi, c'est de façon plus basique la nature des catégories X des espaces, que de tels systèmes de nombres ont comme domaines, qui a besoin d'être clarifiée. En se concentrant sur les contributions de Volterra, Hadamard, Fox, Hurewicz et d'autres pionniers, nous arrivons à l'importante idée générale que de telles catégories devraient être des catégories cartésiennes fermées. Par exemple, l'axiome puissance ensembliste des ensembles est une manifestation de cette idée, en notant qu'elle n'est pas justifiée par les éléments afférents à la théorie ensembliste à propos de l'itération des ordinaux, des formules, etc., puisqu'elle doit, comme l'axiome d'infinité, carrément être supposée en plus. Hurewicz était, comme Eilenberg, un topologiste Polonais, et son travail sur les groupes d'homotopie, présenté lors d'une conférence à Moscou, était également pionnier ; sa conférence trop peu connue de 1949 sur les k-espaces, est le premier effort majeur, toujours utilisé par les topologues algébristes et par les analystes, de remplacer la catégorie par "défaut" des espaces topologiques par une catégorie fermée cartésienne plus utile.

En parlant de Volterra, cela me rappelle que vous avez énoncé un jour quelque part[2] *le travail du mathématicien portugais J. Sebastiao e Silva. Pourriez-vous nous en parler ?*

Silva a été l'un des premiers à reconnaître l'importance des espaces bornologiques comme un paradigme pour l'analyse fonctionnelle. Il a ainsi anticipé le travail de Waelbroeck sur l'analyse fonctionnelle lisse et a préparé le chemin pour le travail de Douady et Houzel sur le théorème de finitude de Grauert pour les fonctions propres des espaces analytiques. De plus, malgré mon peu de portugais, je discerne un hommage à la relation proche entre la recherche et l'enseignement dans un esprit que je partage.

Où la théorie des catégories prend-elle son origine ?

Le besoin d'unifier et de simplifier pour rendre cohérents certaines des avancées mathématiques des années 30 ont amené Eilenberg et Mac Lane à concevoir la théorie des catégories, foncteurs et transformations naturelles au début des années 40. La théorie des catégories est apparue pour la première fois dans leur article GTNE[3], avec le besoin de guider les calculs compliqués nécessitant un passage à la limite dans l'étude du saut qualitatif séparant les espaces des objets homotopiques / homologiques. Depuis lors, la théorie est toujours utilisée pour ces problèmes mais également en géométrie algébrique, logique et théorie des ensembles, théorie des modèles, analyse fonctionnelle, physique du continu, combinatoire, etc.

Mac Lane est entré dans le domaine de la topologie algébrique par l'entremise de son ami Samuel Eilenberg. Ensemble, ils ont construit les célèbres espaces d'Eilenberg-Mac Lane, qui "représentent la cohomologie". Ce résultat plutôt technique de géométrie et algèbre nécessite en fait plusieurs avancées méthodologiques frappantes :

(a) la cohomologie est un "foncteur", une sorte de dépendance spécifique au changement de l'espace domaine ;

(b) la catégorie sur laquelle ces foncteurs sont définis a comme fonctions non pas les fonctions continues habituelles, mais plutôt les classes d'équivalences de telles fonctions, où les déformations arbitraires continues des fonctions servent à établir les équivalences ; et

(c) bien que dans toute catégorie, tout objet fixé K détermine un foncteur spécial "représentable" qui assigne, à tout X, l'ensemble $[X, K]$ des fonctions de X dans K, la plupart des foncteurs ne sont pas de cette forme et ainsi, il est remarquable que les foncteurs cohomologiques particuliers intéressants s'avèrent être isomorphes à $H^*(X) = [X, K]$ mais seulement pour la catégorie d'Hurewicz (b) et seulement pour les espaces K du type construit pour H^* par Eilenberg et Mac Lane.

Toutes ces avancées dépendaient des concepts de catégorie et foncteur, inventés aux alentours de 1942 par les collaborateurs. Même si la notion de catégorie elle-même avait été rendue explicite, ce résultat rendit apparent le fait que les catégories "concrètes", dans lesquelles les applications sont déterminées par leurs valeurs sur des points, ne suffisaient pas.

2. F. W. Lawvere, Volterra's functionals and covariant cohesion of space, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, serie II, 64 (2000) 201-214.
3. S. Eilenberg et S. Mac Lane, *General Theory of Natural Equivalences (GTNE)*, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945) 231-294.

Déjà dans GTNE, il fut noté qu'un ensemble préordonné est juste une catégorie avec au plus un morphisme entre toute paire donnée d'objets, et que les foncteurs entre deux telles catégories sont juste les applications préservant l'ordre ; à l'extrême opposé, un monoïde est juste une catégorie avec exactement un objet, et les foncteurs entre deux telles catégories sont juste des homomorphismes de monoïdes. Mais la théorie des catégories ne consiste pas simplement en une classification dans l'esprit de la métaphysique wolfienne (bien qu'un petit nombre de praticiens puissent faire cela) ; c'est plutôt la mutabilité des structures mathématiques précises (par les morphismes) qui est le contenu essentiel de la théorie des catégories). Si les structures sont elles-mêmes des catégories, cette mutabilité est exprimée par les foncteurs, alors que si les structures sont des foncteurs, la mutabilité est exprimée par les transformations naturelles.

Le New York Times, dans son éloge mortuaire d'Eilenberg en 1998 a complètement omis son rôle dans le développement de la théorie des catégories.

Oui, et l'injustice a été un peu moindre à l'occasion de l'hommage quand Mac Lane est décédé, lorsque le Times a rendu compte de son décès.

Dans une lettre au NYT en février 1998, écrite conjointement avec Peter Freyd, vous vous plaignez de cette omission notable. Dans cette lettre, vous insistez sur le fait que la "découverte d'Eilenberg-Mac Lane en 1945 de la théorie des transformations entre catégories mathématiques a fourni les outils sans lesquels les importantes collaborations de Sammy avec Steenrod et Cartan n'auraient pas été possible. Ce travail commun a également amené la base du travail pionnier de Sammy en informatique théorique ainsi que de nombreux développements dans la foulée en géométrie, algèbre, et au sujet des fondements des mathématiques. En particulier, la théorie d'Eilenberg-Mac Lane des catégories était indispensable au développement, en 1960, par le mathématicien français Alexander Grothendieck, de la forme puissante de la géométrie algébrique qui a été un ingrédient dans plusieurs avancées en théorie des nombres, incluant le travail de Wiles sur le théorème de Fermat". Pourriez-vous nous donner une large justification de la raison pour laquelle la théorie des catégories est si utile ?

Chaque jour des activités humaines comme construire une maison sur une colline, concevoir un réseau téléphonique, naviguer dans le système solaire, nécessite des plans qui sont corrects. Planifier de tels systèmes nécessite le développement de la pensée à propos de l'espace. Chaque développement nécessite de nombreuses étapes de pensée et beaucoup sont liées à des constructions géométriques sur des espaces. À cause de cette nature nécessairement multi-étapes de la pensée à propos de l'espace, seules des mesures mathématiques doivent être effectuées pour que le système soit fiable. Seuls des principes explicites de pensée (logique) et des principes explicites d'espace (géométrie) peuvent garantir une telle fiabilité. Cette grande avancée faite par la théorie inventée il y a 60 ans par Eilenberg et Mac Lane a permis de rendre les principes de la logique et de la géométrie explicites ; cela a été accompli en découvrant la forme commune de la géométrie et de la logique de telle manière que la relation entre les deux soit aussi explicite. Ils ont résolu un problème ouvert 2300 ans avant par Aristote avec ses recherches initiales pour rendre explicites les catégories et les concepts. Au 21$^{\text{ème}}$ siècle, leur solution est applicable non seulement à la géométrie plane et au syllogisme médiéval, mais également aux espaces de transformations de dimension infinie, aux "espaces" de données, et à d'autres outils conceptuels qui sont appliqués des milliers de fois par jour. La forme des principes à la fois de la logique et de la géométrie ont été découverts par des catégoriciens pour reposer sur la "naturalité" des transformations entre les espaces et les transformations dans la pensée.

Quels sont vos souvenirs de Grothendieck ? Quand l'avez-vous rencontré pour la première fois ?

Je l'ai rencontré pour la première fois au Congrès International des mathématiciens à Nice en 1970 où nous étions tous les deux conférenciers invités. Je me suis publiquement montré en désaccord avec lui sur quelques points qu'il a présentés dans une conférence séparée sur son mouvement "Survivre", de telle façon qu'il m'appelait (j'espère affectueusement) le "principal contradicteur". En 1973, nous avons tous deux visité en même temps Buffalo, et je me rappelle de façon vivace le cours qu'il m'a donné sur les éclairages basiques de la géométrie algébrique comme "les points ont des automorphismes". En 1981, je lui ai rendu visite dans sa hutte de pierre, au milieu d'un champ de lavande dans le sud de la France, dans le but de lui demander son avis sur le projet de dériver le théorème de Grauert du théorème de Cartan-Serre, en démontrant ce dernier pour un espace analytique compact dans un topos général, puis en spécialisant au topos de faisceaux d'un espace paramètre. Certains ingrédients nécessaires étaient connus, par exemple le fait qu'un espace compact au sens interne devrait correspondre à une application propre vers l'espace paramètre de façon externe. Mais la preuve de ces résultats dépend classiquement de l'analyse fonctionnelle, de telle façon que la théorie des espaces bornologiques aurait dû être faite de façon interne pour réussir. Il a clairement reconnu qu'un tel développement dépendrait de l'utilisation d'un classifieur de sous-objets qui, comme il l'a dit, est l'un des quelques ingrédients de la théorie des topos qu'il n'avait pas prévus. Plus tard dans son travail sur l'homotopie, il a gentiment fait référence à cet objet comme à l'"élément de Lawvere". Ma dernière rencontre avec lui eut lieu au même endroit en 1989 (Aurelio Carboni m'a conduit là depuis Milan) : il était content de me voir, c'était clair, mais ne parlerait pas, à cause d'un vœu religieux ; il a écrit sur un papier qu'il n'avait pas le droit de discuter de mathématiques, bien que rapidement, son âme mathématique triomphe, me laissant avec quelques précieuses notes mathématiques.

Mais la réduction drastique du travail scientifique par un mathématicien aussi grand, due à sa rencontre avec un religieux puissant, est la cause d'une vigilance renouvelée.

Vous êtes né à Indiana. Y avez-vous grandi ?

Oui. On m'a parfois appelé "le fermier d'Indiana".

Vos parents avaient-il un intérêt pour les mathématiques ?

Non. Mon père était fermier.

Vous avez obtenu votre diplôme de premier degré de l'Université d'Indiana en 1960. Merci de nous en dire un peu plus sur votre éducation là-bas. Comment avez-vous appris les catégories ? Nous savons que vous avez commencé comme étudiant de Clifford Truesdell, un expert très connu de mécanique classique[4]

J'ai étudié à l'Université d'Indiana University de 1955 à janvier 1960. J'aimais la physique expérimentale mais je n'appréciais pas le raisonnement imprécis dans certains cours théoriques. Alors j'ai décidé d'étudier d'abord les mathématiques. Truesdell était au département de mathématiques mais il avait de grandes connaissances en physique de l'ingénierie. Il a pris là en charge mon éducation.

Eilenberg avait été un temps à Indiana, mais il était parti en 1947 quand j'avais 10 ans. Ce n'est donc pas d'Eilenberg que j'ai d'abord appris les catégories, ni de Truesdell qui avait abandonné son poste à Indiana en 1950 et qui en 1955 (et ensuite) m'avait conseillé de continuer mes études en mécanique continue et théorie cinétique. C'est un étudiant d'Indiana qui a insisté auprès de moi sur l'importance de la méthode galactique mentionné dans le livre de topologie de J. L. Kelley ; ça semblait trop abstrait au début, mais j'ai appris que "galactique" faisait référence à l'utilisation des catégories et des foncteurs et nous avons discuté de leur potentiel pour unifier et clarifier les mathématiques de toutes sortes. Durant l'été 1958, j'ai étudié la topologie dynamique avec George Whaples, avec comme objectif de la comprendre autant qu'il était possible en termes catégoriques. Quand Truesdell m'a demandé de donner des cours de plusieurs semaines pendant son cours d'Analyse fonctionnelle en 1958-1959, il devint vite apparent que toutes les explications très effectives de sujets tels que les anneaux de fonctions continues et la transformation de Fourier en analyse harmonique abstraite pourraient être fournies en rendant explicite leur fonctorialité et leur naturalité dans le sens précis d'Eilenberg-Mac Lane. En continuant d'étudier la mécanique statistique et la théorie cinétique, à un moment, je découvris le livre de Godement sur la théorie des faisceaux à la bibliothèque et je l'étudiai dans son intégralité. Toute l'année 1959, je développai de moi-même une pensée catégorique et je formulai des programmes de recherche sur l'"amélioration" (dont j'appris plus tard que Kan y avait travaillé plus complètement sous le nom de foncteurs adjoints) et sur les "clusters galactiques" (dont j'appris plus tard que Grothendieck les avait étudiés et appliqués sous le nom de catégories fibrées). Les catégories seraient certainement importantes pour simplifier les fondements de la physique continue. J'en conclus que je ferais de la théorie des catégories la ligne centrale de mes études. La littérature mentionne souvent quelques difficultés mystérieuses sur le fait de baser la théorie des catégories sur la théorie des ensembles traditionnelle : ayant eu un cours sur le livre de Kleene (également avec Whaples) et ayant apprécié de nombreuses discussions avec Max Zorn, dont le bureau était adjacent du mien, j'avais eu une compréhension initiale de la logique mathématique, et j'avais conclu que la solution au problème fondationnel serait de développer une théorie axiomatique de la catégorie des catégories.

Pourquoi avez-vous choisi l'université Columbia pour poursuivre vos études ?

4. C. Truesdell a été le fondateur du journal Archive pour la mécanique rationnelle et l'analyse et pour l'histoire des sciences exactes.

La décision de changer d'école pour le second cycle (avant même d'être diplômé) a nécessité quelques recherches. Quels étaient les experts en théorie des catégories et où donnaient-ils des cours sur ce sujet ? J'ai noté que Samuel Eilenberg apparaissait très fréquemment dans la littérature du domaine, à la fois comme auteur et comme co-auteur avec Mac Lane, Steenrod, Cartan, Zilber. Alors l'université de Columbia était le lieu logique où étudier. En consultant Clifford Truesdell à propos du changement de lieu en question, j'ai été ravi d'apprendre qu'il était un ami personnel de Samuel Eilenberg ; connaissant mon souhait, il appela personnellement Sammy pour faciliter mon entrée à Columbia, et j'envoyais rapidement des documents décrivant mes programmes de recherche à Eilenberg.

La bourse qui a financé ma dernière période à Indiana s'avéra transférable à Columbia. Le département mathématique de Columbia avait contracté un arrangement selon lequel tout étudiant boursier devrait également être assistant d'enseignement. Ainsi je devins assistant professoral pour le cours de calcul de Hyman Bass, i.e. le cours d'algèbre linéaire, jusqu'à janvier 1961.

Quand j'arrivai à New York en février 1960, ma première action a consisté à aller à la librairie française et à m'acheter un exemplaire personnel du Godement. Même si je n'ai pris qu'un cours, d'algèbre homologique, avec Eilenberg, et malgré le fait qu'Eilenberg soit très occupé cette année-là par ses obligations de directeur de département, je pus apprendre une grande partie des catégories de Dold, Freyd, Mitchell, Gray ; avec Eilenberg, je n'eus qu'une seule discussion mathématique sérieuse. Peut-être n'avait-il pas eu le temps de lire mes documents ; quoi qu'il en soit, ce fut un étudiant boursier, Saul Lubkin, qui alors que j'étais à Columbia depuis plusieurs mois, réalisa que ce que j'avais écrit avait déjà été travaillé en détail sous le nom de foncteurs adjoints, et, après avoir discuté avec Eilenberg à ce propos, il me donna une copie du papier de Kan.

En 1960, Eilenberg avait réussi à attirer au moins dix des plus grands contributeurs de la théorie des catégories à Columbia comme étudiants ou enseignants. Ces cours et discussions aidèrent naturellement à rendre plus précise ma conception de la catégorie des catégories, de même que le fit plus tard mon étude de la logique mathématique à Berkeley ; pourtant, la nécessité d'axiomatiser la catégorie des catégories était déjà évidente pour moi pendant que j'étudiais Godement à Indiana.

Quelques mois plus tard, alors que Mac Lane était en visite à New York, Sammy me présenta à Saunders, décrivant mon programme en plaisantant comme le programme surprenant des "ensembles sans points".

Dans son autobiographie[5], Mac Lane écrit "Un jour, Sammy me dit qu'il avait un jeune étudiant qui affirmait qu'il pouvait faire de la théorie des ensembles sans éléments. L'idée était difficile à comprendre, et il se demandait si je pourrais parler à l'étudiant en question. (...) Je l'ai écouté avec attention, pendant plus d'une heure. À la fin, j'ai tristement dit "Bill, ça ne marchera juste pas. Tu ne peux pas faire des ensembles sans éléments, désolé," et j'ai rapporté ce résultat à Eilenberg. La bourse d'études de Lawvere à Columbia ne fut pas renouvelée, et moi et ma femme quittâmes l'endroit pour nous installer en Californie."...

...Je n'ai jamais proposé "des ensembles sans éléments" mais le slogan a causé de nombreuses incompréhensions pendant les 40 années suivantes parce que, pour une raison quelconque, Saunders aimait le répéter. Bien sûr, ce que mon programme rejetait, c'était plutôt l'idée d'appartenance comme une primitive, les idées mathématiquement pertinentes, à la fois d'appartenance, et également d'inclusion, étant des cas particuliers de l'unique divisibilité par rapport à la composition catégorique. Je défendais l'idée que la théorie des ensembles ne devrait pas être basée sur la notion d'appartenance, comme dans la théorie des ensembles de Zermelo-Frankel, mais plutôt sur une structure invariante par isomorphisme.

À propos de l'autobiographie de Mac Lane, notez que quand Mac Lane l'a écrite, il avait déjà un certain âge, et selon sa femme et sa fille, il avait déjà eu plusieurs attaques cérébrales. Malheureusement, l'éditeur se rua chez l'imprimeur à l'occasion de son décès sans laisser sa femme et sa fille corriger les épreuves, comme cela leur avait été promis. Par conséquent, beaucoup de petits détails sont omis, par exemple le nom de famille du seul petit-fils de Mac Lane William, Coimbra qui devient Columbia[6], etc. Bien sûr, aucune mémoire de quiconque n'est si bonne qu'il ou elle puisse se souvenir de l'histoire d'un ou d'une autre précisément, et donc les principaux points concernant mes contributions et mon histoire

5. Saunders Mac Lane, *A Mathematical Autobiography*, A. K. Peters, 2005.
6. Idem, ibidem, p. 351.

contiennent souvent des spéculations qui auraient dû être vérifiées par l'éditeur et l'imprimeur.

Par rapport à cet épisode, il est traité différemment dans le livre, mais dans une version plutôt condensée, amenant quelques incohérences. L'acceptation préliminaire de ma thèse par Eilenberg a été encouragée par Mac Lane qui agit comme un lecteur extérieur, et j'ai défendu ma thèse devant Eilenberg, Kadison, Morgenbesser et d'autres dans l'amphithéâtre Hamilton en mai 1963.

Vous avez étudié à Columbia de février 1960 à juin 1961, y retournant pour soutenir votre thèse en mai 1963. Entre temps, vous êtes allé à Berkeley et à Los Angeles. Pourquoi ?

Même si j'avais reçu un excellent enseignement en logique mathématique de Elliott Mendelson à Columbia, j'ai ressenti un fort besoin de recevoir davantage d'enseignements en théorie des ensembles et en logique de la part d'experts de ces domaines, toujours dans le but, bien sûr, de clarifier les fondements de la théorie des catégories et de la physique. Pour pourvoir à mes obligations financières familiales, et aussi du fait de mon profond intérêt pour l'enseignement mathématique, j'avais été embauché pendant les étés 1960 et 1961 par TEMAC, une branche de l'Encyclopedia Britannica, qui s'engageait à fournir des livres pour l'université en mathématiques modernes dans un nouveau format interactif pas à pas. En 1961, TEMAC construisit un nouveau bâtiment près de l'Université de Stanford dédié à ce projet. Du coup, mon changement de ville suivant n'était pas motivé par le fait d'avoir perdu une bourse, mais plutôt dans deux buts : dans le quartier de la baie, je pourrais habiter à Berkeley, suivre les cours de Tarski, Feferman, Scott, Vaught, et d'autres théoriciens des ensembles de haut niveau, et aussi me rendre à Palo Alto pour continuer à rédiger le livre que j'écrivais principalement à domicile.

Ma première destination en Californie n'était pas ce club de réflexion (think tank) auquel il est fait référence dans le livre de Mac Lane. Plutôt, comme ma progression dans l'écriture du second texte programmé n'était pas aussi rapide que TEMAC l'escomptait, je démissionnai de ce travail.

Un ami de cette époque à Indiana travaillait alors pour le think tank près de Los Angeles, et put les persuader de me donner un travail. Au début, j'ai compris que le travail impliquerait de concevoir des systèmes informatiques pour vérifier des accords possibles sur le contrôle d'armes ; mais quand j'ai finalement obtenu l'habiliation secret défense, j'ai découvert que d'autres sujets étaient impliqués, reliés à la guerre du Vietnam. Le compte-rendu qu'en fait Mac Lane est essentiellement correct concernant la manière dont mon ami mathématicien Bishop Spangler du think tank devint mon supérieur et me donna alors l'opportunité de finir ma thèse sur l'algèbre universelle catégorique. En février 1963, Dana Scott et F. William Lawvere voulaient vraiment me débaucher de mon travail à Los Angeles pour que j'aie un poste d'enseignement à Reed College. J'ai demandé à Eilenberg une lettre de recommandation. Sa réponse très brève fut que la requête de Reed irait dans sa poubelle à moins que ma série de résumés ne soient rapidement terminés à la hâte et remplacés par une vraie thèse. Cet amour vache eut l'effet escompté en quelques semaines. Ayant soutenu ma thèse en 1963, je pus quitter le think tank et réintégrer une vie normale de professeur assistant à Reed College l'année académique 1963-64. En route vers Portland, j'assistais à la rencontre de théorie des modèles en 1963 à Berkeley, où, en plus de présenter mon développement fonctoriel de l'algèbre générale, j'annonçais que les quantificateurs sont caractérisés comme des adjoints de substitution.

Ainsi vous avez passé l'année académique 1963-64 comme professeur assistant à Reed College.

À Reed j'appris que la première année de calcul devrait se concentrer sur les fondements, les formules étant enseignées en seconde année. Ainsi, malgré le fait que j'avais déjà décidé que la catégorie des catégories était le paradigme approprié pour les mathématiques en général, je passais les semaines préparatoires à essayer de définir un cours de calcul basé sur la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Pourtant une évaluation sommaire montra qu'il y avait bien trop de niveaux de définitions, occultant la différentiation et l'intégration de la hiérarchie cumulative, pour être capable d'intégrer ces niveaux en un an. La structure de catégorie des ensembles sans structure de Cantor semblait à la fois plus simple et plus fermée. Ainsi la théorie élémentaire de la catégorie des ensembles émergea d'un besoin purement pratique d'enseignement, dans une sorte d'expérience que Saunders explicita également ainsi : *le besoin d'expliquer quotidiennement des éléments à des étudiants est souvent la source de nouvelles mathématiques.*

Une théorie d'une catégorie des ensembles abstraits de Cantor a la même force en termes de preuves théoriques que la théorie de la catégorie des catégories et je l'avais déjà noté dans l'introduction de ma thèse. Plus objectivement, les ensembles peuvent être définis comme des catégories discrètes et inversement, les catégories peuvent être définies comme les diagrammes finis adaptés aux ensembles discrets, et les forces relatives peuvent ainsi être comparées. La catégorie des catégories doit être préférée pour la raison pratique que toutes les structures mathématiques peuvent être construites comme des foncteurs et dans le réglage effectif, il n'y a pas besoin de vérifier dans chaque instance qu'on a un foncteur ou une transformation naturelle.

Après Reed, j'ai passé l'été 1964 à Chicago, où j'ai réfléchi au fait que la théorie de Grothendieck des catégories abéliennes devrait avoir un analogue non-linéaire dont les exemples inclurait les catégories de faisceaux d'ensembles ; j'ai écrit quelques-unes des propriétés que de telles catégories devraient avoir et noté que, sur la base de mon travail sur les catégories d'ensembles, une telle théorie devrait avoir une autonomie plus grande que ne pouvait en avoir la théorie abélienne (c'est seulement durant l'été 1965 sur la plage de La Jolla que j'ai appris de Verdier que lui, Grothendieck et Giraud avaient développé une théorie complètement épanouie de tels "topos", mais sans l'autonomie). Plus tard, à l'ETH à Zurich...

...où vous êtes resté de septembre 1964 à décembre 1966 comme chercheur scientifique en visite à l'Institut de mathématiques Beno Eckmann...

... là, j'ai été capable de simplifier davantage la liste des axiomes de la catégorie des ensembles dans un article que Mac Lane a alors communiqué aux Proceedings de l'Académie des sciences américaine. Là, j'ai aussi écrit pour publication le texte de la conférence "la catégorie des catégories comme fondement des mathématiques", conférence que j'ai donnée aux premières Rencontres internationales sur la théorie des catégories à La Jolla, en Californie, en 1965.

Quels étaient les objectifs de votre théorie élémentaire des catégories d'ensembles ?

Elle était destinée à accomplir deux objectifs. D'abord, la théorie caractérise la catégorie des ensembles et les applications comme une catégorie abstraite dans le sens où n'importe quel modèle pour les axiomes qui satisfont l'axiome additionnel non élémentaire de complétude, au sens habituel de la théorie des catégories, peut être démontré comme équivalent à la catégorie des ensembles. Deuxièmement, la théorie fournit des fondements des mathématiques qui sont un peu différents des théories des ensembles habituelles au sens où beaucoup de théorie des nombres, d'analyse élémentaire, et d'algèbre peuvent apparemment être développées à l'intérieur de ces fondements même si aucune relation avec les propriétés habituelles de $\in$ ne peut être définie.

Philosophiquement, on peut dire que ces développements ont conforté la thèse selon laquelle même en théorie des ensembles et en mathématiques élémentaires, il était également vrai, comme cela avait été longuement ressenti en algèbre avancée et en topologie, que la substance des mathématiques ne réside pas dans la Substance, comme on semble vouloir le signifier lorsque $\in$ est le prédicat irréductible mais dans la Forme, comme cela est clair lorsque la notion guide est la structure à invariance par isomorphisme, comme cela est défini, par exemple, par les propriétés des applications universelles. Comme en algèbre et en topologie, ici à nouveau, la machinerie technique concrète pour l'expression précise et le traitement efficace de ces idées est fournie par la théorie des catégories d'Eilenberg-Mac Lane, des foncteurs et des transformations naturelles.

Retournons à Zurich.

À Zurich, j'ai eu de nombreuses discussions avec Jon Beck et nous avons collaboré sur les doctrines. Le mot "doctrine" lui-même est entièrement dû à Jon et signifie quelque-chose qui est comme une théorie, si ce n'est qu'il n'est pas approprié de l'interpréter dans la catégorie des catégories, plutôt que, par exemple, dans la catégorie des ensembles. Les "algèbres" pour une doctrine méritent d'être appelées "théories" parce qu'en les dualisant en une algèbre fixée, on définit un foncteur sémantique reliant des généralités abstraites et les généralités concrètes correspondantes. Jon insistait sur la clarté mathématique et fit beaucoup pour encourager la précision dans les discussions et dans la formulation des résultats mathématiques. Il remarqua que mon foncteur de structure adjoint à la sémantique est analogue à la définition de descente de cocycle de Grothendieck dans le sens où les deux expriment partiellement la structure qui surgit inévitablement quand des objets sont construits par un processus fonctoriel, qui, si on le suppose, aide à renverser le processus et à discerner l'origine. Implémenter cette notion générale philosophique de la descente nécessite le choix d'une "doctrine" appropriée de théories dans lesquelles la structure induite peut être exprimée.

C'est également depuis Zurich que j'assistais à un séminaire à Oberwolfach où je rencontrai Pierre Gabriel et où j'appris de lui de nombreux aspects peu connus même aujourd'hui de l'approche que Grothendieck avait de la géométrie. En général, l'atmosphère de travail au Forschungsinstitut était si agréable, que j'y suis retourné plus tard, pendant l'année académique 1968/69.

Comme professeur assistant à Chicago, en 1967, vous avez donné avec Mac Lane un cours de mécanique, où "vous avez commencé à penser à la justification de méthodes intuitives plus anciennes en géométrie"[7]. *Vous l'avez appelée la "géométrie différentielle synthétique". Comment êtes-vous parvenu au programme de dynamique catégorique et de géométrie synthétique différentielle ?*

De janvier 1967 à août 1967, j'étais professeur assistant à l'université de Chicago. Mac Lane et moi avons programmé d'enseigner un cours commun basé sur le livre de Mackey "Fondements mathématiques de la mécanique quantique".

Alors, Mackey, un analyste fonctionnel d'Harvard principalement concerné par les relations entre la mécanique quantique et la théorie des représentations, a un lien avec la théorie des catégories.

Ce lien à la théorie des catégories remonte bien plus loin que cela, comme me l'ont expliqué Saunders et Sammy. La thèse de Mackey fournit une pensée remarquable de nature catégorique, même si les catégories n'avaient pas encore été définies alors. De façon plus précise, le fait que la catégorie des espaces de Banach et des applications linéaires continues soient complètement plongées dans une catégorie d'appariement d'espaces vectoriels abstraits, avec la définition et l'utilisation de la "convergence de Mackey" dans une séquence "bornologique" d'espaces vectoriels ont été découvertes là et ont joué un rôle fondamental en quelque sorte dans presque tous les livres d'analyse fonctionnelle depuis. Ce qui n'est malheureusement pas clarifié dans presque tous les livres d'analyse fonctionnelle, c'est que ces concepts sont de nature intensivement catégorique et qu'un meilleur éclairage résulterait de cette clarification.

Et le referee qui, malgré un scepticisme initial, permit au premier article de donner une exposition à la théorie des catégories qui vit le jour dans le TAMS en 1945, n'était autre que George Whitelaw Mackey.

Pour revenir à l'origine de la géométrie différentielle synthétique, d'où les idées d'organiser un tel cours de mécanique sont-elles venues ?

Apparemment, Chandra avait suggéré que Saunders donne quelques cours en lien avec la physique, et notre cours commun était le premier de la série. Finalement Mac Lane donna un exposé sur l'équation d'Hamilton-Jacobi à l'Académie navale à l'été 1970 qui fut publié dans le American Mathematical Monthly.

Dans ma série de cours avancés séparés, auquel a assisté mon étudiant d'alors Anders Kock, ainsi que Mac Lane, Jean Bénabou, Eduardo Dubuc, Robert Knighten, et Ulrich Seip, je commençais à appliquer la théorie des topos de Grothendieck que j'avais apprise de Gabriel au problème des fondements simplifiés de la mécanique continue comme cela avait été inspiré par les enseignements de Truesdell, l'axiomatisation de Noll, et par mes efforts en 1958 pour rendre catégorique le sujet de la topologie dynamique.

De ce que j'avais appris de Gabriel à Oberwolfach sur une vision de la géométrie algébrique comme étant un gros topos, ma contribution spécifique fut d'élever certains ingrédients, comme l'objet représentant le foncteur tangent d'une variété, au rang d'axiomes pour permettre que le développement se fasse sans encombre par une construction particulière. Cet ingrédient particulier n'avait apparemment jamais été remarqué précédemment dans la catégorie C-∞. Il a été immédiatement clair que le programme nécessiterait le développement, dans un esprit axiomatique similaire, de la théorie des topos dont j'avais entendu parlé en 1965 par Verdier sur la plage à La Jolla. En effet, mon recrutement à Chicago avait aussi été encouragé par Marshall Stone qui était enthousiaste à propos de mon observation en 1966 que la théorie des topos rendrait mathématique à la fois les modèles à valeurs booléennes en général, et l'indépendance de l'hypothèse du continu en particulier. Que ces topos apparemment totalement différents, impliquant des mouvements infinitésimaux et de la logique avancée, puissent faire partie d'une même théorie axiomatique simple était une promesse dans mon cours de 1967. Cela devint une réalité seulement après mon second séjour au Forschungsinstitut à Zurich, en Suisse en 1968-69, pendant lequel je découvris la nature du foncteur puissance ensembliste dans les topos comme un résultat de recherches sur le problème de l'expression en termes élémentaires de l'opération de formation du faisceau associé, et après 1969-1970 à

7. Saunders Mac Lane, *A Mathematical Autobiography*, A. K. Peters, 2005.

l'niversité Dalhousie à Halifax, à Nova Scotia, au Canada, lors de ma collaboration avec Myles Tierney.

Vous êtes allé à Dalhousie en 1969 pour exercer l'un des premiers professorats Killam.

En effet, et cela me permit d'avoir une douzaine de collaborateurs selon mon désir, également financés par Killam.

Et c'est alors que vous êtes arrivé, avec le topologue algébriste Myles Tierney, au concept de topos élémentaire. Pourriez-vous nous décrire cette collaboration avec Myles Tierney ?

Myles présenta lors d'un séminaire hebdomadaire l'état courant du travail et en effet, une partie du travail consistait en discussions pendant le séminaire lui-même : les remarques d'étudiants comme Michel Thiebaud et Radu Diaconescu ont parfois été des étapes-clefs. Bien que j'aie été capable de me convaincre moi-même à Zurich, Rome et Oberwolfach, que l'axiomatisation finie de Myles Tierney et Dana Scott était possible, cela nécessita plusieurs étapes de simplifications successives pour parvenir aux quelques axiomes maintenant connus. Le critère de suffisance était qu'en étendant toute catégorie donnée qui satisfaisait les axiomes, il serait possible d'en créer d'autres au moyen de préfaisceaux et faisceaux. Le "théorème fondamental" des tranches fut suivi par notre découverte que les comonades exactes à gauche produisaient aussi des topos, fit plus que couvrir l'aspect préfaisceaux. Le concept de faisceaux amena à la conjecture que des sous-topos devraient être précisément paramétrés par certaines applications intérieures comme les classifieurs de sous-objets, et ceci fut vérifié ; ces applications intérieures sont maintenant connues sous le nom d'opérateurs modaux de Lawvere-Tierney, et correspondent classiquement aux topologies de Grothendieck. Le fait que la sous-catégorie correspondante de préfaisceaux puisse être décrite en termes finis est une caractéristique technique clef, qui a été achevée en rendant explicite le classifieur d'applications partielles. Le fait que la théorie soit élémentaire signifie qu'elle a des modèles dénombrables et d'autres caractéristiques qui la rendent applicable à des résultats d'indépendance en théorie des ensembles et dans des récursions plus hautes, etc., mais d'un autre côté, la théorie de Grothendieck des U-topos est précisément incluse à travers sa propre technique de relativisation en même temps que des axiomes additionnels, tels que la décomposition en épimorphismes et la 2-valuation, sur U lui-même (en fait, ces axiomes additionnels sont positifs ou géométriques de telle façon qu'il y a un topos classifiant pour leurs modèles, un fait qui attend toujours d'être exploité par la théorie des ensembles.)

En 1971, la date officielle de la naissance de la théorie des topos, malheureusement, l'équipe de rêve à Dalhousie a été dispersée. Que s'est-il passé, qu'est-ce qui vous a fait partir au Danemark ?

Quelques-uns des membres de l'équipe et moi-même devînmes actifs contre la guerre du Vietnam et plus tard contre les mesures d'actions de guerre proclamées par Trudeau. Cet acte, similaire en plusieurs points au *Patriot Act* 35 ans plus tard aux États-Unis, suspendit les libertés individuelles sous prétexte d'un danger terroriste. (Le danger allégé à ce moment-là était un groupe au Québec qui se révéla être infiltré par le RCMP, la police secrète canadienne). Douze librairies du Québec (non reliées aux terroristes) furent brûlées par la police ; des activistes politiques de différents groupes à travers le Canada furent incarcérés en hôpitaux psychiatriques, etc. Je m'opposais publiquement à la consolidation de ces lois fascistes, à la fois au Conseil universitaire, et dans des démonstrations publiques. L'administration de l'université me déclara coupable de "rupture des activités académiques". Des rumeurs commencèrent à circuler, par exemple, sur le fait que mes diagrammes catégoriques étaient en fait des plans pour attaquer l'administration en construction. Mon contrat ne fut pas renouvelé.

Et après une courte période à Aarhus, vous êtes allé en Italie. Pourquoi ?

Les conditions à l'Institut mathématique étaient très agréables, et la collaboration avec Anders Kock était très fructueuse et appréciable. Pourtant, quand la longue nuit du nord a commencé, elle s'est avérée mauvaise pour ma santé, aussi j'ai accepté l'invitation de Perugia. J'apprécie encore de visiter le Danemark en été.

Après quelques années en Europe, vous êtes retourné aux États-Unis, à SUNY à Buffalo …

John Isbell et Jack Duskin purent persuader le doyen que (contrairement au contenu d'un message envoyé par l'un des doyens de Dalhousie), je n'étais pas dangereux et je pourrais même être un atout.

Malgré votre retour aux USA, vous avez gardé un lien étroit avec la communauté mathématique italienne. En novembre 2003, il y a eu une conférence à Florence ("Ramifications de la théorie des catégories") pour célébrer les 40 ans de votre thèse[8]*. Pouvez-vous résumer les principales idées de celle-ci ?*

Les détails sont donnés dans mon commentaire pour la réimpression de TAC[9] (ces réimpressions constituent une excellente source d'autres ressources du début de la théorie des catégories). Le principal point était de présenter le traitement catégorique de la relation entre les théories algébriques et les classes d'algèbres, en incorporant les algèbres "universelles" précédentes de Birkhoff et Tarski d'une manière applicable aux cas spécifiques d'intérêt mathématique tels que traités dans les livres de Chevalley et de Cartan-Eilenberg. La redéfinition sans présentation à la fois des théories et des classes nécessitait une attention spécifique à la catégorie des catégories.

Lors de la conférence de Florence, il y a eu des exposés à la fois sur les mathématiques et sur la philosophie. Vous restez intéressé par la philosophie des mathématiques...

Oui. Parce que le but social le plus fondamental de la philosophie est de guider l'éducation et parce que les mathématiques sont un des piliers de l'éducation, en conséquence, les philosophes discutent souvent de mathématiques. Mais une philosophie moins spéculative basée sur la pratique réelle de la théorisation mathématique devrait finalement devenir un guide important pour l'éducation mathématique.

Comme Mac Lane l'a écrit dans son autobiographie, "L'aspect le plus radical est l'idée de Lawvere d'utiliser les axiomes de la catégorie des ensembles comme fondements des mathématiques. Cette idée attractive et opposée a, pour l'instant, trouvé peu d'écho dans la communauté des spécialistes de logique mathématique, qui ont tendance en général à supposer que tout a toujours commencé et commence toujours avec les ensembles". Avez-vous une explication de cette attitude ?

La tradition des 100 dernières années des "fondements comme justification" n'ont pas beaucoup aidé les mathématiques. Dans ma propre éducation, j'ai eu la chance d'avoir deux professeurs qui utilisaient le terme "fondements" *(ndlt : au sens de fondations)* dans son sens commun (plutôt que dans le sens spéculatif de la tradition Bolzano-Frege-Peano-Russell). Cette façon de penser s'illustre dans leur travail sur les fondements de la topologie algébrique, publiés en 1952 par Eilenberg (avec Steenrod), et les fondements mécaniques de l'élasticité et de la mécanique des fluides, publiés la même année par Truesdell. À chaque fois que j'ai utilisé le terme "fondements" dans mes écrits dans les quarante dernières années, j'ai explicitement rejeté une utilisation réactionnaire de ce terme et à la place utilisé la définition implicite dans le travail de Truesdell et Eilenberg. L'orientation de ces travaux semblait être de "concentrer l'essence de la pratique et en retour, d'utiliser les résultats pour guider la pratique". Notamment, un important composant de la pratique mathématique est l'étude précautionneuse de l'analyse historique et contemporaine, de la géométrie, etc. pour extraire les concepts récurrents essentiels ; rendre ces concepts et ces constructions (tels que ceux d'homomorphismes, de fonctions, de foncteurs adjoints, etc.) explicites fournit un guide puissant pour des développements avancés unifiés de tous les sujets mathématiques, anciens et nouveaux.

Pouvez-vous développer un peu à ce sujet ?

Quel est l'outil premier pour résumer l'essence des développements mathématiques ? L'algèbre ! Les points nodaux dans le progrès de la recherche adviennent dans les cas où un nombre fini d'axiomes pour la métacatégorie des catégories, tout ce que nous connaissons jusque-là, peut être exprimé dans une seule sorte d'algèbre. Je suis fier d'avoir participé avec Eilenberg, Mac Lane, Freyd, et de nombreux autres, à cette prise de conscience contemporaine de l'algèbre comme théorie des catégories. Si cette attention excessive donnée à la possibilité alléguée que les mathématiques soient inconsistantes, avec la dégradation qui l'a accompagnée du F-mot n'avait pas eu lieu au 20$^{\text{ème}}$ siècle, nous l'utiliserions encore selon le sens connu par le grand public : la recherche de ce qui constitue la "base". Nous, qui sommes supposés connaître l'algèbre explicite des homomorphismes, des fonctions, etc. avons trop longtemps négligé notre devoir de trouver des moyens d'enseigner ces concepts aussi dans l'enseignement secondaire.

Avoir reconnu dans les années 60 qu'il n'y a pas une "justification" platonique paradisiaque donnée pour les mathématiques, j'ai essayé de donner au mot "Fondements" des significations plus progressives

8. Sémantiques fonctorielles des théories algébriques, réimpression dans *Repr. Theory Appl. Categ.* 5 (2004) 1-121 (version électronique)
9. Théorie et applications des catégories

dans l'esprit d'Eilenberg et Truesdell. C'est-à-dire que j'ai essayé d'appliquer la méthode vivante de l'axiomatique pour rendre explicites les caractéristiques essentielles d'une science et de la façon dont elle se développe pour aider à fournir un guide à l'utilisation, à l'enseignement, et plus consciemment au développement de la science. De "purs" fondements, qui se transforment en fondements qui oublient leur but et se mettent à devenir purement spéculatifs et centrés sur eux-mêmes, ne sont clairement PAS des fondements.

Les fondements se déduisent des applications par l'unification et la concentration, en d'autres termes, par la méthode axiomatique. Les applications sont guidées par les fondements qui ont été appris à travers l'éducation.

Vous êtes en train de dire qu'il y a une relation dialectique entre les fondements et les applications.

Oui. Toute théorie des ensembles digne de ce nom permet une définition des notions d'application, domaine, codomaine et composition ; c'est en termes de ces notions que Dedekind et plus tard d'autres mathématiciens ont exprimé des structures intéressantes. Par conséquent, tout modèle d'une telle théorie donne naissance à une catégorie et quelles que soient les fonctionnalités additionnelles compliquées qui peuvent être contemplées par la théorie, non seulement les propriétés mathématiques, mais également les propriétés les plus intéressantes "de théorie des ensembles", telles que l'hypothèse du continu, la finitude de Dedekind, l'existence des cardinaux inaccessibles d'Ulam, etc. dépendent seulement de cette simple catégorie.

Durant les quarante dernières années, nous sommes devenus familiers du fait que les fondements sont relatifs, non absolus. Je crois que même les clarifications les plus grandes des fondements ne seront terminées qu'en appliquant une concentration des applications de la géométrie vers l'analyse, c'est-à-dire en poursuivant la relation dialectique entre les fondements et les applications.

Plus récemment, vous avez donné les formulations algébriques de distinctions entre opposés telles que "unité vs. identité", quantités variables "extensives vs. intensives", catégories "spatiales vs. quantitatives"...

Oui, pour montrer qu'à travers l'utilisation de la théorie mathématique des catégories, de telles questions amènent non pas à des spéculations floues, mais à des conjectures mathématiques concrètes et à des résultats.

Cela a été une des caractéristiques de votre travail de creuser sous les fondements d'un concept pour simplifier sa compréhension. En cela, vous êtes vraiment un descendant de Samuel Eilenberg, dans son "insistance à aller à la racine des choses". Nous nous rappelons très bien d'un exposé que vous avez présenté à Coimbra à nos étudiants de premier cycle. Vous avez récemment publié deux opus d'articles[10]*. Pourquoi trouvez-vous important de dédier une partie importante de votre temps et de vos efforts à cela ?*

Beaucoup de mes publications de recherche sont le résultat de la longue étude de deux problèmes :
(1) Comment effectivement enseigner le calcul à des débutants ;
(2) Comment apprendre, développer et utiliser des suppositions en thermodynamique continue d'une manière qui soit rigoureuse, et encore simple.

En d'autres termes, les résultats eux-mêmes peuvent seulement être des blocs de construction d'une réponse à la question : "Comment pouvons-nous réaliser des étapes pédagogiques et concrètes, pour combler l'énorme fossé qui sépare la société du 20ème siècle du fait que :
(a) tout le monde doit utiliser la technologie qui s'appuie sur la science, qui dépend des mathématiques ; et également
(b) seules très peu de personnes ont une connaissance effective des concepts de base des mathématiques modernes comme les rétractions, les théorèmes de points fixes, les morphismes de graphes dirigés, et les systèmes dynamiques, les produits galiléens, les fonctionnelles, etc.".

Seulement armés de tels concepts, peut-on espérer répondre avec confiance à la myriade de méthodes, résultats et preuves qui dans le monde moderne sont associés aux mathématiques. Avec Stephen Schanuel, j'ai commencé à relever le défi de cette question dans notre livre Mathématiques conceptuelles qui reflète

10. F. W. Lawvere et R. Rosebrugh, *Sets for Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003 ; F. W. Lawvere et S. Schanuel, *Conceptual Mathematics. A First Introduction to Categories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

le travail actuel de nombreux mathématiciens.

Quel est votre opinion concernant l'article de Wikipedia vous concernant ?

La désinformation de la version originale a été largement retirée, mais il en reste beaucoup dans d'autres articles de théorie des catégories.

Vous avez célébré récemment l'anniversaire des 100 ans de la naissance de Kurt Gödel. Que pensez-vous de la publicité extra-mathématique autour du théorème d'incomplétude ?

Dans *Arguments diagonaux et catégories fermées cartésiennes*[11], nous démystifions le théorème d'incomplétude de Gödel et la théorie de la définition de la vérité de Tarski en montrant que tous deux sont des conséquences d'une algèbre très simple dans le paradigme fermé-cartésien. Il a toujours été difficile pour beaucoup d'appréhender comment le théorème mathématique de Cantor pourrait être rebaptisé en "paradoxe" par Russell et comment le théorème de Gödel pouvait être si souvent déclaré résultat le plus significatif du 20ème siècle. Il y avait toujours de la suspicion parmi les scientifiques que de tels mouvements de publicité extra-mathématiques cachaient un plan pour ré-établir la croyance comme substitut de la science. Maintenant, une centaine d'années après la naissance de Gödel, les tentatives d'exploiter son grand travail mathématique dans un tel but sont devenus explicites[12].

Vous avez toujours été concerné par le fait d'expliquer comment décrire les règles mathématiques et les faits d'une manière catégorique. La théorie des catégories est-elle seulement un langage ?

Non, elle est plus qu'un langage. Elle concentre les fonctionnalités essentielles de siècles d'expérience mathématique et ainsi agit comme un guide indispensable pour les prochains développements.

Quelles ont été selon vous les contributions majeures que la théorie des catégories a apportées aux mathématiques ?

D'abord, le travail de Grothendieck dans son article Tohoku[13]. Les espaces nucléaires ont été l'une des grandes inventions de Grothendieck. D'ailleurs, Silva a travaillé beaucoup sur ces espaces et l'article de Grothendieck de 1953 sur les fonctions holomorphes[14] a été inspiré par un article de Silva de 1950[15].

Le concept de foncteurs adjoints, découvert par Kan dans le milieu des années 50, fut aussi une pierre de touche, rapidement incorporée comme un élément-clef des fondements de la géométrie algébrique par Grothendieck ainsi que dans les fondements catégoriques de la logique et de la théorie des ensembles.

Je peux aussi mentionner la fermeture cartésienne, l'axiomatisation de la catégorie des catégories, la théorie des topos,... Les catégories fermées cartésiennes sont apparues pour la première fois dans ma thèse, en utilisant cette dénomination. Le nom était apparu initialement dans un article de Kelly et Eilenberg[16]. Je ne suis pas exactement d'accord avec l'emploi du mot "Cartésien". Galilée est la véritable source, et non Descartes.

Vous êtes regardé par de nombreuses personnes comme l'un des grands visionnaires des mathématiques du début du vingt-et-unième siècle. Comment envisagez-vous le développement futur de la théorie des catégories au sein des mathématiques ?

Je pense que la théorie des catégories a un rôle à jouer dans la poursuite de la connaissance mathématique. Il est important de souligner que les théoriciens des catégories continuent de trouver des résultats surprenants malgré toutes les choses pessimistes que nous avons entendues, même il y a 40 ans, notam-

11. Réimprimé dans *Repr. Theory Appl. Categ.* 15 (2006) 1-13 (version électronique).
12. La fondation controversée John Templeton, qui a essayé d'injecter de la religion et de la pseudo-science dans la pratique scientifique, était le sponsor de la conférence internationale organisée par la Société Kurt Gödel Society en honneur des 100 ans de la naissance de Gödel. Cette fondation finance également un programme de bourses de recherche organisé par la Société Kurt Gödel.
13. A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J. 9 (1957) 119-121.
14. A. Grothendieck, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, I, J. Reine Angew. Math. 192 (1953) 35-64.
15. J. Sebastiao e Silva, *Analytic functions and functional analysis*, Portugaliae Math. 9 (1950) 1-130.
16. S. Eilenberg et G. M. Kelly, *Closed categories*, Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif., 1965), p. 421-562, Springer, 1966.

ment que les généralités abstraites n'avaient pas d'avenir. Nous continuons d'être surpris de trouver de surprenants nouveaux et puissants résultats ainsi que de trouver des exemples particuliers très intéressants.

Nous avons dû nous battre contre le mythe du courant dominant qui dit, par exemple, qu'il y a des cycles durant lesquels à un moment donné, tout le monde travaille sur des concepts généraux, et qu'à d'autres moments, tout le monde travaille sur les exemples particuliers, alors qu'en fait, les mathématiciens sérieux ont toujours fait les deux.

On ne devrait pas se saoûler de l'idée que tout est général. Les théoriciens des catégories devraient revenir à l'objectif initial : appliquer des résultats généraux à des particularités et trouver des connexions entre les différentes parties des mathématiques.

Francis William Lawvere (né le 9 février 1937 à Muncie, dans l'Indiana) est un mathématicien connu pour son travail en théorie des catégories, théorie des topos, logique, physique et philosophie des mathématiques. Il a écrit plus de 60 articles dans les domaines des théories algébriques et des catégories algébriques, de la théorie des topos, de la logique, de la physique, de la philosophie, de l'informatique, de la didactique, de l'histoire et de l'anthropologie, et a publié trois livres (dont l'un est traduit en italien et espagnol) et en a trois autres en préparation en ce moment. Il a également édité trois volumes de la série des Springer en mathématiques et a supervisé douze thèses. La série électronique *Réimpression de la théorie et des applications des catégories* inclut des réimpressions de sept de ses articles fondamentaux, avec commentaires de l'auteur, et parmi ceux-ci, on trouve sa thèse et son traitement complet de la catégorie des ensembles.

Au congrés international des mathématiciens en 1970 à Nice, il introduisit une version algébrique de la théorie des topos qui unifiait la géométrie et la théorie des ensembles. Écrite en collaboration avec Myles Tierney, cette théorie a depuis été développée plus avant par de nombreuses personnes, avec des applications à différents domaines des mathématiques. Deux de ces domaines avaient été précédemment introduits par Lawvere : (1) Ses cours en 1967 à Chicago (publiés en 1978) sur la dynamique catégorique ont montré comment des topos avec des objets infinitésimaux particuliers peuvent fournir un paradigme géométrique flexible pour les modèles de la physique continue, ce qui a amené un nouveau domaine connu sous le nom de Géométrie différentielle synthétique ; (2) Dans son exposé à Los Angeles en 1967, et dans ses articles de 1968 sur les hyperdoctrines et l'adjonction dans les fondements, Lawvere a initié et développé le domaine de la logique catégorique, qui a depuis été largement appliqué à la géométrie et à l'informatique. Ces idées étaient indispensables pour sa preuve simplifiée en 1983 de l'existence d'entropie en thermodynamique de systèmes non-équilibrés.

Bon nombre des publications de recherche de Lawvere résultent de ses efforts d'améliorer l'enseignement du calcul et de la thermodynamique pour l'ingénierie. C'est en particulier son cours en 1963 au Reed College sur les fondements du calcul qui a amené à son axiomatisation en 1964 de la catégorie des ensembles et finalement à la théorie élémentaire des topos.

Le professeur Lawvere a été élève de Clifford Truesdell et de Max Zorn à l'université d'Indiana et il a obtenu une thèse à Columbia en 1963 sous la supervision de Samuel Eilenberg. Avant de terminer sa thèse, il a passé une année à Berkeley en tant qu'étudiant informel en théorie des modèles et théorie des ensembles, suivant les cours d'Alfred Tarski et Dana Scott. En 1964-1966, il était chercheur-professeur visiteur au Forschungsinstitut mathématique à l'ETH de Zurich. Il a ensuite enseigné à l'université de Chicago, travaillant avec Mac Lane, et au Centre d'enseignement CUNY de New-York, travaillant avec Alex Heller. De retour à Zurich en 1968-69, il proposa des axiomes élémentaires (premier ordre) pour les topos généralisant le concept de topos de Grothendieck. L'université de Dalhousie en 1969 initia un groupe de chercheurs à financements Killam avec Lawvere à sa tête ; mais en 1971, le groupe fut arrêté à cause des opinions politiques de Lawvere (notamment son opposition à l'utilisation en 1970 de mesures d'actions armées).

Alors Lawvere alla à l'Institut mathématique de Aarhus (1971-72) et il créa un séminaire à Perugia, en Italie (1972-1974) où il travailla particulièrement sur différentes sortes de catégories enrichies. De 1974 jusqu'à sa retraite en 2000, il a été professeur de mathématiques à l'université de Buffalo, collaborant souvent avec Stephen Schanuel. Là il occupa une position de professeur sur une chaire Martin (1977-82).

Il a aussi été professeur visiteur de recherche à l'IHES à Paris (1980-81).

Il est maintenant Professeur émérite de mathématiques et Professeur adjoint émérite de philosophie à l'université d'état de New York à Buffalo et il continue à travailler à sa recherche de 50 années pour trouver un paradigme rigoureux et flexible pour les idées physiques de Truesdell et Walter Noll, utilisant la théorie des catégories.

Sa vision personnelle des mathématiques, basée sur une connaissance profonde et élargie des mathématiques et de la physique, continue d'influencer des mathématiciens et d'attirer des experts d'autres domaines des mathématiques. Cette influence a été très apparente dans la session d'honneur qui a eu lieu lors de la dernière conférence de théorie des catégories (Carvoeiro, Portugal, juin 2007), à l'occasion de son 70$^{\text{ème}}$ anniversaire, lors de laquelle des hommages spontanés et intenses lui ont été témoignés à la fois par des chercheurs confirmés ainsi que par de jeunes chercheurs. En effet, en plus de ses extraordinaires qualités en tant que mathématicien, nous voulons témoigner du soin et des efforts qu'il a mis dans l'orientation d'étudiants et de jeunes chercheurs, dont nous avons eu confirmation lorsqu'il a donné une conférence de théorie des catégories à des étudiants de premier cycle, et à nouveau, dans les échanges que nous avons été très honorés d'avoir avec lui, lors de la préparation de cet entretien.

Alexander Grothendieck et le concept d'espace
F. William Lawvere

Il y a 50 ans, la première réunion internationale sur la théorie des catégories a eu lieu à La Jolla, en Californie. En fait, une partie de cette réunion s'est déplacée sur la plage, où un discours inspirant par Jean-Louis Verdier a introduit pour beaucoup d'entre nous une nouvelle classe de catégories dues à Grothendieck, en écrivant sur un tableau noir qui avait été amené à la plage dans ce but. Jon Beck a commencé à dessiner des diagrammes dans le sable, et une discussion vivante et enthousiaste a commencé entre les participants. Jean-Louis Verdier a suggéré que ces catégories incarnent la théorie des ensembles, mais Erwin Engeler et moi avons exprimé des doutes, parce que la description semblait avoir besoin d'une théorie des ensembles donnée de l'extérieur pour paramétrer les familles pour les colimites requises.

Il y a plusieurs sujets importants qui sont sortis de cette réunion et qui sont toujours florissants, par exemple, la théorie des catégories enrichies présentée par Eilenberg et Kelly, et en particulier, le rôle des catégories "cartésiennes fermées" dans la géométrie et la logique. Le sujet que j'ai essayé de capturer à La Jolla, à savoir l'utilisation croissante des catégories et des foncteurs comme le langage pour les mathématiques abstraites, se poursuit depuis 50 ans.

La formulation explicite des principes de la théorie des catégories dans mon article a toujours besoin d'une axiomatisation améliorée. Je serai ravi quand une personne jeune réalisera cette tâche.

La disparition récente de tant de piliers de cette époque souligne la nécessité d'une histoire cohérente et correcte comme guide pour l'avenir. Je veux continuer la recherche d'une telle histoire, en me concentrant ici sur le concept d'espace.

Il n'y a pas qu'un seul concept d'espace, mais plusieurs classes de "régularité" [1]. (Pour éviter les malentendus, je ne me concentrerai pas sur l'espace riemannien ou l'espace-temps. Ces structures supplémentaires importantes nécessitent des espaces comme domaines de définition.) Une caractéristique commune des espaces dans ces catégories plus ou moins lisses que j'ai appelées COHÉSION, pour indiquer que les parties d'un espace "sont collées ensemble" et "hésitent" à se séparer (comme en argot américain "je resterai un peu, jusqu'à ce que je me sépare").

Le grand géomètre dialectique Hermann Grassmann a discerné les deux principales contradictions en mathématiques comme étant les oppositions "continues contre discrètes" et "égalité contre inégalité". Parce que le terme "continu" a eu une définition mathématique spécifique pendant plus d'un siècle, je vais plutôt utiliser "cohésif" pour ce concept philosophique, mais bien sûr, je vais immédiatement essayer de l'apprivoiser avec des définitions mathématiques. La dialectique de l'inégalité / égalité a été expliquée de manière assez approfondie par les mathématiciens, selon au moins deux niveaux :

Hurewicz (1935), Kan (1955) et Moore (1955), Quillen (1967), Gabriel et Zisman (1967), Heller (1988), Grothendieck (1983 et 1989), Kan et al. (2004), Maltsiniotis et Cisinski (de 1999 à ce jour), ont fourni quelques-unes des contributions majeures au niveau des espaces eux-mêmes.

Un autre niveau de transformation de l'égalité est codifié dans la notion de catégorie exacte introduite par Myles Tierney lors de notre séminaire à Halifax en 1969 ; il a prouvé que ces catégories sont une délinéarisation de la notion de catégorie abélienne de Grothendieck dans le sens où les groupes abéliens dans une catégorie exacte forment une catégorie abélienne. Cette théorie a été exposée dans le livre de Barr, van Osdol et Grillet, ainsi que dans l'exposé de Barr à l'ICM 1970. Les catégories exactes incarnent la propriété spéciale d'images en théorie des faisceaux qui peuvent être exprimées en termes "logiques" : définir l'image d'une application $X \to Y$ comme étant le plus petit sous-objet de Y à travers lequel l'application se factorise. Cette définition exprime précisément la règle d'inférence de la quantification existentielle ; mais alors dans quelle mesure exprime-t-elle "l'existence effective" ? En d'autres termes, étant donné une figure $Q \to Y$ de forme Q dans le codomaine Y, dans quelle mesure "provient-elle" d'une figure dans X via l'application, en supposant que $Q \to Y$ se trouve dans l'image ainsi définie ? Une partie de la propriété d'exactitude garantit qu'il existe un recouvrement $P \to Q$ de Q avec une figure effective $P \to X$ s'appliquant dans $P \to Q \to Y$, au pullback de la figure en question. L'autre caractéristique des catégories exactes est encore plus transparente sur la transformation de l'égalité : les co-égaliseurs viennent de leurs

Invited address CT Aveiro, juin 2015

1. smoothness = lissité ?

paires de noyaux et les relations d'équivalence émergent toutes de paires de noyaux. Il est clair que la théorie des catégories exactes s'applique largement. Le livre de Barr, Grillet et Van Osdol a beaucoup fait pour la populariser, et le travail de Carboni et d'autres a très efficacement utilisé "la complétion exacte" pour adjoindre les co-égaliseurs adéquats à des catégories non exactes. La plupart de ces travaux postulent les propriétés d'exactitude comme des conditions données sur une catégorie, tout comme le fait la caractérisation de Giraud des topos de Grothendieck ; une partie de la signification du fait de postuler des espaces fonctionnels et des objets puissance est que l'existence de foncteurs adjoints implique l'exactitude sans postulat supplémentaire.

L'idée d'une opposition entre une catégorie d'espaces cohésifs et une catégorie d'ensembles anti-cohésifs s'applique également en particulier à la description de Cantor de la relation entre une catégorie d'ordinaux et une sous-catégorie de cardinaux. En fait, il semble qu'en général, le discret est une sous-catégorie co-réflexive du cohésif, avec la co-réflexion extrayant, comme un arithmos aristotélicien, le "cardinal de X" Cantorien ou les "points de X" de Hausdorff. (Les ensembles des "plus forts" ont des isomorphismes, tout comme en ont les objets dans n'importe quelle catégorie ; la question ici, cependant, n'est pas de passer à des classes d'isomorphismes, mais simplement d'extraire l'aspect discret sous-jacent de chaque espace/ordinal donné). La dialectique Grassmannienne se développe davantage. La sous-catégorie discrète est la négation d'une sous-catégorie identique à l'extrémité opposée, avec le même foncteur pour réflexion. Autrement dit, la même catégorie a comme insertions deux sous-catégories opposées, celle qui illustre que les "plus forts" sont totalement distincts, mais l'autre démontrant qu'ils sont presque indiscernables. Plus précisément, un travail conjoint avec Matias Menni a montré que, selon des hypothèses très générales, l'inclusion co-discrète consiste en les faisceaux booléens que possède tout topos. Cependant, pour une catégorie d'espaces il y a un adjoint supplémentaire à la faisceautisation. Cela indique une restriction non triviale sur cette catégorie cohésive, à savoir l'existence de cet adjoint de Cantor additionnel. De telles restrictions servent d'axiomes pour la cohésion, ce qui est la caractérisation que nous proposons pour les "catégories d'espace".

Mon utilisation de concepts tels que la sous-catégorie booléenne révèle que je suis convaincu que les catégories d'espace sont le plus efficacement modélisées comme des topos appropriés. Un des deux axiomes pour les topos, notamment l'existence d'espaces fonctionnels (la caractéristique qui a été appelée "fermé cartésien" depuis la contribution d'Eilenberg et Kelly il y a 50 ans avait été reconnu comme fondamental par Hadamard et Volterra au moment de la ICM de 1897 à Zurich. Le fait que cette propriété soit essentielle a été souligné par Grothendieck en 1957 dans son article Tohoku. Ces raisons et bien d'autres indiquent que cette opération est centrale à toutes les branches des mathématiques. Afin d'obtenir la propriété d'espace de fonctions (dans les modèles de cohésion qui sont construits comme des catégories de structures dans une base discrète), la structure fondamentale doit avoir la nature des figures et les relations d'incidence plutôt que les algèbres de fonctions (qui peuvent être récupérées naturellement). Mon article de Palerme de 1997 a tenté d'expliquer cette nécessité. Ce papier, comme celui de 1965 d'Eilenberg et Kelly, et comme les publications de Steenrod, Kelly et Brown, mentionnait comme un exemple important les k-espaces basés sur l'utilisation d'espaces compacts comme types de figures. Cependant, aucun de nous n'a mentionné l'origine réelle des k-espaces, dont j'ai appris plus tard au téléphone par David Gale (lorsque j'ai lu sa publication de 1950 dans les Actes de l'AMS). Cette notion de k-espace avait été présentée par Witold Hurewicz dans ses conférences de Princeton à la fin des années 40. En fait, au début des années 40, Hurewicz avait souligné cette nécessité, qui a conduit à la solution partielle par Ralph Fox en 1945 pour le cas des séquences convergentes comme figures. Hurewicz n'avait pas parlé explicitement en termes de catégories, mais dans les lois exponentielles qu'il exigeait, on peut reconnaître immédiatement la caractéristique de l'adjonction.

Il est frappant qu'Hurewicz, qui en 1935 avait initié des avancées fondamentales dans l'étude de la transformation de Grassmann des inégalités en égalités, ait fourni également des contributions fondamentales au développement de l'autre transformation de Grassmann entre les caractères continu et discret. Ses contributions bien connues à la théorie des dimensions (qui utilisait déjà les espaces fonctionnels en 1941), mais aussi sa contribution moins citée à la reconnaissance du rôle fondamental des espaces fonctionnels en général. S'il n'y avait pas eu la tentation de la pyramide à Uxmal, il nous aurait montré davantage de la relation qui existe entre les deux principes de Grassmann.

De l'analyse fonctionnelle aux dérivateurs, le travail d'Alexander Grothendieck a immensément illuminé cette relation.

Le grand livre de Hausdorff “Mengenlehre” était en fait un livre sur la topologie (qui est un élément important de l’étude de la cohésion), illustrant à nouveau l’opposition et la transformation mutuelle entre cohésion et caractère discret, telle qu’elle est abordée dans son travail sur le chaos sous le pseudonyme de Paul Mongre.

Un aspect remarquable de la dialectique continu / discret est que les ensembles abstraits de “lauter Einsen”, terme abstrait pour signifier la cohésion des espaces, peut réciproquement servir de base, via des schémas spécifiques dans leur catégorie, à des structures constituant des modèles pour toutes les sortes d’objets mathématiques, incluant en particulier les espaces eux-mêmes. Comme critères pour juger de l’adéquation de nos axiomes, Myles Tierney et moi avons insisté sur la preuve des constructions de sites et de faisceaux de Grothendieck. Cette preuve a été publiée par Radu Diaconescu en 1975 comme préalable nécessaire à sa preuve de changement de base pour les topos. Autrement dit, pour un morphisme géométrique $E \to U$ satisfaisant une condition-limite, E peut être reconstruit, par un zigzag de trois morphismes géométriques, à partir d’un site interne à U : la première jambe est l’homéomorphisme local donné par la tranche topos sur un objet de U qui paramètre les objets d’une catégorie interne, la seconde est donnée par la comonade exacte à gauche qui adjoint l’action de “pré-faisceaux” des applications de cette catégorie interne, et la troisième est la pleine inclusion des faisceaux pour un opérateur de localité. (Chacune des trois jambes est un cas particulier de la propriété importante de fermeture générale distincte de la classe des topos.) Pour un tel “U-Topos” E, le U lui-même peut être un topos élémentaire, renforçant l’observation de Grothendieck concernant l’ubiquité du principe puissant de relativisation ; il n’est pas nécessaire que ce soit un univers inaccessible, comme dans les exemples originaux de Grothendieck dans SGA4 ; il n’est pas non plus besoin que ce soit la partie discrète d’un topos cohésif, comme souligné ici. Pour chaque topos U, il y a la 2-catégorie Top/U des U-topos ; en effet, faire varier U peut simplifier le traitement de certains problèmes.

La conférence de Varsovie en 1959 par Saunders Mac Lane a en fait introduit l’idée de catégorie enrichie, dans son cas particulier de “catégorie localement petite”. En reflet de la distinction de Bernays classe / ensemble, la croyance s’est développée que les catégories qui ne sont pas localement petites sont “illégitimes”. Je suggère le point de vue alternatif suivant.

Dans la métacatégorie des catégories, il existe des catégories fermées monoïdales et donc d’autres catégories enrichies en elles. Cela montre la nécessité de l’existence d’un catégorie réelle appelée la catégorie des petits ensembles, dans la métacatégorie close cartésienne de toutes les catégories réelles. La catégorie foncteur de deux catégories réelles devrait aussi être réelle, même si bien sûr des propriétés comme la finitude locale ne sont pas conservées. Les catégories potentielles (correspondant aux sous-catégories de cette métacatégorie) peuvent ou non avoir des catégories réelles qui les représentent à équivalence près. L’un des principaux objectifs des mathématiques abstraites est d’illustrer et d’utiliser les transformations mutuelles entre espace et quantité. Les espaces et les quantités d’un intérêt majeur sont “petits”, il est donc raisonnable de définir de petits ensembles satisfaisant la dualité Banach-Isbell et de postuler qu’il existe une catégorie réelle U représentant cette notion de petitesse. Ce postulat semble désormais être l’un des amendements raisonnables à ma tentative de La Jolla de 1965 de résumer en axiomes les caractéristiques-clé utiles d’une métacatégorie de catégories. Alors les catégories de foncteurs des catégories réelles peuvent ne pas avoir de petits ensembles de *hom*, mais elles sont réelles et donc soumises à toutes les propriétés des catégories réelles en général.

Ce que j’ai dit jusqu’à présent a été profondément influencé par le travail d’Alexander Grothendieck. Permettez-moi maintenant d’évoquer ses contributions spécifiques au problème de l’espace tel que je l’ai décrit. On dit souvent qu’il a inventé les topos comme domaines de cohomologie et qu’ils étaient une “généralisation” des espaces topologiques. Mais déjà en 1960, il définissait et utilisait des catégories en géométrie complexe, qui étaient des topos même s’ils n’étaient pas explicitement appelés ainsi. Son célèbre exercice Médaille en Chocolat (dans SGA4) est, comme je le lui ai dit, une clé pour toute la théorie et l’application des topos ; il a exprimé son accord, visiblement heureux que quelqu’un l’ait remarqué. Là, il explique une version (en termes de sites) de la relation entre le gros topos d’un espace et un petit topos du même espace ; les espaces en question sont pris dans une catégorie d’espaces qui pourrait seulement elle-même être le gros topos d’un point. Il s’agit toujours d’un exercice en cours que de clarifier la distinction qualitative entre ces sortes de topos qui apparaissent comme “gros” ou comme “petit” dans ce genre de situation, c’est-à-dire entre des catégories qui représentent une détermination générale de la cohésion et des catégories constituées d’ensembles de variables paramétrés par une sorte d’espace généralisé. Les espaces généralisés incluraient les espaces étales découverts par Grothendieck.

Quelle était la caractéristique indésirable des fondements initiaux des schémas de Dieudonné-Grothendieck, que Grothendieck a rejetés avec tant d'emphase dans sa conférence au colloque de Buffalo de 1973 ?

La structure contravariante avait déjà été considérée par Hurewicz et d'autres comme étant problématique, mais dans la notion d'espace local annelé, cette structure a été disséquée davantage en deux composants en interaction, des ensembles ouverts et des faisceaux d'anneaux locaux. Avec le recul, des problèmes auraient déjà pu être discernés à partir de 1960 lors de l'examen par Serge Lang des EGA. À ce moment-là, Lang est enthousiaste à propos du fait que tant de concepts classiques peuvent être inclus dans le changement de base ; il est également enthousiasmé par la preuve du virtuose Grothendieck que de tels produits fibrés existent réellement. En effet de notre point de vue de calculateurs moins capables, un virtuose était tenu de prendre les ingrédients séparés et de les réassembler en ingrédients similaires pour un schéma de produit ; en particulier, l'espace topologique sous-jacent ne sous-tend pas le schéma produit.

Quelle était la nature de la solution de Grothendieck ?

Dans un topos de foncteurs à valeurs définies sur des ensembles sur la catégorie des algèbres finiment représentables, chaque espace X a, grâce à Yoneda, un "intérieur" dont les objets sont les figures (en général singulières) de formes représentables, avec des relations d'incidence données par des triangles commutatifs. Cela peut être considéré comme une catégorie discrètement opfibrée, mais c'est équivalent à un foncteur à valeurs dans un ensemble. [Je ne suis pas d'accord avec le terme "foncteur de points" pour cela, car c'est un foncteur dont les valeurs réelles incluent toutes les figures de X. Bien sûr, les "points" d'un autre espace associé à X peuvent représenter des figures dans X, mais pour X lui-même, ses points sont juste la restriction de X à la catégorie des extensions de corps fini. Cette catégorie engendre la partie booléenne du grands topos. La définition habituelle de la notion de point est compliquée car elle revient à prendre la limite directe non exacte de ce foncteur restreint de points. En général, ce topos booléen est bien mieux adapté que la catégorie des ensembles abstraits pour servir de "topos de base" dans le cas d'un corps de base non fermé algébriquement. Faire confluer les "figures en X" avec les "points de X" a un air de science-fiction qu'il n'avait probablement pas l'intention d'avoir. Volterra les a appelés les "éléments".] Une meilleure version de "l'espace topologique sous-jacent" est interne au topos Barr-Boole-Galois où atterrit le foncteur de points réels ; ce choix est également nécessaire pour un produit préservant le foncteur des composants.

Entre le site de Galois pour la partie booléenne et le site pour la catégorie des espaces tout entière, il y a la catégorie des algèbres qui sont de dimension finie sur le corps de base ; parce que les espaces représentables correspondants sont les domaines des figures infinitésimales en X, on peut les appeler sites de Leibniz. L'importance de ces figures a été soulignée par Grothendieck et ses collègues en connexion avec les faisceaux tangents, les applications étales, etc. Deux propriétés fortes de cette catégorie par rapport à la catégorie beaucoup plus grande sont les suivantes : les formes de figure générale Y du grand site ont la propriété de Birkhoff relativement aux inclusions $L(X) \to X$ du noyau de Leibniz de tout X ; à savoir Y perçoit ces inclusions comme des épimorphismes au sens où une application infinitésimale $L(X) \to Y$ peut être intégrée d'une façon au plus à une application $X \to Y$. (Cela signifie que l'algèbre des fonctions à valeur Y sur X est une sous-algèbre d'un produit d'algèbres spéciales très petites.). L'autre propriété forte (dont on trouve des traces chez Euler) est que tout sous-topos de l'ensemble qui contient les objets de Leibniz contiendra tous les objets Y du grand site (affine) ; cela découle du fait qu'il y a suffisamment d'espaces de fonctions infinitésimaux pour engendrer ce grand site, par exemple, la ligne est une rétraction de l'auto-exponentielle du domaine des nombres duaux. On peut facilement extraire la sous-catégorie des espaces localement affines, c'est-à-dire les schémas algébriques.

La description ci-dessus d'un topos de Grothendieck d'espaces algébriques sur un corps de base semble fonctionner aussi bien pour un semi-anneau de base. Il a été démontré en détail que cela fonctionne pour les géométries lisses par Wraith, Kock, Reyes, Moerdijk, Bunge, Dubuc, Gago, Lavendhomme, et d'autres. Certaines versions sont susceptibles de fonctionner également pour la géométrie analytique.

En effet, le domaine de l'analyse / géométrie complexe est très avancé depuis 1960 et devrait avoir de nombreuses implications et clarifications des topos. Par exemple, la relation entre le théorème de l'image directe de Grauert comme relativisation de son cas particulier par Cartan-Serre devrait être clarifié par une topos-relativisation explicite. Quand j'ai proposé cela à Grothendieck, il a admis que c'était intéressant, mais a plaidé que son expertise en logique était insuffisante pour fournir une preuve. Plus récemment, l'étude des espaces Brady-hyperbolique a une très forte saveur de topos qui n'a pas encore été rendue explicite (pour autant que je le sache).

Grothendieck a apporté une contribution importante à ce qu'il a appelé la "topologie apprivoisée". Il n'a donné aucune définition générale, mais a insisté (comme je l'avais fait lors de mes exposés à Milan en 1977) sur la découverte de catégories adéquates qui ne contiendraient pas certaines anciennes pathologies qui avaient fait leur retour en cohomologie. À mon avis, les objets tels que les courbes qui remplissent l'espace auraient dû amener une "critique des fondements" plus centrale que les soi-disant paradoxes ; cependant, elles ont apparemment simplement été tolérées pendant de nombreuses décennies, avec une certaine résignation selon laquelle la complexité est inévitable. Mais Grothendieck a hardiment proposé d'utiliser les connaissances accumulées pour construire des catégories moins pathologiques qui suffiraient pour le travail mathématique. Il est arrivé à une proposition impliquant des fonctions réelles-analytiques par morceaux. Pendant ce temps, des logiciens, dont Wilkie, Pillay, MacIntyre et van den Dries, avaient étudié un problème connexe de Tarski, formulé en termes de décidabilité. Ils l'ont résolu en 1986, trouvant également que "l'analyse réelle par morceaux" était un ingrédient-clé, bien que n'étant pas le seul. Ces logiciens ont fini par reconnaître le travail de Grothendieck comme étant lié au leur. On doit attendre inversement le moment où le travail de leur école o-minimale éclairera l'étude plus profonde de l'espace cohésif.

Le travail de Grothendieck a illuminé et fait progresser le travail de Cantor, Grassmann, Volterra, Hausdorff, Hurewicz, Galois, Kan, Eilenberg et Mac Lane et inspiré notre communauté entière ; il continuera d'inspirer et d'orienter les travaux des générations futures.

Commentaires sur le développement de la théorie des topos

F. William Lawvere

Présentation

Résumant quelques points dans le développement de la théorie élémentaire des topos dans ses 30 premières années 1970-2000, cet article historique prépare le lecteur à la publication ultérieure de l'Éléphant de Johnstone (2002) et aux propres avancées de l'auteur lui-même vers des fondements améliorés de la géométrie algébrique dans l'esprit de Grothendieck, mais en utilisant les outils de la logique catégorique et en prenant en compte le thème de la cohésion axiomatique.

Addendum

Un fait important devrait être noté. Il m'était inaccessible au moment d'écrire cet article historique. Il concerne l'origine du concept d'espace fonctionnel qui incarne maintenant l'exemple topologique basique d'une catégorie fermée cartésienne. J'ai cité sept contributeurs à ce sujet à la fin de la section 4. Plus tard, quand j'ai téléphoné à David Gale pour l'interroger au sujet de son article de 1950, il m'a informé qu'en effet, c'était lors de cours à Princeton à la fin des années 1940 que Witold Hurewicz définit et utilisa la notion des k-espaces pour présenter sa solution du problème qu'il avait posé à Fox (et que Fox avait résolu pour le cas séquentiel dans le travail cité ici). Il semble que c'est (directement ou indirectement) Hurewicz qui par cet exemple a inspiré les six autres travaux cités ici.

0. L'outil catégorique appliqué à la géométrie algébrique amène à la naissance des topos

L'unification et la simplification sont nécessaires non seulement pour la dissémination des résultats, mais également pour une avancée cohérente de la recherche dans les différentes branches des mathématiques. Le besoin d'unification et de simplification pour rendre cohérent quelques-unes des nombreuses avancées mathématiques des années 1930 ont amené Eilenberg et Mac Lane [23] à concevoir la théorie des catégories, les foncteurs et les transformations naturelles au début des années 1940. Il est utile de distinguer les catégories générales des catégories linéaires dont l'étude explicite a commencé avec Mac Lane en 1950 [78].

"Les catégories combinant linéarité et exactitude, connues sous le nom de catégories "abéliennes" ont été perfectionnées dans les années 1950 et au début des années 1960. Cette théorie continue de profiter à de nombreuses applications, par exemple à travers l'utilisation des catégories dérivées en analyse. Une étape fondamentale, à mi-chemin de ce développement, a été l'article Tohoku de Grothendieck [42], qui a montré que cette base conceptuelle pour l'algèbre homologique sur un anneau s'applique aussi aux objets linéaires variant comme des faisceaux sur un espace. Ensuite, le fait que les concepts d'exactitude s'appliquent aussi à de nombreuses catégories non-linéaires est devenu graduellement plus connu et utilisé. Le concept des foncteurs adjoints, découvert par Kan (au milieu des années 1950) fut rapidement incorporé comme un élément-clé dans les fondements par Grothendieck de la géométrie algébrique [1] et les nouveaux fondements catégoriques de la logique et de la théorie des ensembles [70, 71]. Grothendieck, et son cercle à l'Institut des Hautes Études Scientifiques près de Paris, a développé au début des années 1960 le concept de topos pour son utilisation en géométrie ; je proposai une simplification de ce concept et des usages supplémentaires à l'Istituto di Alta Matematica à Rome en 1969. Après ce développement initial en 1969-70 en collaboration avec le topologue algébriste Tierney (qui avait indépendamment donné des

Publié initialement dans Développements des mathématiques 1950 - 2000, édité par J-P Pier, pp 715-734, Birkhäuser, Bâle, 2000.
Reçu par les éditeurs le 15 janvier 2014.
Transmis par M. Barr, R. Rosebrugh, et R.J. Wood. Réimpression publiée le 22 mai 2014.
2010 Classification des sujets mathématiques : 03G30, 18B25.
Mots et groupes de mots clefs: topos, théorie des catégories, faisceaux.
Université de l'état de New York à Buffalo

cours sur le besoin de théorie axiomatique des faisceaux), cette théorie des topos simplifiée a été présentée au Congrès International des Mathématiciens à Nice [72]. Des développements plus avant de cette proposition ont amené de nombreux articles et livres mais malgré ces publications, beaucoup d'étudiants ont trouvé difficile de comprendre ce qu'est la théorie des topos, d'où elle vient et où elle va. L'espoir est que la description qui en est brossée ci-après aidera à surmonter cette difficulté.

L'axiome de puissance ensembliste, qui définit les topos parmi les catégories, est présenté en détail dans la section 4 ci-dessous.

Puisque je ne peux fournir ici une description pas à pas, je me concentrerai sur les idées mathématiques, à la fois comme guides pour ceux qui veulent apprendre et développer ces idées, et aussi comme une aide pour ceux qui veulent rechercher les dates et publications. Je souhaite être excusé pour les inévitables omissions. Des versions préalables de cet article ont été lues par Barr, Gabriel, Freyd, Johnstone, Kock, Mac Lane, Ramachandran, Schanuel, et Street, dont les commentaires sont très appréciés.

1. L'analyse fonctionnelle et la topologie algébrique ont besoin d'une maison commune avec un cadre flexible

Le cœur des théories mathématiques est dans la variation de quantités dans l'espace et dans l'émergence de qualité à l'intérieur de ce phénomène. Les branches fondamentales (comme la géométrie différentielle et la théorie de la mesure géométrique) ont donné naissance à (et ont utilisé intensivement) ces deux grandes disciplines que sont la topologie algébrique et l'analyse fonctionnelle. Un grand élan à leur cristallisation a été la théorie électromagnétique de Maxwell-Hertz-Heaviside et les matériaux scientifiques de Maxwell-Boltzmann. Ces deux disciplines ainsi que ces applications ont été rendues explicites très tôt dans le travail de Volterra. Comme cela a été souligné par de Rham à l'attention de Narasimhan [88], c'est Volterra qui, dans les années 1880, non seulement démontra que l'opérateur extérieur de dérivée satisfait $d^2 = 0$, mais prouva également le théorème d'existence locale auquel il est habituellement fait référence de manière erronée en l'appelant le lemme de Poincaré ; ces résultats restent le cœur de la topologie algébrique comme cela est exprimé dans le théorème de de Rham et dans la cohomologie des faisceaux. La théorie de Volterra des fonctions de lignes, présentée lors de ses exposés à Paris en 1912 et ensuite appelée analyse “fonctionnelle”, a été développée assez effectivement par ses étudiants et par Silva et Zorn (comme souligné par Fichera dans [26]), en prenant des ensembles ouverts et des ensembles fermés non comme primitives, mais comme dérivées d'une structure plus fondamentale. Dans la période 1950-1985, cette forme de l'analyse fonctionnelle a été largement négligée, mais elle a été revivifiée dans les années 1980 lorsque quelques-uns de ses problèmes-clefs ont été résolus et ses applications à la physique en dimension infinie ont été réactivées par le travail explicitement catégorique de Kriegl et de ses collaborateurs Frölicher, Nel, et Michor [32], [65], [67], et dans le travail explicitement topos-théorique de Penon, Dubuc, et Bruno [92], [22], [6]

En effet, dans un certain sens, le travail récent en théorie des topos réunit finalement organiquement ces deux brins de Volterra (la topologie algébrique et l'analyse fonctionnelle covariante expliquées ci-après), brins qui avaient longtemps été entremêlés dans :

- le travail de Grothendieck sur les espaces nucléaires [41] et sur les duaux holomorphiques [40] ;

- les résultats de Grauert-Cartan-Serre [38], [13] sur les faisceaux analytiques cohérents (dans lesquels, comme Houzel et Douady l'ont exprimé plus explicitement dans les années 1970 [50], [20], l'analyse fonctionnelle nucléaire bornologique joue un rôle pour établir la finitude de certains nombres de Betti “algebrico-topologiques”) ;

- l'approche micro-fonctionnelle de Sato-Kashiwara [59] de la théorie des ondes.

2. Un cadre logique est d'abord développé pour la logique et la théorie des ensembles

Malgré son origine géométrique, la théorie des topos a dans les dernières années parfois été perçue comme une branche de la logique, en partie à cause de ses contributions à la clarification qu'elle avait permise de la logique et de la théorie des ensembles. Pourtant, l'orientation de nombreux théoriciens des topos pourrait peut-être être résumée plus précisément par l'observation que ce qui est habituellement appelé logique mathématique peut être vu comme une branche de la géométrie algébrique, et qu'il est utile de rendre cette branche explicite en elle-même. Les exemples centraux étudiés par les premiers théoriciens des modèles Birkhoff [5], Tarski [100] et Robinson [94] montrent que la géométrie algébrique en est plutôt l'origine historique, et les avancées faites dans les 15 dernières années par leurs successeurs van den Dries [21], Macintyre [77], et d'autres montrent de façon flagrante la valeur persistante de la géométrie. La logique catégorique montre simplement de façon systématique qu'il n'y a pas besoin d'une terminologie et d'une notation logique séparées, spéciales, puisque l'implication et les quantificateurs sont des foncteurs adjoints de sortes que l'on trouve plus généralement dans les catégories d'ensembles non pré-ordonnés. (Spécifiquement, l'implication est le cas poset de la transformation de l'espace de fonctions qui est fondamental en analyse fonctionnelle, comme cela a été observé par Curry; et la quantification est l'application particulière, aux foncteurs de valeurs de vérité, de l'extension générale de Kan induite par le changement de domaine ([60]). De plus, les modèles eux-mêmes sont des foncteurs [69], puisque ce que les "théories" syntaxiques présentent est plus efficacement vu comme une certaine sorte de petite catégorie. Cette observation a été faite par Makkai et Reyes [83], après des contributions cruciales par Barr concernant les catégories régulières [2] et l'existence de points à valeurs booléennes [31]. Le travail de Joyal [56] et Freyd [30], tournant autour de la découverte, vers 1972, du fait que le théorème de complétude de la logique du premier ordre est une conséquence du théorème de Deligne [17] qui affirme l'existence de points pour les topos cohérents, a également joué un rôle important.

Mais il y a un raffinement clef, par rapport à la logique mathématique booléenne "classique", qui est forcé par la reconnaissance explicite (que la théorie des topos décrit) de la nature cohésive et variable des ensembles. Pour les personnes travaillant en géométrie algébrique et en analyse, il peut apparaître quelque peu excessif de faire un détour par le langage élaboré de Mitchell-Bénabou qui à son tour nécessite la sémantique de Kripke-Joyal pour obtenir en retour le contenu mathématique d'un topos spécifique. (Cette procédure parfois recommandée est strictement analogue au fait de définir un groupe comme étant le quotient du groupe libre qu'il a engendré lui-même, ce qui de façon analogue peut parfois être utile.). La clause-clef, dans cette sémantique, était présupposée dans le titre "*Quantificateurs et faisceaux*" [72], mais le cas linéaire était un théorème dans Godement 1958 [37], et exprimait par exemple, juste en termes de concepts du $20^{\text{ème}}$ siècle, le contenu du théorème d'existence locale de Volterra. Brièvement,

a) la règle d'inférence pour la quantification existentielle est juste une expression symbolique de la propriété universelle de l'image géométrique d'une application (pas seulement dans la catégorie des ensembles où l'axiome du choix tient, mais également dans n'importe quel topos) tandis qu'

b) une figure dans une telle image vient en fait seulement localement des images dans le domaine de l'application.

Par exemple, l'image de l'application exponentielle complexe est le plan entier privé d'un point, mais les logarithmes complexes n'existent que localement. Ce théorème d'existence locale serait trivial si tous les objets étaient projectifs, comme l'axiome du choix le nécessiterait. Longtemps avant ce cadre logique, l'expérience mathématique d'utiliser les faisceaux en géométrie et analyse avait produit de nombreuses définitions correctes qui étendaient les concepts des constantes aux variables réelles (et Bénabou [4] et Joyal [56] avaient formalisé cette idée). Par exemple, le concept d'anneau local (Hakim [48]), le concept d'algèbre bornologique convexe multiplicativement (Houzel [49]) et de nombreux autres exemples ont été faisceautisés en insérant la phrase "il existe un recouvrement sur lequel..." juste au bon endroit dans la définition. De la même façon, Grothendieck et d'autres reconnaissaient de façon infaillible quelles sortes de structures étaient "préservées par tous les foncteurs qui préservent les limites finies et les colimites arbitraires". (Une liste très impressionnante fut produite par Grothendieck [47] durant son séjour en 1973 à Buffalo; durant cette même visite, il plaida pour l'abandon de sa définition précédente compliquée de "schéma", mais malheureusement, l'alternative plus simple qu'il proposa ne semble pas avoir trouvé son chemin dans les livres). Pourtant, les mathématiciens moins expérimentés ont trouvé utile une présentation explicite de la logique positive qui formalise ces définitions et ces classes de structures.

Le rôle fondamental de la logique positive (aussi connue sous le nom de logique cohérente ou logique géométrique) suggère un raffinement de la présentation standard de la logique des prédicats. Les prédicats sont des cadres pour les sous-objets, et la possibilité basique, pour deux sous-objets d'un même objet (ou l'univers du discours), que le premier soit inclus dans le second, est logiquement l'assertion qu'un prédicat en implique un autre. Dans un topos, les sous-objets d'un domaine donné forment un treillis distributif, reflétant logiquement en termes de conjonction et disjonction les opérations sur les prédicats, satisfaisant des relations d'adjonction adéquates (les règles d'inférence) relatives à l'implication. L'implication, la conjonction finie, et la disjonction sont préservées par la substitution selon une application de changement de (nom de) domaine arbitraire. La substitution signifie l'image inverse de sous-objets, une opération qui a l'"image" comme adjoint à gauche ; la dernière est connue logiquement comme quantification existentielle le long de l'application. La logique positive n'exclut pas explicitement la plus haute opération de quantification universelle (ni ses cas particuliers d'implication ou de négation) même si les adjoints à droite à la substitution interne sont aussi présents dans tout topos, parce que ces adjoints à droite ne sont typiquement pas préservés par la substitution plus générale dans une application arbitraire continue entre topos. En effet, ces applications continues bénéficiant d'une telle préservation additionnelle (de la logique du premier ordre avec quantificateurs alternés) sont juste les applications continues. Ainsi, bien que dans la logique du premier ordre, l'implication entre deux prédicats puisse être affirmée de façon équivalente en disant que leur implication quantifiée universellement a la propriété d'être "nulle part vraie", en logique positive, les relations fondamentales restent les implications binaires, une pour chaque domaine (incluant les produits cartésiens des domaines de base). D'un point de vue positif, l'élimination des quantificateurs est liée à la définissabilité des quantificateurs, au sens où quelques théories favorisées ont des axiomes suffisamment forts pour permettre carrément la définition de la quantification universelle (e.g. l'implication et la négation) en fonction des opérations positives. Pourtant, si nous nous restreignons aux topos booléens, la logique positive est juste aussi expressive que la logique du premier ordre, en autorisant des prédicats additionnels ; notamment, chaque occurrence d'une formule négative dans un axiome peut être vue comme un nouveau prédicat primitif, caractérisé par deux axiomes du treillis comme complémentaire approprié.

L'expression "topos élémentaire" est un reliquat, qui porte à confusion, de la relation à la logique, le terme "élémentaire" ayant été utilisé par certains logiciens comme synonyme de "premier ordre". L'origine de cette expression réside dans le fait utile que le concept de topos au sens de Lawvere-Tierney est définissable dans un langage logique bien plus profondément que dans le langage infini du premier ordre utilisé à l'origine par Grothendieck et ses étudiants. (De façon interne, tout topos permet l'interprétation de concepts du premier ordre, comme expliqué ci-dessous, mais c'est un autre sujet). Mais en fait, ce langage externe nécessaire est vraiment très éloigné de celui du premier ordre, étant essentiellement équationnel, même les opérateurs logiques nécessaires à ce niveau seulement pour définir les classes spéciales de topos (comme les topos à deux valeurs ou les topos satisfaisant l'axiome du choix).

3. Espaces à paramètres et topos de Grothendieck relatifs au topos de base

Les topos originaux de Grothendieck peuvent être situés [18] dans la classe plus large (des topos au sens "élémentaire") en utilisant un cas particulier du concept de relativisation de Grothendieck, de la façon suivante : une application continue (ou un morphisme géométrique) d'un topos à un autre est un foncteur avec un adjoint exact à gauche. Pour un topos fixé S, un S-topos est un topos équipé d'une application continue vers S et présenté de façon liée comme une catégorie S-cocomplete ; une application de S-topos est un triangle adéquat quasi-commutatif d'applications continues de sommet inférieur S (ce qui implique que l'adjonction, dans l'application entre les deux topos, est elle-même définie sur S). Alors si S s'avère être un univers d'ensembles abstraits, la catégorie des S-topos est équivalente à celle des S-topos au sens de Grothendieck. Dire qu'un topos est un univers d'ensembles abstraits consiste à dire que, pour des objectifs mathématiques, il satisfait des propriétés supplémentaires de 2-valuations et l'axiome du choix (ce qui implique que tous ses treillis de sous-objets sont booléens) ; des axiomes de forte infinité peuvent aussi être imposés à S si besoin, parce qu'ils sont aussi des invariants catégoriques. Pourtant, le programme persiste de refonder les mathématiques relativement à un topos de base arbitraire qui satisfait des contraintes plus faibles. Les théorèmes dans une telle refonte des mathématiques (en plus d'avoir des preuves plus explicites) ont souvent un contenu d'effet plus général que les théorèmes classiques et sont stables sous des variations adéquates continues des paramètres, quand S est un topos de faisceaux sur l'espace des paramètres. De plus, des assertions plus simples peuvent être fournies si le matériau intervenant dans la définition de ce S particulier peut être supprimé. En d'autres termes, une référence à des classes "petites" peut souvent être interprétée dans un sens plus large que seulement dans un sens simplement quantitatif, puisqu'être paramétrable par un objet de la base S peut être en fait une qualité riche.

Existe un théorème [18] selon lequel tout S-topos peut être reconstruit de S par un zigzag à trois étapes.

D'abord, des paramètres additionnels sont ajoutés d'un S-objet choisi, amenant un homéomorphisme local $S' \to S$, i.e. une application continue dont le foncteur inverse préserve effectivement la construction des puissances d'ensembles ; deuxièmement, une "surjection" localement connexe $S' \to S''$, i.e. une application continue dont le foncteur d'image inverse a un S-adjoint sur la gauche et est fidèle, ajoute l'action (parmi les niveaux de paramètres) d'une S-catégorie interne ; et finalement, une "inclusion" $S''' \to S''$, i.e. une application continue dont le foncteur en arrière est plein et fidèle, est restreinte aux objets de S'' qui sont compatibles avec une forme spécifique de recouvrement. La dernière étape consiste à exiger que les objets de S''' satisfassent des axiomes particuliers disjontifs et existentiels selon la forme qu'ils héritent de S''. Ce théorème élémentaire inclut comme cas particulier le théorème caractérisant les topos de Grothendieck via des faisceaux d'ensembles sur les petits sites généraux. L'importance de faire de la théorie des topos sur un topos de base général S (même si S est restreint à être un topos de Grothendieck, c'est-à-dire même si l'on n'est pas concerné par l'analyse non-standard, les résultats d'indépendance en théorie des ensembles, ou la théorie de la récursion d'ordre plus élevé), est assez analogue à l'importance, déjà soulignée par Grothendieck, de faire de l'algèbre commutative sur un anneau de base arbitraire ; la comparaison des ensembles à plus de variables avec ceux à moins de variables émerge et est similaire à la comparaison analogue sur les quantités variables.

Une autre caractérisation conceptuelle des S-topos est que ce sont des objets lex-total dans le domaine de grandes catégories S-paramétrées [98], [99]. Ici, une telle catégorie est dite totalement cocomplète si son plongement de Yoneda a un adjoint à gauche. Cette notion, due à Street et Walters [99], a des applications, décrites par Kelly [62].

"La notion d'une famille d'espaces paramétrée par un espace est plus efficacement traitée par les géomètres via une application unique vers l'espace des paramètres : les espaces dans la famille sont les fibres de l'application ; la relativisation par changement de base de Grothendieck s'applique dans tout topos donné pour amener, pour un objet donné, un nouveau topos de familles paramétré par cette base donnée. L'opération de somme (ou total) d'une famille peut seulement signifier l'adjoint à gauche de l'inclusion des familles constantes, i.e. au changement de base près ; dans ce cas, l'adjoint à gauche est simplement le foncteur qui oublie l'application qui dit comment le tout est distribué sur la base. Cette signification tautologique des sommes est assez efficace habituellement en mathématiques puisque les familles que l'on obtient ne sont pas arbitraires, mais sont habituellement a priori bornées. La même idée s'applique en théorie des ensembles, excepté que cette quête d'ordinaux encore plus grands amène la question de l'existence de familles arbitraires de petits ensembles indexés par un petit ensemble. Il y a deux sortes de réponses à cette question sous la forme d'axiomes de grands cardinaux : si par familles, on entend les familles définissables dans le langage du premier ordre dont les quantificateurs alternés parcourent la catégorie des ensembles que nous sommes en train de décrire, alors l'affirmation de leur existence est essentiellement équivalente au schéma de remplacement, de telle façon que la catégorie est équivalente à une catégorie dérivée d'un modèle de théorie des ensembles complète de Zermelo-Fraenkel. (L'inverse de l'équivalence est l'interprétation classique de Specker des "ensembles" ZF comme structures ressemblant à des arbres, également décrite dans l'appendice à certaines éditions des SGA4.). D'un autre côté, si par familles, on entend familles "arbitraires" (on peut donner à cela une interprétation rationnelle en imaginant notre topos comme étant un objet d'une catégorie spéciale dans un autre topos "plus grand"), alors l'affirmation qu'ils sont chacun dérivables comme fibres d'une application unique dans notre topos est équivalente à la propriété d'"univers de Grothendieck" : notre topos est équivalent à un objet catégorie qui a une cardinalité fortement inaccessible au sens du topos plus grand. L'inaccessibilité forte est habituellement définie en termes d'existence de produits de petites familles de petits ensembles, mais cela découle du fait que notre topos a des espaces d'application parce que le "produit" des familles de fibres d'une application est juste l'ensemble des sections de l'application. Bien sûr, le foncteur produit est défini comme étant l'adjoint à droite de l'inclusion des familles constantes, i.e. à changement de base près. Puisque l'adjoint à droite existe pour tout topos (où, pourtant, il consiste en les sections qui sont lisses au sens où elles sont elles-mêmes les applications dans le topos), on continue à l'appeler le produit infini et même à le noter Π ; il ne fait aucun doute qu'il n'est pas fortuit que Weil ait utilisé plus tôt Π pour noter un cas particulier de cette construction qui émerge en géométrie algébrique.

4. Espaces de fonctions et ensembles de puissance cohésive

L'avancée majeure dans la formulation du concept de topos par Lawvere-Tierney après celle de Grothendieck-Giraud est la reconnaissance explicite de la représentabilité interne des ensembles de puissances (même dans les catégories d'ensembles non abstraits comme les ensembles cohésifs ou les ensembles de variables). Ainsi la puissance exploitée par Cantor, Dedekind, et Hausdorff et d'autres pionniers dans le cas des ensembles abstraits est devenue disponible également pour une utilisation directe en géométrie et analyse. Les applications continues (ou les morphismes géométriques) dans la 2-catégorie des topos ne préserve pas nécessairement sa structure centrale modulo un isomorphisme, mais seulement modulo une application naturelle. (Ce phénomène de "relâchement" serait étrange pour des catégories ordinaires, mais il est commun pour les autres 2-catégories, telles que les catégories fermées). Parce que les ensembles de puissances sont des objets injectifs, leur algèbre peut fidèlement refléter la géométrie (comme cela a été montré en détail dans la thèse de Mikkelsen [84]) ; inversement, la plupart des topos n'ont pas assez d'objets projectifs, ce qui implique que la règle de commutation pour la quantification existentielle interne, comme souligné en (a) et (b) à la section 2, est vraiment nécessaire pour faire avancer les calculs. La manière dont la simple existence du foncteur de puissance ensembliste implique les propriétés nécessaires des topos a été montrée de manière élégante par Paré [91]. Depuis, la définition plus simple des "topos" a été "categorie avec ensemble de puissances".

La construction d'ensemble de puissances peut être utilement vue comme divisée en deux parties : d'abord, il y a une construction d'un espace d'application (discuté ci-dessous) qui est essentielle pour le calcul des variations et pour l'analyse fonctionnelle en générale (et pour la physique continue), mais qui lorsqu'elle est appliquée à un codomaine spéciale amène l'espace de l'ensemble des puissances de l'espace du domaine. (En géométrie différentielle synthétique [64], avec son application projetée dans la dynamique continue [73,74], l'application de la construction de l'espace de fonctions aux domaines spéciaux, infinitésimaux, amène le foncteur fibré tangent et le foncteur fibré supérieur[1] qui est d'une forme très facile à manipuler.).

Deuxièmement, le domaine spécial, spécifiquement un espace de valeur de vérité ou un classifieur de sous-objets, est supposé. Cela "objectifie le subjectif" dans le sens où cela postule l'existence d'un objet qui paramètre parfaitement les valeurs de vérité des jugements de la forme "telle et telle figure appartient à tel et tel sous-objet de son codomaine". Par une méthode bien comprise par les pionniers de la théorie des ensembles et formalisée pour les topos généraux par Freyd en 1972 [31], cela implique en retour (si le topos contient au moins un objet qui n'est pas Dedekind-fini) que le processus subjectif d'itération peut aussi être parfaitement paramétré (par une algèbre de Peano absolument libre ; la méthode utilise le fait que la classe de toutes les sous-algèbres contenant un point donné est paramétrable et que toute classe paramétrable de sous-objets d'un objet donné a une intersection, ces deux faits découlant aisément de la propriété universelle des ensembles de puissances). Mais en retour, la paramétrabilité de l'itération complète implique quelques conséquences physiquement contre-intuitives comme la courbe remplissant l'espace de Peano et des conséquences méthodologiquement gênantes comme le théorème d'incomplétude de Gödel. Grâce à un travail détaillé récent de van den Dries [21] et d'autres, une sorte de travail qui avait été en partie prévu par Grothendieck dans une discussion que nous avions eue en janvier 1982), il est maintenant connu que de telles conséquences peuvent être dérivées de cette manière : un topos adéquat peut être engendré par une sous-catégorie qui contient suffisamment d'espaces et d'applications raisonnablement géométriques, mais qui ne contient pas les algèbres infinies discrètes de Peano ; bien que ces dernières apparaissent comme sous-objets (des espaces géométriques) définis par les équations de vérité, elles ne peuvent pas être définies par des équations valuées dans des espaces dans la catégorie géométrique elle-même.

La première partie de la construction de l'ensemble de puissances, la notion d'espace d'applications, a semblé objectivement inévitable depuis que Bernoulli et d'autres ont développé le calcul des variations. Notamment, si un intervalle de temps, un corps, et un espace ordinaire peuvent être modélisés comme objets d'une catégorie, alors l'espace de tous les chemins dans l'espace, paramétré par l'intervalle de temps dans les chemins autorisés par la catégorie, devrait aussi être un objet, comme devrait l'être l'espace de tous les déplacements autorisés du corps dans l'espace. Alors la quantité qui dépend de la position, comme l'énergie potentielle, ou bien une quantité qui dépend du chemin, comme la vitesse au carré, pourraient être traitées comme une autre application dans la catégorie. Ainsi les trois descriptions d'un mouvement comme un chemin dans l'espace des positions, une position dans l'espace des chemins, ou simplement une application sur l'espace ordinaire d'un espace de couples (particule, instant) sont toutes équivalentes et en effet, l'équivalence (pour tous ces trois objets dans le topos) est l'axiome définissant l'espace des applications comme foncteur adjoint. Typiquement, il y a une notion adéquate de "chemin" généralisé, de telle façon qu'une fonction admissible est juste une fonction qui envoie les chemins sur les chemins de

[1]higher jet bundle

façon covariante ; ceci était un concept-clé de l'école de Volterra en analyse fonctionnelle [24]. Le fait que les espaces d'applications respectant ce simple axiome d'adjonction ne soient pas généralement présents dans la catégorie habituelle des espaces topologiques avait déjà été remarqué par Fox [27], Kelley [61], Brown [8], Spanier [96], Steenrod [97], et Day [16] et plus tard par Frölicher [32], tous ayant proposé des catégories plus ou moins orientées chemins pour réaliser cette construction fondamentale.

5. Quelques classes d'exemples

Comment construire des exemples de topos ? Bien sûr, les faisceaux d'ensembles sont nécessaires comme base pour les catégories de faisceaux abéliens sur des espaces analytiques ou algébriques particuliers comme ont pu les traiter Leray, Oka, Cartan et Serre. En effet, c'est un axe de développement intensivement poursuivi aujourd'hui dans les équations différentielles partielles, mais pour connaître l'histoire de ce domaine, je renvoie à Gray [39] et Houzel [51]. Classiquement, un faisceau sur un espace est un foncteur contravariant (avec condition de recollement) sur un ensemble partiellement ordonné de régions de l'espace. Mais les topos de foncteurs à valeurs sur des ensembles qui ne sont pas partiellement ordonnés sont plus typiques. Considérons par exemple le topos des ensembles simpliciaux qui a été utilisé de manière très répandue en topologie algébrique depuis 1950, et dont le rôle classifiant particulier est expliqué dans Mac Lane et Moerdijk [81] ou bien le topos des foncteurs des anneaux vers les ensembles qui a été la base de la définition simplifiée par Cartier [14] des groupes algébriques et qui a été le précurseur de presque toutes les constructions de modèles particuliers de la géométrie différentielle synthétique [73, 87]. Un traitement détaillé d'un topos de cette sorte qui contient tous les espaces analytiques comme sous-catégorie pleine a été fourni par Grothendieck dans le séminaire de Cartan sur les familles d'espaces analytiques de 1960 [43], même avant que la définition générale par Grothendieck des topos n'ait été cristallisée par Giraud en 1963 [36].

A une position de généralité intermédiaire entre le topos d'espaces généraux et le topos de faisceaux sur un espace classique particulier, on trouve l'idée de topos de faisceaux sur un espace généralisé ; on connaît mieux le fait que les faisceaux sur une sorte particulière d'espace, sur lequel le théorème de fonction implicite ne s'applique pas, ne sont pas complètement déterminés par leur restriction à des sous-régions. Le fait que le théorème de fonction implicite ne s'applique pas en géométrie algébrique est devenu une vertu par la construction brillante de Grothendieck du topos étale d'un espace algébrique, basé sur un site particulier qui n'est pas un espace partiellement ordonné bien qu'il soit encore assez spécial. L'idée est encore plus ancienne d'un espace généralisé équipé non seulement d'un ensemble partiellement ordonné de régions ouvertes, mais également d'une action par les homéomorphismes d'un groupe. Cette catégorie amène à une 2-sous-catégorie de topos qui unifie très efficacement le développement complet qui a commencé avec la découverte par Hurewicz-Hopf de l'effet du groupe fondamental d'un espace sur son homologie [79], en fournissant un univers dans lequel l'espace, ses espaces couvrant, et le groupe fondamental lui-même sont sur un pied d'égalité et sont connectés par des applications, et pour lesquels la cohomologie de l'espace et du groupe sont strictement les instances de la même construction, notamment celle de la catégorie dérivée de l'abélianisation d'un topos. (Les actions d'un groupe sur les ensembles constituent les objets du genre le plus simples des topos booléens.) Les résultats de Joyal et Tierney [58] et de Joyal et Moerdijk [57] étendent ces idées pour donner un groupoide localique : la présentation du groupoide du topos général, un peu comme l'espace général, devrait classiquement être présentée comme le quotient d'un espace de dimension nulle ; comme Mac Lane et Moerdijk l'ont montré dans leur résumé utile du domaine [82], cette présentation étendue n'a pas encore été analysée ni non plus appliquée. Johnstone [54] en démontrant quelques théorèmes de représentation puissants concernant ces extensions de la notion d'espace généralisé, a en effet montré que le récit philosophique commun dans les années 1970 aux topos (basés sur la variation paramétrée et la logique interne) est trop restrictif, ce qui m'a amené dans cet article à baser mon récit sur les relations dialectiques entre la cohésion et la variation et entre la logique interne à un topos et interne à une catégorie de topos.

6. Quelques développements récents

Bien que le $25^{\text{ème}}$ anniversaire de la théorie “élémentaire” des topos (ainsi que le $50^{\text{ème}}$ anniversaire de la théorie des catégories elle-même) ait été célébré à Halifax en 1995, et bien que les fondamentaux en semblent bien établis dans de nombreux articles et livres précédemment mentionnés, de nouvelles avancées qualitatives continuent de voir le jour. Un tel exemple est le travail de Funk, et de Bunge-Funk et Bunge-

Carboni [33], [12], [11].

À la suite d'un exposé à Oberwolfach en 1966 dans lequel j'avais proposé une théorie des distributions (pas seulement dans mais également) sur les topos de préfaisceaux, en 1983 à Aarhus, j'ai posé quelques questions concernant les distributions sur les S-topos. La base de la définition et des questions est une paire d'analogies avec des théories connues (l'algèbre commutative et la théorie de la mesure) pour les quantités variables, couplée avec le fait qu'il y a d'importants exemples de "quantités" variables S-valuées dont les domaines de variation sont les S-topos. On prend les faisceaux sur le topos pour les quantités variant intensivement, i.e. simplement les objets de la catégorie. (Bien sûr, le terme topos signifie "lieu" ou "situation", mais Grothendieck traite la situation générale en traitant plutôt la catégorie des quantités S-valuées qui varient continument sur elle, de la même façon qu'un K-schéma affine est décrit en traitant la K-algèbre des fonctions sur lui. Peut-être que pour éviter la confusion, une notion différente aurait dû être utilisée, E pour la situation et $C(E)$ pour la catégorie des faisceaux sur E, mais la pratique notationnelle a utilisé le même symbole pour les deux, même si fonctoriellement, elles sont opposées de la même façon que X et $C(X)$ le sont en topologie classique. En topologie classique, il n'y a pas d'analogue strict, pour les fonctions continues réelles ou complexes $C(X)$, à l'opération spatial en avant adjoint à droite de l'homomorphisme f^* qui ramènent en arrière les fonctions continues le long d'une fonction continue générale f.). Ces quantités à valeurs sur des ensembles peuvent être ajoutées via des colimites S-paramétrées dans le topos, et elles peuvent être multipliées via les limites finies des faisceaux. Un point est juste une application continue vers le S-topos donné depuis S lui-même (qui est bien sûr l'objet terminal dans la 2-catégorie des S-topos); la partie image inverse du point (ou l'évaluation en le point) est un foncteur qui préserve à la fois l'"addition" et la "multiplication".

Ainsi nous poursuivons le début de l'analyse et définissons une distribution ou une quantité extensivement variable sur un S-topos comme étant une fonction continue linéaire ou un point généralisé, i.e. un foncteur vers S qui préserve les S-colimites, mais pas nécessairement les limites finies. Par exemple, étant donnée une petite catégorie C dans S, les actions à gauche de C sur les objets de S est un S-topos de fonctions dont la catégorie de distributions correspondante ou les processus d'intégration est juste la catégorie S-cocomplète des actions à droite de C sur les objets de S (par un cas particulier du théorème de Kan [60], [35]). Il est facile de voir que dans cet exemple particulier, où aucun recouvrement de Grothendieck n'intervient, la réponse à la question suivante est affirmative. Y a-t-il, pour tout S-topos donné E un autre topos $M(E)$ dont les points sont juste les distributions sur E ? Cette idée géométrique de l'espace de toutes les mesures sur un espace donné peut être décrite selon l'analogie de l'algèbre commutative comme algèbre symétrique, c'est à dire, pour une catégorie S-cocomplète adéquate, est-il toujours possible de lui adjoindre des produits finis (et plus généralement des produits fibrés) d'une manière libre compatible avec la distributivité pour obtenir une catégorie qui est la (catégorie des faisceaux sur) un S-topos ? Cette formulation relativise et renforce l'idée de $M(E)$, de telle façon que comme tous 2-adjoints, M est unique à équivalence près s'il existe.

La question de l'existence semblait sérieuse, puisqu'il est connu qu'il n'y a en général pas d'espace correspondant $F(E)$ des quantités intensives : alors qu'il y a un topos facile à décrire [104] $F(1) = S(X)$ sur S qui est l'"algèbre des polynômes" ou la "ligne affine" dans lequel les S-morphismes vers lui depuis tout S-topos E classifient précisément tous les faisceaux sur (les objets dans) E, des espaces de fonctions existent dans Top$/S$ seulement pour les exposants "localement compacts" E (i.e. seulement [55] pour les rétractions de topos cohérents). En 1995, Bunge a montré que $M(E)$ existe comme S-topos pour tout S-topos E, une preuve plus élégante ayant été donnée par Bunge et Carboni dans [11]

Quels exemples de distributions pouvons-nous nous attendre à trouver ? Pour tout S-topos localement connexe A, il y a par définition un adjoint à gauche de l'adjoint à gauche de l'application structurelle vers S ; cet adjoint à gauche supplémentaire ou foncteur d'"ensemble de composants reliés" est alors automatiquement une distribution sur A qui pourrait peut-être être pensée comme étant la mesure de comptage puisqu'elle est invariante sous tous les automorphismes de A (et même sous tous les endomorphismes essentiels de A). Maintenant, comme avec toute doctrine de quantité extensive, les distributions peuvent être envoyées en avant selon n'importe quelle application continue entre topos, en composant simplement ici le processus d'intégration avec la partie image inverse de l'application. Les résultats remarquables de Funk incluent le fait que toute distribution sur n'importe quel E est le push forward selon une application, pour un certain A localement connexe, de la mesure de comptage des composants sur A. Parmi tous ces A localement reliés sur E qui représentent ainsi une distribution donnée sur E, il y en a un unique le plus proche de E ; la relation de celui-ci en particulier vers E s'avère être, selon le travail de Bunge et

Funk, topos-théoriquement identique à celui de la propagation complète sur E, une notion découverte par Fox [28] dans son investigation topologique des recouvrements ramifiés. D'autres relations avec la topologie classique continuent d'être découvertes, par exemple la description par Plewe d'une large classe d'applications de descente comme triquotients au sens de Michael [93], [85], également présentée lors de la célébration à Halifax.

7. Depuis et vers la physique continue

Quel a été l'élan qui a nécessité la simplification et la généralisation du concept de topos de Grothendieck, si en effet l'application à la logique et à la théorie des ensembles n'étaient pas décisives ? Tierney avait souhaité que la théorie des faisceaux soit axiomatisée pour être utilisée de manière efficace en topologie algébrique. Ma propre motivation venait de mon étude initiale de la physique. Les fondements de la physique continue des matériaux, dans l'esprit de Truesdell, Noll, et d'autres, nécessitaient des idées physiques puissantes et claires qui avaient malheureusement été submergées par un appareil mathématique incluant non seulement les séquences de Cauchy et les mesures additives dénombrables, mais également des choix ad hoc de graphiques pour les variétés et de limites inverses des espaces de Hilbert Sobolev, pour obtenir pour atteindre les espaces nucléaires simples de quantités variant intensivement et extensivement. Mais, comme le regrettait Fichera [25], tout cet appareil fournissait souvent un ajustement très incertain aux phénomènes. Cet appareil pouvait s'avérer utile dans la solution de certains problèmes mais ne nécessitait-il pas que les problèmes eux-mêmes et les axiomes nécessaires soient exprimés d'une manière directe et claire ? Et cela ne pouvait-il pas mener à une solution plus simple et tout aussi rigoureuse ? Ce sont à ces questions auxquelles j'ai commencé d'appliquer la méthode des topos dans mes exposés en 1967 à Chicago [73], [74]. Il était clair qu'un travail sur la notion de topos elle-même serait nécessaire pour parvenir à ce but. J'ai passé l'année 1961-62 avec les logiciens de Berkeley, croyant qu'en écoutant les experts des fondements pourrait être le chemin à emprunter pour clarifier les questions des fondements. (Peut-être que mon premier professeur Truesdell avait eu une conviction similaire 20 ans plus tôt quand il avait passé une année [15] avec les logiciens de Princeton logicians.). Bien que ma croyance se tempère au fur et à mesure, j'ai acquis des connaissances à propos de constructions telles que le forcing de Cohen qui semblait également nécessiter une simplication pour qu'un plus grand nombre de personnes puissent la comprendre suffisamment pour la faire avancer davantage. Ainsi la théorie (comme je l'avais proposé à Rome en 1969, et expliqué à l'ICM de 1970) a été d'abord appliquée par Tierney [101] et Bunge [9] à des questions comme l'indépendance de l'hypothèse du continu et la conjecture de Souslin.

En effet, le rôle-clef de l'ensemble de puissance (et la non importance relative pour les mathématiques de l'espace et de la quantité du schéma de remplacement) avait clairement émergé d'une étude des nombreuses reformulations par Scott de la théorie des ensembles du milieu du siècle. Mais la découverte clef rapportée lors de l'exposé à Rome (après avoir été travaillé au Forschungsinstitut Eckmann à Zurich) a été que non seulement un foncteur de puissance ensembliste P existe de manière non ambigue dans un grand nombre de catégories émergeant mathématiquement, mais que toute topologie de Grothendieck, i.e. toute notion raisonnable de "recouvrement" préféré permettant une restriction aux objets "faisceaux" satisfaisant une disjonction supplémentaire ou des conditions "existentielles", est exprimable comme une seule application dans une telle catégorie, en effet comme un endomorphisme de l'objet-vérité $P1$ qui peut être considéré subjectivement comme un opérateur modal du type "il est localement vrai que...".

Cette observation, avec l'axiomatisation précédente de l'adjoint des espaces de fonctions, a rendu clair le fait qu'en travaillant au niveau des topos, presque toutes les constructions et assertions nécessitent seulement un langage équationnel algébrique essentiellement finitaire pour la formalisation, les langages d'ordres supérieurs infinitaires avec alternances de quantificateurs de Frege externes n'étant pas nécessaires, non seulement pour les axiomes de la théorie générale d'un topos, mais également pour particulariser de nombreuses sortes très spéciales de topos, comme celles qu'on trouve en combinatoire et en géométrie différentielle.

L'opérateur de négation-de-la-négation dans la logique de Heyting a été facilement vu comme satisfaisant l'axiome de Lawvere-Tierney et est ainsi un exemple particulier de topologie de Grothendieck valable dans tout topos, il n'est pas seulement central à des constructions qui "forcent" des résultats d'indépendance en théorie des ensembles et qui extraient la partie minimale dense [52] d'un espace en topologie qui consiste en les sous-corps substantiels [89], [74] en physique continue (tous ceux-ci intervenant juste dans le cas d'un topos avec site partiellement ordonné), mais il permet une formulation très succincte de la condition qu'un topos satisfait le Nullstellensatz de Hilbert, exprimant le rôle important de la théorie de Galois en dimension zéro dans la géométrie algébrique comme un tout. Notamment, les faisceaux pour la double négation, qui dans un certain sens forment la partie booléenne d'un topos arbitraire, constituent, dans le cas d'un topos engendré tous les espaces algébriques définis sur un corps de base donné, le topos classifiant des corps d'extension algébrique de la base (ce sous-topos est peut-être une entité plus traitable que la fermeture algébrique qui existe seulement comme condensation rigidifiée non canonique). Le Nullstellensatz concerne ces quelques topos dans lesquels tous les objets non vides ont des figures zéro-dimensionnelles, i.e. ces points dont les domaines sont les compagnons dialectiques de tels faisceaux booléens [75].

Quelques aspects géométriques du programme de 1967, tels que le rôle des espaces d'applications des objets infinitésimaux, furent travaillés sous le nom de géométrie différentielle synthétique par Wraith [104], Kock [64], Reyes [87], Bunge et Gago [10], Dubuc [22], Yetter 105], Penon [92], Bruno [7], Moerdijk [87] et d'autres. Quelques livres traitant de la théorie des topos simplifiés (Mac Lane et Moerdijk étant le texte le plus récent et le plus lisible) avec les trois excellents livres de géométrie différentielle synthétique [64], [87], [68] fournissent une base solide sur laquelle un traitement plus avancé de l'analyse fonctionnelle et le développement nécessaire de la physique continue peuvent être construits.

Bibliographie

[1] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des Topos, SGA 4*, Seconde édition, Springer Lecture Notes in Math. **269** et **270**, 1972.

[2] M. Barr, *Non-abelian full embedding: outline.* Actes, Congrès International, **1** (1970) 309-312.

[3] M. Barr, *Toposes without points*, J. Pure Appl. Algebra **5** (1974) 265-280.

[4] J. Bénabou, *On a formal language for topos theory*, cours non publié, Université de Montréal, avril 1973.

[5] G. Birkhoff, *Subdirect Unions in Universal Algebra*, Bull. Amer Math. Soc. **50** (1944) 764-768.

[6] O. Bruno, *Logical opens of exponential objects*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **26** (1985) 311-323.

[7] O. Bruno, *Vector fields on function spaces in well-adapted models of synthetic differential geometry*, J. Pure Appl. Algebra **45** (1987) 1-14.

[8] R. Brown, *Function Spaces and Product Topologies*, Quart. J. Math. Oxford (2) **15** (1964) 238-250.

[9] M. Bunge, *Topos theory and Souslin's hypothesis*, J. Pure Appl. Algebra **4** (1974) 159-187.

[10] M. Bunge et F. Gago, *Synthetic aspects of C^∞-mappings, II: Mather's theorem for infinitesimally represented germs*, J. Pure Appl. Algebra **55** (1988) 213-250.

[11] M. Bunge et A. Carboni, *The symmetric topos*, J. Pure Appl. Algebra, **105** (1995) 233-249.

[12] M. Bunge et J. Funk, *Spreads and the symmetric topos*, J. Pure Appl. Algebra **113** (1996) 1-38.

[13] H. Cartan et J.-P. Serre, *Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes*, C. R. Acad. Sci. Paris **237** (1953) 128-130.

[14] P. Cartier, *Groupes algébriques et groupes formels*, Colloq. Théorie des groupes algébriques, Bruxelles, Librairie Universitaire, Louvain, Gauthier-Villars, Paris (1962) 87-111.

[15] A. Church, *Introduction to mathematical logic* (notes by Truesdell) Princeton, 1956.

[16] B. Day, *On the relationship of Spanier's quasitopological spaces to k-spaces*, M.Sc. thesis, University of Sydney, 1968.

[17] P. Deligne, *Limites inductives locales*, Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas, Tome 2, SGA 4, Second Edition, *Springer Lecture Notes in Math.* **270** (1972) 62-82.

[18] R. Diaconescu, *Change of base for toposes with generators*, J. Pure Appl. Algebra **6** (1975) 191-218.

[19] R. Diaconescu, *Axiom of choice and complementation*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975) 176-178.

[20] A. Douady, *Le théorème des images directes de Grauert (d'aprés Kiehl-Verdier)*, Astérisque **16** (1974) 49-62.

[21] L. van den Dries, *A generalization of the Tarski-Seidenberg theorem and some nondefinability results*, Bull. Amer. Math. Soc. **15** (1986) 189-193.

[22] E. J. Dubuc, *C^∞-schemes*, Amer. J. Math. **102** (1981) 683-690.

[23] S. Eilenberg et S. Mac Lane, *General Theory of Natural Equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945) 231-294.

[24] L. Fantappiè, *I funzionali analitici*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. (11) **3** (1930) 453-683.

[25] G. Fichera, *I difficili rapporti fra l'Analisi funzionale e la Fisica matematica*, Rendiconti (9) Accademia Nazionale dei Lincei, Roma (1990) 161-170.

[26] G. Fichera, *Vito Volterra and the birth of functional analysis*, Development of Mathematics 1900-1950 (éd. Jean-Paul Pier) Birkhäuser Basel, 1994, 171-183.

[27] R. Fox, *On topologies for function spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945) 429-432.

[28] R. Fox, *Covering spaces with singularities, Algebraic Geometry and Topology: a Symposium in Honor of S. Lefschetz*, Princeton University Press (1957) 243-257.

[29] P. Freyd, *Abelian Categories*, 1963.

[30] P. Freyd, A. Scedrov, *Categories, Allegories*, North Holland, Amsterdam, 1990.

[31] P. Freyd, *Aspects of topoi*, Bull. Austral, Math. Soc. **7** (1972), 1-76.

[32] A. Frölicher, A. Kriegl, *Linear Spaces and Differentiation Theory*, Wiley-Interscience, 1988.

[33] J. Funk, *The display locale of a cosheaf*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **36** (1995) 53-93.

[34] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math, France **90** (1962) 323-448.

[35] P. Gabriel et M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Ergebnisse der Math. **35**, Springer-Verlag Berlin, 1967.

[36] J. Giraud, *Analysis situs*, Séminaire Bourbaki, Années 1962/63-1963/64, 189-199. Société Mathématique de France, 1995.

[37] R. Godement, *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.

[38] H. Grauert, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, Publ. Math. IHES, Bures-sur-Yvette, 1960.

[39] J. Gray, *Fragments of the history of sheaf theory*, in Applications of Sheaves (éds. M.P. Fourman et al.) Springer Lecture Notes in Math. **753**, Springer-Verlag, Berlin (1979) 1-79.

[40] A. Grothendieck, *Sur certains espaces des fonctions holomorphes*, J. Reine Angew. Math., **192** (1953) 35-64 et 77-95.

[41] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of the AMS **16**, 1955.

[42] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J. **9** (1957) 119-221.

[43] A. Grothendieck, *Techniques des constructions en géométrie analytique*, Séminaire Henri Cartan, 1960-61 **11**, 1-28.

[44] A. Grothendieck, *Séminaire de géométrie algébrique*, **1-7**, Publ. Math. IHES 1960-69.

[45] A. Grothendieck, *Revêtements étales et Groupe Fondamental ("SGA 1")*, Springer Lecture Notes in Math.**224**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[46] A. Grothendieck, *Algebraic groups*, Buffalo Lecture Notes F. Gaeta, 1973.

[47] A. Grothendieck, *List of classes of structures*, 1973 (maintenant dans le fichier de J. Duskin).

[48] M. Hakim, *Topos Annelés et Schémas Relatifs*, Ergebnisse der Mathematik **64** Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[49] A. Hirschowitz, C. Houzel, *Un spectre pour les algèbres bornologiques complètes*, C. R. Acad. Sci. Paris **274** (1972) 401-404.

[50] C. Houzel, *Espaces analytiques relatifs et théorème de finitude*, Math. Ann. **205** (1973) 13-54.

[51] C. Houzel, (Historical Introduction) in M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag, 1990.

[52] J. Isbell, *Atomless parts of spaces*, Math. Scand. **31** (1972) 5-32.

[53] P. Johnstone, *Topos Theory*, Academic Press, New York, 1977.

[54] P. Johnstone, *How general is a generalized space*, Dowker Memorial Volume, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **93** (1985) 77-111.

[55] P. Johnstone et A. Joyal, *Continuous categories and exponentiable toposes*, J. Pure Appl. Algebra **25** (1982) 255-296.

[56] A. Joyal (with A. Boileau) *La logique des topos*, J. Symbolic Logic **46** (1981) 6-16.

[57] A. Joyal et I. Moerdijk, *Toposes are cohomologically equivalent to spaces*, Amer. J. Math, **112** (1990) 87-96.

[58] A. Joyal et M. Tierney, *An extension of the Galois theory of Grothendieck*, Mem. Amer. Math. Soc. **309**, 1984.

[59] M. Kashiwara, P, Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag 1990.

[60] D. Kan, *Adjoint Functors*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958) 294-329.

[61] J. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, 1955.

[62] M. Kelly, *A survey of totality*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **27** (1986) 109-132.

[63] M. Kelly, *Basic Concepts of Enriched Category Theory*, London Math, Soc. Lecture Note Ser. **64**, Cambridge University Press, 1982.

[64] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **51**, Cambridge University Press, 1981.

[65] A. Kriegl, L. D. Nel, *A convenient setting for holomorphy*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **26** (1985) 273-309.

[66] A. Krieg, L. D. Nel, *Convenient vector spaces of smooth functions*, Math. Nachr. **147** (1990) 39-45.

[67] A. Kriegl, P. Michor, *Aspects of the theory of infnite-dimensional manifolds*, Differential Geometry and Appl. **1** (1991) 159-176.

[68] R. Lavendhomme, *Basic concepts of Synthetic Differential Geometry*, Kluwer, 1996.

[69] F. W. Lawvere, *Functorial Semantics of Algebraic Theories*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, **50** (1963) 869-872.

[70] F. W. Lawvere, *An elementary theory of the category of sets*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, **52** (1964) 1506-1511.

[71] F. W. Lawvere, *Adjointness in Foundations*, Dialectica **23** (1969) 281-296.

[72] F. W. Lawvere, *Quantifiers and Sheaves*, Proc. Intern. Congress on Math., Gauthier-Villars, Nice (1971) 329-334.

[73] F. W, Lawvere, *Categorical Dynamics*, (1967 Chicago Lectures) Topos-Theoretic Methods in Geometry, Aarhus 1979. (See also Historical Remarks in [64] 288-294.

[74] F. W. Lawvere, *Introduction to Categories in Continuum Physics*, Springer Lecture Notes in Math. **1174**, 1986.

[75] F. W. Lawvere, *Categories of Space and of Quantit*y, The Space of Mathematics. Philosophical, Epistemological and Historical Explorations. De Gruyter, Berlin (1992) 14-30.

[76] J. Leray, *Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations*, J. Math. Pures Appl. **9** (1945) 95-248.

[77] A. Macintyre, K. McKenna, et L. van den Dries, *Elimination of quantifiers in algebraic structures*, Adv. in Math. **47** (1983) 74-87.

[78] S. Mac Lane, *Duality for groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950) 485-516.

[79] S. Mac Lane, *The origins of the cohomology of groups*, Enseign. Math, **24** (1978) 1-29.

[80] S. Mac Lane, *Concepts and categories in perspective*, in A Century of Mathematics in America (Part I), American Mathematics Society, Providence, RI (1988) 323-366.

[81] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag, New York Inc. 1992.

[82] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Topos theory, Handbook of Algebra* **1**, (ed. M. Hazewinkel) Elsevier, Amsterdam (1996) 501-528.

[83] M. Makkai, G.E. Reyes, *First-Order Categorical Logic*, Springer Lecture Notes in Math. **611**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[84] C. Mikkelsen, *Lattice theoretic and logical aspects of elementary topoi*, Various Publications Series, **25** Matematisk Institut, Aarhus 1976.

[85] E. Michael, *Inductively perfect maps and triquotient maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981) 115-119.

[86] W. Mitchell, *Boolean topoi and the theory of sets*, J. Pure Appl. Algebra **2** (1972) 261-274.

[87] I. Moerdijk, G.E. Reyes, *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[88] R. Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds*, 3rd edition North Holland, Amsterdam, 1985.

[89] W. Noll, *The geometry of contact, separation, and reformation of continuous bodies*, Arch, Rational Mech. Anal, **122** (1993) 197-212.

[90] G. Osius, *Logical and set-theoretical tools in elementary topoi*, Model Theory and Topoi, Springer Lecture Notes in Math. **445** (1975) 297-346.

[91] R. Paré, *Colimits in topoi*, Bull. Amer Math, Soc. **80** (1974) 556-561.

[92] J. Penon, *Infinitésimaux et intuitionnisme*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **22** (1981) 67-72.

[93] T. Plewe, *Localic triquotient maps are effective descent maps*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **122** (1997) n°1, 17-43.

[94] A. Robinson, *A theorem on algebraically closed fields*, J. Symbolic Logic **14** (1949) 686-694.

[95] J. Sebastião e Silva, *Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, Portugal Math. **12** (1953) 1-46.

[96] E. Spanier, *Quasitopologies*, Duke Math. J. **30** (1963) 1-14.

[97] N. Steenrod, *A convenient category of topological spaces*, Michigan Math. J. **14** (1967) 133-152.

[98] R. Street, *Notions of topos*, Bull. Austral. Math. Soc. **23** (1981) 199-208.

[99] R. Street, R. Walters, *Yoneda structures on 2-categories*, J. Algebra **50** (1978) 350-379.

[100] A. Tarski, *Some topics on the borderline between algebra and logic*, Proc. Int. Congress of Mathematicians, Harvard University Press (1950) 718-719.

[101] M. Tierney, *Sheaf theory and the continuum hypothesis*, Toposes, Alg. Geom. and Logic, Springer Lecture Notes in Math. **274**, Springer-Verlag, Berlin (1972) 13-42.

[102] V. Volterra, *Opere matematiche*, Acad. Naz. dei Lincei, 1954-1962.

[103] G. Wraith, *Categorical dynamics and the Lie algebra of a group object*, (unpublished) 1972.

[104] G. Wraith, *Lectures on elementary topoi*, Model theory and topoi, Springer Lecture Notes in Math. **445** (1975) 114-206.

[105] D. Yetter, *On right adjoints to exponential functors*, J. Pure Appl. Algebra **45**, 1987, 287-304, Corrections: J. Pure Appl. Algebra **58** (1989) 103-105.

[106] M. Zorn, *Derivatives and Fréchet differentials*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946) 133-137.

Bâtiment de Mathématique
Université de Buffalo
Université d'État de New York
Buffalo, N.Y. 14260
États-Unis
wlawvere@buffalo.edu

Extrait de *Intelligence artificielle et informatique théorique* de J.-M. Alliot, T. Schiex, P. Brisset, F. Garcia (Cépadues éditions, 2002, p. 79)

5.3. Intuitionnistes contre formalistes

5.3.1. Les intuitionnistes

Au lieu de tenter de résoudre les problèmes des mathématiques par des constructions formelles où l'intuition n'aurait plus sa place, les intuitionnistes souhaitaient revenir en arrière et ne conserver des mathématiques que la partie intuitivement accessible. Ils refusaient en particulier la notion d'infini achevé : pour eux, l'existence d'un ensemble achevé contenant tous les nombres naturels n'était pas évidente. Seul existait le fait qu'on pouvait toujours construire un nombre plus grand que n'importe quel autre nombre. Tous les objets mathématiques devaient se construire [1].

Ce type d'attitude conduisit Brouwer [2] à contester certains principes considérés jusque-là comme évidents, comme le principe du tiers exclus [3]. Brouwer reconnaissait volontiers que dans le cas où le domaine $\mathcal{D}$ que parcourt un prédicat $P(x)$ est fini, $\exists x P(x) \vee \neg \exists x P(x)$ est vrai. Il est en effet possible dans ce cas de vérifier pour chaque élément de $\mathcal{D}$ si l'on a $P(x)$.

En revanche, pour un ensemble $\mathcal{D}$ infini, $\exists x P(x) \vee \neg \exists x P(x)$ n'est pas forcément vrai. Il nous est en effet matériellement impossible de vérifier pour tous les éléments de $\mathcal{D}$ si l'on a $P(x)$. Bien sûr, nous pouvons, avec de la chance, trouver un tel x rapidement, mais nous pouvons aussi bien ne jamais le trouver.

Il y a une autre conséquence des notions intuitionnistes : pour démontrer $\exists x P(x)$, il faut trouver un tel x et l'exhiber. Une démonstration par l'absurde, qui montrerait la fausseté de $\neg \exists x P(x)$ ne montrerait en aucun cas qu'un tel x existe mais seulement que $\neg\neg \exists x P(x)$ est vraie.

On voit donc que pour un intuitionniste, dans un ensemble infini, $\neg\neg A$ n'est pas systématiquement équivalent à A.

Depuis 1918, les mathématiques intuitionnistes se sont développées parallèlement aux mathématiques "traditionnelles". Les démonstrations constructivistes donnent souvent des résultats plus tangibles que les démonstrations formelles, mais sont plus difficiles. Il faut reconnaître que les intuitionnistes sont restés en deçà des résultats formalistes.

Leur apport fut néanmoins très important, surtout sur le plan épistémologique, car il conduisit à une réflexion profonde sur la façon d'appréhender l'infini.

5.3.2. Les formalistes

L'école formaliste emmenée par le mathématicien David Hilbert choisit une voie totalement différente de la voie intuitionniste.

Constatant que les paradoxes venaient de systèmes d'axiomes insuffisamment formalisés, Hilbert proposa de rédiger une théorie purement formelle des mathématiques et de démontrer sa consistance *formelle*. En effet, on avait jusque-là toujours démontré les propriétés de consistance par rapport à des modèles : la géométrie de Bolyai-Lobachevsky avait été ramenée à la géométrie euclidienne, la géométrie euclidienne à l'analyse (Descartes)... Or ce type de démonstration montre seulement qu'une théorie est consistante si une autre théorie l'est. La propriété de consistance formelle demande simplement qu'à l'intérieur de la théorie formelle, on ne puisse avoir une formule qui soit démontrable et dont la négation soit démontrable (ce qui constituerait un paradoxe). Hilbert imposa également que les méthodes de démonstration de ce type de propriété soient "intuitivement convaincantes" et *finitistes*, c'est-à-dire ne faisant jamais appel

1. On confond parfois intuitionnisme et constructivisme, qui sont deux notions fort proches.
2. Brouwer qui fut le fondateur de l'école intuitionniste.
3. Rappelons que le principe du tiers-exclus dit que pour tout P, $P \vee \neg P$ est vraie.

à l'infini achevé. Hilbert appela cette nouvelle branche des mathématiques *métamathématique*. Hilbert énonça ce programme en 1908, et la réalisation commença vers 1920.

Hilbert se justifia de son attitude face à celle des intuitionnistes de la façon suivante : il scinda les mathématiques en deux domaines, celui des énoncés réels qui ont un sens intuitif et celui des énoncés idéaux qui n'en ont pas. Les énoncés idéaux ne sont que des moyens théoriques et élégants de simplifier les démonstrations d'une théorie donnée (cf. [Péter]). Il est ainsi plus facile de démontrer que $a.n + b$ prend une infinité de valeurs premières si a et b sont premiers entre eux en utilisant des méthodes analytiques (théorie "idéale" des fonctions holomorphes) qu'en passant par une méthode "intuitive" n'utilisant que des résultats sur les nombres entiers. Il est même des cas où le recours à la théorie idéale est obligatoire, simplement parce qu'on ne connaît pas d'autres moyens de résoudre le problème. On peut également citer comme exemple concluant de cette attitude la construction de la géométrie projective (théorie idéale) à partir de la géométrie euclidienne traditionnelle.

Si l'ensemble de la communauté scientifique ne fut pas convaincu, nombre de mathématiciens se lancèrent cependant dans la réalisation du programme de Hilbert [4] et les résultats qu'ils allaient obtenir devaient se révéler assez inattendus.

5.4. L'arithmétique formelle

L'idée originelle de Hilbert était de construire un système formel des mathématiques, ou tout au moins de l'analyse. Mais le problème se révéla tellement complexe que lui et ses élèves se limitèrent à construire un système formel de l'arithmétique. Nous allons décrire ce système. Nous insistons cependant sur le fait que les définitions données ci-dessous n'ont pas toujours toute la précision nécessaire, mais la mise en place parfaitement rigoureuse d'un système formel de l'arithmétique dépasserait, et de beaucoup, le cadre de cet ouvrage.

L'arithmétique formelle est une extension de la théorie de la démonstration [5] du calcul des prédicats

Définition 5.1 - Symboles - *Les symboles de l'arithmétique formelle seront*

$$\leftrightarrow, \rightarrow, \wedge, \vee, , \forall, \exists, =, +, ., ', 0, a, b, c, \ldots, _|, (,)$$

Les lettres $a, b, c, \ldots$ sont les variables de notre langage. Afin d'en disposer d'une infinité, nous admettons également comme variable les termes de la forme $a_{|\ldots|}$ [6]. Nous allons définir les termes de notre langage.

Définition 5.2 - Termes -

1. *0 est un terme ;*
2. *les variables sont des termes ;*
3. *si r et s sont des termes alors $(r)', (r) + (s), (r).(s)$ sont des termes.*

Tout terme est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles précédentes.

Il nous reste à définir les formules de notre langage :

Définition 5.3 - Formules -

1. *si r et s sont des termes alors $(r = s)$ est une formule ;*
2. *si A et B sont des formlues alors $(a \leftrightarrow B), (A \rightarrow B), (A \wedge B), (A \vee B)$ et $(\neg A)$ sont des formules ;*
3. *si A est une formule et x une variable alors $(\forall x A)$ et $(\exists x A)$ sont des formules.*

4. Notons que ce programme ne se résumait pas à la démonstration de la consistance de l'arithmétique formelle. Il comprenait 23 points, dont le premiers était précisément l'étude de l'hypothèse du continu de Cantor. Certains points du programme de Hilbert ne sont pas encore résolus aujourd'hui.
5. Une théorie formelle est une théorie de la démonstration et non une théorie des modèles.
6. Ainsi, $a_{||||}$ représente formellement ce que l'on note généralement a_4.

Toute formule est obtenue en appliquant un nombre fini de fois les règles précédentes.

Munis du langage, nous allons pouvoir définir les axiomes et règles d'inférence du système formel $\mathbb{N}$.

Définition 5.4 - Axiomes et règles d'inférence standards - *Les axiomes et les règles d'inférence du calcul des prédicats s'appliquent dans le système formel* $\mathbb{N}$.

Les axiomes que nous allons définir ensuite sont appelés *axiomes non-logiques*. Pourquoi ce nom ? Les axiomes que nous avons définis jusqu'ici ne remettent pas en cause les notions du calcul des prédicats et en particulier la notion de conséquence valide. En revanche, les axiomes que nous allons introduire ne peuvent plus s'interpréter au niveau de la notion de conséquence valide que comme des hypothèses de calcul, dans la mesure où ils n'ont pas de vérité logique. C'est en raison de ces axiomes que les résultats du calcul des prédicats ne peuvent s'étendre directement à l'arithmétique formelle. Nous essaierons de donner de chacun de ces axiomes une interprétation matérielle intuitive.

Axiome 5.1 - Récurrence -

$$A(0) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(x)$$

Si nous interprétons l'opérateur ' comme *successeur de*, alors l'axiome précédent se comprend immédiatement comme la définition de la récurrence : si la propriété est vraie pour 0 et si, quand elle est vraie pour n, elle est vraie pour $n+1$, alors elle est vraie pour tout n [7].

Axiome 5.2 - Quatrième axiome de Peano -

$$a' = b' \rightarrow a = b$$

Cet axiome formalise que : $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$

Axiome 5.3 - Cinquième axiome de Peano -

$$\neg a' = 0$$

Il n'existe aucun nombre ayant 0 pour successeur.

Axiome 5.4 - Pseudo-transitivité de l'égalité -

$$a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c)$$

Axiome 5.5 - Egalité

$$a = b \rightarrow a' = b'$$

Axiome fondateur de l'égalité et de la notion de successeur avec le quatrième axiome de Peano ; si $a = b$ alors $a + 1 = b + 1$.

Axiome 5.6 - 0 élément neutre pour l'addition -

$$a + 0 = a$$

Axiome 5.7 - Successeur et addition -

$$a + b' = (a + b)'$$

Axiome 5.8 - 0 élément absorbant de la multiplication -

$$a.0 = 0$$

7. Notons qu'ici les variables sont prises dans le sens de la généralité, comme dans toute suite du jeu d'axiomes. On pourrait donc tout aussi bien remplacer chaque axiome par sa clôture universelle.

Définit 0 comme élément absorbant de la multiplication.

Axiome 5.9 - Distributivité de la multiplication -

$$a.b' = a.b + a$$

A partir des définitions données ci-dessus, il est possible de définir la suite des nombres 1,2,3... récursivement en posant 1 = 0',2 = 1' =0"...

On ne peut définir dans $\mathbb{N}$ que des fonctions polynomiales, en raison du symbolisme extrêmement pauvre du langage. Mais l'on peut, en revanche, définir pour toute fonction arithmétique $f(x_1, \ldots, x_n)$ un prédicat $p(x_1, \ldots, x_n, y)$ qui est vrai si et seulement si $f(x_1, \ldots, x_n) = y$. On peut alors "parler" d'une fonction et opérer sur elle en travaillant sur le prédicat associé qui, lui, appartient bien au système formel. Ainsi considérons la fonction indicatrice [8] des nombres pairs $P(x)$ et son prédicat associé $p(x, y)$. Le théorème $P(x+2) = P(x)$ s'exprimera dans $\mathbb{N}$ par $\exists u \exists v (p(x+2, u) \wedge p(x, v) \wedge (u = v))$.

Il est également possible de définir les symboles traditionnels de l'arithmétique classique comme synonymes de formules plus complexes. C'est le cas de $>$ ou de $<$ ou de l'exponentiation. En fait, l'essentiel des relations familières au mathématicien sont définissables.

On pense donc que le système formel $\mathbb{N}$ que nous venons de définir a bien comme interprétation standard l'arithmétique telle que nous la pratiquons couramment. Si tel n'était pas le cas, il est clair que notre formalisme n'atteindrait pas son but.

Nous ne donnerons pas d'exemple de démonstration formelle dans $\mathbb{N}$. De telles démonstrations sont excessivement lourdes. La démonstration du théorème $a = a$ ne prend pas moins de 17 lignes ! Nous utiliserons d'ailleurs tout au long des paragraphes suivants des démonstrations informelles.

5.5. Décidabilité, complétude et consistance

Nous devons bien nous rappeler le but d'Hilbert : il s'agit, maintenant que les bases formelles sont posées, de démontrer la consistance formelle de $\mathbb{N}$ (*i.e.* il n'existe pas dans $\mathbb{N}$ une formule E telle que $\vdash E$ et $\vdash \neg E$).

En 1925, Ackermann publia une démonstration de consistance de $\mathbb{N}$. Mais deux ans plus tard, von Neumann montrait que la démonstration d'Ackermann ne s'appliquait qu'à un sous-système de $\mathbb{N}$, dans lequel l'axiome 5.1 est remplacé par un axiome voisin, mais plus faible.

En fait, les tentatives de démonstration de la consistance étaient vouées à l'échec comme allait le montrer Gödel. La démonstration originale de Gödel n'est pas celle que nous allons donner. Nous présenterons la démonstration donnée par Kleene en 1943, démonstration qui s'appuie sur les machines de Turing.

5.5.1. Décidabilité et calculabilité

Nous avons déjà effleuré les problèmes de calculabilité et de décidabilité dans le chapitre consacré aux machines de Turing.

Rappelons la définition que nous avons donnée de la calculabilité.

Définition 5.5 - Calculabilité - *Une fonction est dite calculable s'il existe une procédure algorithmique finie permettant de calculer en un nombre de pas fini sa valeur pour tout argument de son domaine.*

8. La fonction f indicatrice d'un ensemble E est la fonction définie par : $\forall x \in E, f(x) = 1$ et $\forall x \notin E, f(x) = 0$.

La notion de décidabilité est très proche de la définition de la calculabilité, mais elle s'applique à des problèmes de décision *i.e.* à des classes de questions auxquelles la réponse est *oui* ou *non*.

Une classe de questions est dite décidable s'il existe une procédure algorithmique finie permettant de résoudre n'importe laquelle des questions de cette classe en un nombre fini de pas.

Des problèmes classiques de décision dans un système formel sont : “Une suite de symboles donnée est-elle une formule bien formée ?” ou “Une suite d'expressions donnée est-elle la démonstration d'une formule ?” ou encore “Une formule donnée est-elle démontrable ?”.

Les deux premières questions sont décidables. Il n'en est pas de même pour la troisième. Nous connaissons des cas où l'on sait résoudre le problème de décision : il s'agit par exemple du calcul propositionnel, par application de la méthode des tables de vérié. En revanche, nous ne savons pas a priori s'il existe une procédure de décision pour $\mathbb{N}$. Or une telle procédure permettrait de résoudre de façon simple et mécanique tous les problèmes concernant l'arithmeétique élémentaire non encore résolus aujourd'hui. On pourrait ainsi prouver que la conjecture de Goldbach [9] ou le grand “théorème” de Fermat [10] sont démontrables ou indémontrables en appliquant mécaniquement cet algorithme. Il semble difficile de trouver une telle procédure. Il semblait encore plus difficile de prouver qu'elle n'existait pas. C'est pourtant ce que Church a fait.

La thèse de Church-Turing, que nous avons présentée au chapitre 10, ramène la notion de calculabilité intuitive à la notion de *calculabilité* pour les machines de Turing. Nous avons déjà évoqué les arguments en faveur de cette thèse. Nous la supposons admise dans la suite de l'énoncé. Rappelons la notion de *décidabilité* au sens de Turing : un prédicat est décidable au sens de Turing s'il existe une machine de Turing capable de déterminer sa vérité ou sa fausseté. La thèse de Church-Turing implique que la décidabilité intuitive et la décidabilité au sens de Turing sont équivalentes.

5.5.2. Construction d'une fonction non-calculable

Considérons de nouveau les machines de Turing que nous avons présentées au chapitre 4. Une machine de Turing est entièrement déterminée par son tableau, qui représente son programme. Ainsi le tableau 5.2 détermine totalement une machine de Turing.

	B	0	1
z_0	(z_1, B, G)	$(z_0, 0, D)$	$(z_0, 1, D)$
z_1	$(z_h, 1, I)$	$(z_h, 1, I)$	$(z_1, 0, G)$

Table 5.2 - Programme d'une machine de Turing

(celle qui calcule la fonction $f(x) = x+1$). Nous pouvons réécrire le programme précédent, en représentant un état z_i par i, sous la forme :

$$1, B, G, 0, 0, D, 0, 1, D; h, 1, I, h, 1, I, 1, 0, G.$$

Tout programme de machine de Turing peut donc s'écrire à l'aide des dix-sept symboles suivants [11] :

$$h\,0\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,B\,D\,G\,I\;,\;;$$

Tout programme de machine de Turing peut donc être écrit sous la forme d'un nombre en base 17. De même, tout mot de Γ^* (de cardinal 11) peut se traduire de façon unique en un élément de $\mathbb{N}$.

9. Tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est somme de deux nombres premiers.
10. $x^n + y^n = z^n$ ne possède pas de solution entière pour $n > 2$. Andrew Wiles, de l'Université de Princeton, a proposé en juin 1993 une démonstration de cette conjecture.
11. Si on utilise un alphabet décimal. Nous pourrions nous contenter d'un système de numération binaire pour numéroter les états. Dans ce cas, neuf symboles suffiraient.

Définition 5.7 - Index d'une machine de Turing - Le nombre i (en base 17) qui représente une machine de Turing est appelé index de la machine de Turing, machine que nous noterons $\mathcal{M}_i$ [12].

Il découle immédiatement des résultats précédents le théorème :

Théoréme 5.1 - *L'ensemble des machines de Turing est dénombrable.*

Nous devons commencer à sentir le résultat plus proche, En effet, nous avons démontré au début de ce chapitre que l'ensemble des fonctions à variable entière était non-dénombrable, et nous venons de montrer que l'ensemble des fonctions que nous pouvons calculer est "seulement" dénombrable. Nous sommes donc déjà convaincus qu'il existe bien des fonctions non-calculables. Il nous suffit maintenant d'en exhiber une. Il nous reste quelques étapes à franchir avant d'en arriver là.

Définition 5.8 - *Nous posons $T(i, a, n)$ le prédicat qui prend la valeur vraie lorsque la machine de Turing dont l'index est i, appliquée à l'argument a, calcule au bout de n étapes exactement un résultat que nous noterons $\varphi_i(a)$.*

Remarquons que $T(i, a, n)$ est également faux si i n'est pas l'index d'une machine de Turing valide. Nous allons établir deux résultats fondamentaux sur T et φ.

Théoreme 5.2 - *Le prédicat $T(i, a, n)$ est décidable (au sens intuitif et au sens de Turing).*

Les valeurs de i, a et n étant données, il est possible de vérifier que i est bien l'index d'une machine de Turing valide. Si ce n'est pas le cas, T est faux. Si c'est le cas, nous pouvons appliquer la machine de Turing $\mathcal{M}_i$ à a et regarder si au bout de n étapes la machine vient juste de terminer le calcul d'une valeur. Si c'est le cas $T(i, a, n)$ est vrai, sinon il est faux.

T étant décidable au sens intuitif, il est décidable au sens de Turing, d'aprés la thèse de Church-Turing.

Théoréme 5.3 - La fonction partielle φ_i est calculable.

Nous disons que φ_i est une fonction *partielle* car elle n'est définie que pour les valeurs de a et de i telles qu'il existe un n tel que $T(i, a, n)$ est vrai. Dire que φ_i est une fonction partielle calculable consiste simplement à dire que si φ_i est définie pour l'index i et l'argument a, *alors* elle est calculable. Le résultat dans ces conditions est évident. Il suffit d'appliquer la machine $\mathcal{M}_i$ à l'argument a et attendre qu'elle ait calculé un résultat (ce qui arrivera car $\exists n T(i, a, n)$ est vrai).

Il est temps pour nous d'arriver au résulat fondamental de cette section :

Théoréme 5.4 - Soit la fonction ψ définie par :

$$\psi(a) = \begin{cases} \varphi_a(a) + 1 & s'il\ existe\ n\ tel\ que\ T(a, a, n) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

ψ n'est pas calculable.

Supposons en effet que ψ soit calculable. Alors il existe une machine de Turing $\mathcal{M}_j$ qui calcule ψ et en particulier pour $a = j$, nous avons :

$$\psi(j) = \varphi_j(j)$$

Comme $\mathcal{M}_j$ calcule ψ, nous avons pour tout $a, T(j, a, n)$. En particulier, pour $a = j$, nous savons qu'il existe n tel que $T(j, j, n)$. Or en appliquant directement la définition de ψ nous obtenons :

$$\psi(j) = \varphi_j(j) + 1$$

12. Notons qu'il existe des index qui ne désignent pas des machines de Turing valides. Cela est sans importance pour la suite.

Ce qui est en contradiction avec l'équation précédente. Q.E.D.
On remarquera que cette démonstration s'appuie une fois de plus sur la méthode de la diagonale cantorienne.

Il existe un corollaire important à ce théorème

Théoreme 5.5 - *Le prédicat $\exists n T(a,a,n)$ est indécidable.*

Si ce prédicat était décidable, nous pourrions pour un a donné décider il existe n tel que $T(a,a,n)$. Si tel n'était pas le cas nous saurions que la valeur de $\psi(a)$ est 0. Sinon, nous pourrions appliquer la machine de Turing à l'argument a, récupérer le résultat du calcul au bout des n étapes, lui ajouter 1, ce qui nous donnerait la valeur de $\psi(a)$.

Nous venons de décrire là une procédure [13] de calcul de ψ. Or ψ n'est pas calculable, donc par réduction à l'absurde, $\exists n T(a,a,n)$ est indécidable. Plus généralement, le prédicat $T(i,a,n)$ est indécidable. On en conclut que le problème de l'arrêt d'une machine de Turing est, lui aussi, indécidable.

5.5.3. Indécidabilité de $\mathbb{N}$

La démonstration de l'indécidabilité de $\mathbb{N}$ va s'appuyer sur le résultat précédent. Il semble clair que le prédicat $\exists n T(a,a,n)$ peut se formaliser dans $\mathbb{N}$. Les machines de Turing ne comprennent dans leur définition que des opérations arithmétiques élémentaires et le prédicat T ne fait appel à aucune notion autre qu'arithmétique ou liée au calcul des prédicats. Il doit donc exister dans $\mathbb{N}$ une formule qui a comme interprétation [14] $\exists n T(a,a,n)$. Appelons C_a cette formule.

Remarquons maintenant que

$$\exists n\, T(a,a,n) \qquad \text{entraîne} \qquad \{\vdash C_a \text{ dans } \mathbb{N}\}$$

En effet, si l'on sait qu'il existe un n tel que $T(a,a,n)$, on peut le démontrer informellement en construisant chacune des étapes de la machine de Turing associée. Une telle démonstration peut évidemment se formaliser dans $\mathbb{N}$.

Si nous supposons que seules les formules vraies sont démontrables [15], nous avons

$$\{\vdash C_a \text{ dans } \mathbb{N}\} \qquad \text{entraîne} \qquad \exists n\, T(a,a,n)$$

En fait, C_a représente exactement $T(a,a,n)$.

Théoréme 5.6 - Indécidabilité de $\mathbb{N}$ - $\mathbb{N}$ est indécidable *i.e.* il n'existe pas de procédure de décision permettant d'établir la démontrabilité d'une formule.

13. Il faut tout de même ajouter une précision : la procédure décrite ci-dessus n'est correcte que lorsque l'on sait *construire* par une machine de Turing la machine de Turing calculant φ_a à partir de l'index a (ce qui est le cas au vu de notre définition de la fonction calculant l'index : celle-ci est clairement inversible). Dans le cas contraire, il faudrait inclure dans le programme de la machine calculant $\psi tous les programmes de toutes les machines calculant tous les \varphi_a$, ce qui est impossible, une machine de Turing devant avoir un nombre fini d'instructions.

14. Ici se trouve un des points principaux de la démonstration. C'est parce qu'on parle ici d'interprétation qu'on parlera ensuite de vérité de C_a si $\exists n T(a,a,n)$ est vraie. Il doit y avoir adéquation de $\mathbb{N}$ avec l'interprétation que l'on en fait : si $\exists n T(a,a,n)$ est vraie, alors C_a est vraie sans qu'il soit encore question de savoir si elle est démontrable : elle est vraie parce que nous supposons que notre modèle est adéquat. Il faut faire bien attention de ne pas confondre *vrai* et *démontrable*.

15. Nous ne pouvons que le supposer, une telle propriété est, comme nous allons le voir, indémontrable par des méthodes métamathématiques. On peut cependant penser qu'il s'agit d'une condition indispensable pour la consistance de notre système formel. D'autre part, on peut remarquer que dans l'interprétation classique de l'arithmétique, les axiomes de $\mathbb{N}$ sont vrais et l'application d'une règle d'inférence sur des axiomes ou des formules vraies donne systématiquement une formule vraie. Ce qui précède n'est cependant pas une démonstration acceptable car elle fait appel à des méthodes non finitistes, puisqu'elle considère l'ensemble achevé des démonstrations, qui est infini.

En effet, si une telle procédure existait, il serait possible, pour a donné, de savoir si C_a est démontrable ou non. On disposerait donc d'une procédure de décision pour $T(a, a, n)$, ce qui est impossible.

Il n'existe donc aucune procédure algorithmique permettant de déterminer la vérité ou la fausseté d'une formule quelconque de $\mathbb{N}$ comme nous pouvions le faire avec les tables de vérité en calcul propostionnel.

5.5.4. Incomplétude de $\mathbb{N}$

Nous allons avoir besoin de quelques propriétés supplémentaires pour démontrer l'incomplétude de $\mathbb{N}$ (rappelons qu'il s'agit de montrer qu'il existe une formule F telle que l'on ait ni $\vdash F$, ni $\vdash \neg F$).

Notons tout d'abord que comme dans $\mathbb{N}$ seules les formules vraies sont démontrables, nous avons :

$$\{\vdash \neg C_a \text{ dans } \mathbb{N}\} \quad \text{entraîne} \quad \neg\exists n\, T(a, a, n)$$

Nous allons maintenant nous appuyer sur deux éléments fondamentaux liés à l'architecture de $\mathbb{N}$. Le premier est que dans $\mathbb{N}$, on peut reconnaître la démonstration d'une formule comme telle : la reconnaissance d'une démonstration est un problème décidable, comme nous l'avions déjà fait remarquer. Ensuite, nous devons remarquer que les symboles permettant de construire les formules de $\mathbb{N}$ étant en nombre fini, le nombre de formules et de démonstrations est donc dénombrable, et l'on peut en établir une énumération. Ce demier point est la clé de voûte de l'ensemble des démonstrations d'incomplétude dans les systèmes formels ; toute démonstration d'incomplétude revient finalement à montrer qu'il y a un nombre non dénombrable de formules vraies, alors qu'il y a seulement un nombre dénombrable de démonstrations (de la même façon que l'on montre qu'il y a une infinité non-dénombrable de fonctions et seulement un nombre dénombrable de fonctions calculables).

Les deux points précédents étant établis, il devient évident qu'il est possible de construire une machine de Turing $\mathcal{M}_j$ qui, parcourant l'ensemble des démonstrations de $\mathbb{N}$, imprime 1 et s'arrête si elle trouve une démonstration de $\neg C_a$, et ne s'arrête jamais sinon. Ceci se résume par :

$$\exists n\, T(j, a, n) \quad \text{est équivalent à} \quad \{ \vdash \neg C_a \text{ dans } \mathbb{N} \}$$

Nous pouvons donc résumer les trois points que nous avons établis et qui vont nous permettre de poursuivre la démonstration :

1. $\{\vdash C_a$ dans $\mathbb{N}\}$ entraîne $\exists n\, T(a, a, n)$;
2. $\{\vdash \neg C_a$ dans $\mathbb{N}\}$ entraîne $\neg\exists n\, T(a, a, n)$;
3. $\neg\exists n\, T(j, a, n)$ est équivalent à $\{\vdash \neg C_a$ dans $\mathbb{N}\}$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème d'incomplétude de Gödel. Supposons qu'il existe n tel que $T(j, j, n)$. Alors d'après (3), nous avons : $\vdash \neg C_j$. Mais alors (2) nous donne : $\neg\exists n\ T(j, j, n)$. Ceci contredit l'hypothèse. Donc nous avons $\neg\exists n\, T(j, j, n)$, donc $\neg C_j$ est vrai.

Mais d'autre part, $\neg\exists n\, T(j, j, n)$ impose d'après (3) que *non* $\vdash \neg C_j$.

Enfin, supposons que $\vdash C_j$; alors d'après (1), nous savons qu'il existe un n tel que $T(j, j, n)$, ce qui impliquerait que C_j soit vrai. Or ceci est contradictoire avec le premier point que nous avons démontré. Donc, on n'a pas $\vdash C_j$.

Nous pouvons résumer nos trois résultats dans le théorème suivant :

Théorème 5.7 - Théoreme d'incomplétude - Dans $\mathbb{N}$, nous pouvons trouver une formule liée C_j telle que

1. nous n'avons pas $\vdash C_j$;
2. nous n'avons pas $\vdash \neg C_j$;
1. $\neg C_j$ est vraie.

Nous avons donc démontré que pourvu que $\mathbb{N}$ soit adéquat et que seules les formules vraies soient démontrables dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ est incomplet, c'est-à-dire qu'il existe des formules (vraies d'après l'interprétation standard) qui ne sont pas démontrables et dont la négation n'est pas non plus démontrable.

Essayons de comprendre comment nous sommes arrivés à ce résultat ; reprenons (3)

$$\exists n\ T(j,j,n) \text{ est équivalent à } \{\vdash \neg C_j \text{ dans } \mathbb{N}\}.$$

Dans l'interprétation que nous utilisons, $\neg C_j$ exprime $\neg \exists n\ T(j,j,n)$. Nous avons donc construit une formule qui dans l'interprétation considérée exprime sa propre indémontrabilité. Il s'agit d'une assertion très proche du paradoxe du menteur.

Le résultat qui découle du théorème d'incomplétude est qu'il est impossible de formaliser l'ensemble des propriétés de l'arithmétique standard dans un système formel. La formule $\neg C_j$ est une propriété de l'arithmétique, vraie, mais indémontrable. Une partie du programme de Hilbert s'écroulait.

5.5.5. Non démontrabilité de la consistance de $\mathbb{N}$

Nous ne donnerons qu'une idée de la démonstration montrant qu'il est impossible de démontrer la consistance formelle de $\mathbb{N}$ dans le système formel $\mathbb{N}$.

Constatons tout d'abord que dans notre démonstration nous avons utilisé comme hypothèse : $\{\vdash \neg C_a$ dans $\mathbb{N}\}$ entraîne $\neg \exists n\ T(a,a,n)$.

En fait cette hypothèse peut se réduire à la notion de consistance de $\mathbb{N}$: il n'existe pas dans $\mathbb{N}$ de formule F telle que $\vdash F$ et $\vdash \neg F$. Il suffit pour s'en convaincre de constater que ($\{\vdash \neg C_a$ dans $\mathbb{N}\}$ entraîne $\neg \exists n\ T(a,a,n)$) se démontre à partir de ($\neg \exists n\ T(a,a,n)$ entraîne $\{\vdash \neg C_a$ dans $\mathbb{N}\}$) et de la consistance simple.

Donc nous avons : ($\mathbb{N}$ est simplement consistant) entraîne ($\neg C_j$ est vrai) (ici j représente le j particulier du théorème précédent).

La suite de la démonstration consiste à remarquer que l'on peut exprimer de façon formelle la proposition : $\mathbb{N}$ est simplement consistant. Il suffit de considérer que l'on peut construire une machine de Turing $\mathcal{M}_k$ cherchant dans les démonstrations de $\mathbb{N}$ une démonstration d'une formule de la forme $F \wedge \neg F$, qui imprime 1 si elle en trouve une et ne termine jamais sinon.

Alors la consistance de $\mathbb{N}$ est équivalente au fait que, pour un a quelcongue, il n'existe pas de n tel que $T(k,a,n)$. En particulier, il ne doit pas exister de n tel que $T(k,k,n)$. Ce prédicat peut être formalisé, nous le savons déjà, par une formule de $\mathbb{N}$ que nous appellerons C. Nous pouvons alors reprendre la proposition : ($\mathbb{N}$ est simplement consistant) entraîne ($\neg C_j$ est vrai). Elle devient formellement :

$$C \rightarrow \neg C_j$$

Hilbert et Bernays ont montré en 1939 que cette formule est démontrable dans $\mathbb{N}$, ce qui est assez naturel dans la mesure ou $\mathbb{N}$ doit être adéquat à notre modèle intuitif de l'arithmétique. Donc :

$$\vdash C \rightarrow \neg C_j.$$

Supposons maintenant que $\vdash C$ (c'est-à-dire que la consistance de $\mathbb{N}$ est démontrable), alors nous obtenons $\vdash \neg C_j$, ce qui contredit le théorème précédent (nous avons montré par le théorème d'incomplétude que nous n'avons pas : $\vdash \neg C_j$).

D'où le résultat :

Théoréme 5.8 - Indémontrabilité de la consistance de $\mathbb{N}$ - La formule C exprimant formellement dans $\mathbb{N}$ la consistance de $\mathbb{N}$ est indémontrable dans $\mathbb{N}$.

5.6. Les conséquences

Nous ne nous attarderons pas sur les conséquences du théorème de non-démontrabilité de la consistance. Disons simplement que, pour nombre de mathématiciens, il signifia la fin de l'espoir d'obtenir une garantie de la sûreté des mathématiques classiques.

En revanche, la notion de non-décidabilité et de non-calculabilité nous intéresse au premier chef. Ces résultats ont donné naissance à une branche fructueuse de l'informatique, la théorie de la calculabilité et de la complexité. Ils ont également fourni un argument aux défenseurs de l'IA : “dans la mesure où des fonctions ne sont pas calculables, et où nous voulons tout de même obtenir des résultats utilisables, nous sommes obligés d'utiliser des méthodes heuristiques, méthodes caractéristiques d'une approche IA”. Il faut cependant prendre ce raisonnement avec prudence ; un algorithme d'intelligence artificielle s'exécutera, comme tout autre algorithme, sur une machine de Turing, et est donc soumis aux mêmes limitations.

Le théorème d'incomplétude nous intéresse également dans la mesure où, selon certains, il montre qu'il existe des propositions vraies qu'aucun moyen mécanique ne permet de démontrer ; certains adversaires de l'IA se sont servis de cet argument pour prétendre qu'un calculateur ne pourrait jamais réaliser certains travaux réalisés par l'esprit humain. L'argument doit aussi être prudemment considéré.

On peut, d'autre part, se demander si la démonstration d'incomplétude ne vient pas du jeu d'axiomes que nous avons utilisé au départ. Si nous ne parvenons pas à démontrer une propriété que nous savons vraie (comme celle que nous avons construite lors de la démonstration du théoréme d'incomplétude), il nous suffit de l'inclure comme axiome supplémentaire. On pourrait ainsi espérer construire un système complet par ajout successif de toutes les propriétés vraies que nous ne pouvons démontrer. Il existe malheureusement une objection majeure à cette méthode. Une extension du théorème de Gödel stipule que pour tout système formel contenant l'arithmétique, il est possible de construire une propriété vraie non-démontrable, en utilisant d'ailleurs une méthode très voisine de celle que nous venons de présenter. Ceci ruine définitivement nos espoirs. Disons tout de même que le théorème d'incomplécude n'est pas aussi anti-naturel ou anti-intuitif qu'il peut apparaître au premier abord. En fait, il exprime que notre modèle intuitif de l'arithmétique est trop riche pour être réduit à un quelconque système formel, ce qui peut sembler relativement normal. Depuis la démonstration du théorème d'incomplétude, des modèles différents vérifiant l'axiomatique formelle de l'arithmétique ont été développés ; il a été démontré que l'ensemble de toutes les formules vraies dans tous les modèles est exactement l'ensemble des théorèmes.

Au sujet des modèles non-standard, Thoralf Skolem a démontré, en étendant un théorème dû à Lowenheim, que toute formalisation axiomatique du premier ordre de la théorie des ensembles (dont le modèle standard admet, bien entendu, des ensembles non-dénombrables) admet un modèle dont le domaine d'objets est au plus dénombrable. Donc la théorie naïve des ensembles ne peut êre formalisée de façon catégorique [16] par un système axiomatique du premier ordre. Ce théorème n'est pas aussi paradoxal qu'il peut le paraître. En effet, toute théorie axiomatique formelle contient au plus, nous l'avons vu, un nombre dénombrable de démonstrations. Il semble clairement difficile dans ces conditions de représenter des ensembles

16. Une théorie est catégorique ssi l'ensemble de ses modèles est isomorphe *i.e.* pour tout couple de modèles M_1, M_2, il existe une bijection f entre les domaines d'interprétation de ces deux modèles telle que pour tout symbole de prédicat P d'arité n, $M_1(P)(a_1, \ldots, a_n)$ est vrai ssi $M_2(P)(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ est vrai et telle que pour tout symbole fonctionnel g d'arité n, $M_1(g)(a_1, \ldots, a_n)$ vaut a ssi $M_2(g)(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ vaut $f(a)$. Tous les modèles d'une théorie catégorique sont donc mathématiquement indiscernables.

non-dénombrables. On peut aussi mettre le théorème de Lowenheim-Skolem en relation avec le théorème d'incomplétude : considérons un système S "riche". Comme tous les systèmes "riches" sont incomplets, on peut trouver une propriété p telle que les systèmes $S \cup p$ et $S \cup \neg p$ soient des systèmes "corrects". Ces deux systèmes ne peuvent être catégoriques car les interprétations ne sont pas isomorphes.

Remarquons enfin la grande différence qui existe entre le théorème d'incomplétude et le théorème énonçant l'impossibilité de démontrer la consistance de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Le premier stipule qu'il existe des propriétés vraies non démontrables. *Le second ne prétend en aucun cas qu'il existe des propriétés démontrables qui ne soient pas vraies.* Il dit simplement que l'on ne peut démontrer la consistance de $\mathbb{N}$ en utilisant seulement les axiomes de $\mathbb{N}$ et des méthodes finitistes, comme l'exigeait Hilbert. Une démonstration de consistance uilisant des méthodes non-finitistes a d'ailleurs été publiée par Gerhard Gentzen peu après que Gödel ait énoncé son théorème. Cette méthode satisfait de nombreux mathématiciens, même si elle fait appel à la notion d'induction transfinie. Il ne faut donc en aucun cas parler de théorème d'inconsistance comme on parle du théoréme d'incomplétude mais bien d'un théorème de non-démontrabilité finitiste de la consistance, ce qui est bien différent.

5.7. Faut-il jeter la logique ?

Les résultats obtenus par Göd :el ont eu des conséquences très importantes sur la communauté des mathématiciens eux-mêmes. Certains d'entre eux, dont Imre Lakatos, ont même estimé nécessaire de renoncer à la théorie de la démonstration pour ne garder aux démonstrations mathématiques que leur caractère intuitif ([Lakatos])

> *"Pourquoi ne disons-nous pas que le test ultime permettant de savoir si une méthode peut-être admise en arithmétique reviene à la question de savoir si elle est intuitivement convaincante ?"*

Il faut cependant faire une distinction entre ce qui apparaît comme deux parties fondamentalement différentes de la logique, que l'on a parfois tendance à confondre :

- Il y a d'une part un problème à caractère philosophique qui s'interroge sur la valeur sémantique des axiomes logiques ; Est-ce qu'un axiome est vrai ? Qu'est-ce que la vérité ? Ce problème interpelle les philosophes anglo-saxons depuis près d'un siècle ; un bon livre faisant le point sur la philosophie de la logique est [Engel].

- Il y a d'autre part un problème mathématique qui s'interroge sur la relation entre une théorie de la vérité, et une axiomatisation de cette théorie. C'est essentiellement à ce point que nous nous sommes intéressés.

En fait, ces deux points correspondent à deux étapes pragmatiques du travail du mathématicien ou du logicien. Face à une réalité trop vaste pour être traitée efficacement, il commence par la réduire en un langage formel dans lequel il définit une théorie de la vérité et un modeèle, puis il construit une théorie de la démonstration qui lui permet de vérifier la validité de ses intuitions dans le cadre de ce modèle. Les deux étapes sont indispensables, mais il ne faut pas attendre plus de la logique que ce qu'elle peut donner : sa démarche est réductionniste, et on ne peut trouver au bout de la chaîne un système aussi riche que le monde réel qu'elle modélise. La crise de la science actuelle est plus une crise liée aux limites de cette science qu'à ses fondements : ce qui est en cause, c'est le dogme *réductionniste* qui, si l'on caricature un peu, prétendait transformer *sans perte de généralité* le monde en un système axiomatique fini où tout serait démontrable. Il semble clair que le dogme a fait long feu, dans les deux domaines ; les philosophes semblent accepter l'impossibilité de réduire le langage ou la pensée humaine, ainsi que les notions intuitives de vérité et de validité sous-jacentes, à un système unique ; les mathématiciens sont conscients que la théorie sémantique et la théorie de la démonstration ne sont pas équivalentes, et qu'aucun système axiomatique fini ne peut représenter complètement et catégoriquement un modèle un peu complexe.

Il ne faut pourtant pas rejeter le travail accompli, ni refuser de le continuer. Il faut accepter la vision pragmatiste qui consiste à regarder la logique comme un outil, imparfait certes, mais pourtant indispensable. On ne peut rejeter les axiomes de la logique modale sous prétexte qu'elle est “née dans le péché” (Quine), si celle-ci fournit un modèle utile pour formaliser le raisonnement. De même, on ne peut rejeter la théorie de la démonstration, sous prétexte qu'elle ne fournit pas une certitude absolue : elle n'est qu'une vérification de nos intuitions et a rempli et continuera à remplir parfaitement ce rôle.

Références bibliographiques

[Engel] Pascal Engel. *La norme du vrai. Philosophie de la logique.* NRF Essais. Gallimard, 1989.

[Lakatos] Imre Lakatos. *Preuves et réfutations.* Hermann, 1984.

[Péter] Rôzsa Péter. *Jeux avec l'infini : voyage à travers les mathématiques.* Editions du seuil, collection Points Sciences, 1977.
L'édition hongroise originale date de 1957. ISBN : 2-02- 004568-0.

Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimensions

Première communication

Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur par G. Cantor

M'étant proposé de vous communiquer les démonstrations de plusieurs théorèmes, que j'ai trouvés dans la théorie des ensembles, je vous prie de me permettre de commencer par les trois suivants, A, B et C dont : j'ai fait mention dans le mémoire : "*Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig 1883".

Comme j'aurai à citer ce travail en divers endroits, je prendrai la liberté de le désigner par les lettres "*Gr.*".

Théorème A. "Un ensemble de points P (situé dans un espace continu G_n à n dimensions) ayant la *première puissance* ne peut jamais être un ensemble *parfait*."

Théorème B. "Le nombre α appartenant à la *première* ou à la *seconde* classe de nombres, soit P un ensemble de points tel que son ensemble dérivé $P^{(\alpha)}$ d'ordre α s'évanouit, alors le *premier ensemble dérivé* $P^{(1)}$ de P et *l'ensemble* P lui même sont de la *première* puissance, sauf les cas où les ensembles P ou $P^{(1)}$ sont finis."

Théorème C. "P étant un ensemble de points tel que son premier ensemble dérivé $P^{(1)}$ est de la première puissance, il existe des nombres α de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres tels qu'on a identiquement

$$P^{(\alpha)} \equiv 0,$$

et de tous ces nombres α il y en a un qui en est le plus petit."

Démonstration du théorème A.

D'après *Gr.* § 10, j'appelle *ensemble parfait de points* un ensemble S tel que son premier dérivé $S^{(1)}$ coïncide avec S lui-même, en sorte que tout point s appartenant à S est un point-limite de S et qu'aussi tout point-limite s' de S est un point appartenant à S.

Soient maintenant

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu, \ldots$$

les points qui constituent l'ensemble P ; nous pouvons les imaginer donnés en cette forme de série (p_ν), parce que P a d'après l'hypothèse, admise dans notre théorème, la *première puissance*.

Nous admettons que chaque point p_ν de P est un *point-limite* de P et nous voulons en conclure l'existence

Acta mathematica, 2. Imprimé 26 Août 1883.

de *points-limites* de P qui n'appartiennent pas comme *points* à P ; il en suivra que P ne peut pas être un ensemble parfait, car s'il en était ainsi, non seulement chaque *point* de P devrait être un *point-limite* de P, mais aussi chaque *point-limite* de P serait nécessairement un *point appartenant* à P.

Que l'on prenne p_1, pour centre d'un ensemble continu à $(n-1)$ dimensions, lieu des points de G_n, qui ont la distance $\rho_1 = 1$ de p_1 ; nous nommerons un tel ensemble une sphère de rayon ρ_1, et nous la désignerons ici par K_1.

De tous les points de la suite (p_ν) qui suivent p_1 soit p_{i_1} le premier qui tombe dans *l'intérieur* de la sphère K_1 (et il y en a dans l'intérieur de K_1 un nombre infini, puisque le centre p_1 est, comme nous avons admis, un *point-limite* de P ; nommons σ_1 la distance des points p_1 et p_{i_1} et prenons p_{i_2} comme centre d'une seconde sphère K_2 dont le rayon ρ_2 est déterminé par la condition d'être la plus petite des deux quantités :

$$\frac{1}{2}\sigma_1, \qquad \frac{1}{2}(\rho_1 - \sigma_1).$$

La sphère K_2 est alors située toute entière à l'intérieur de K_1, et les points

$$p_1, p_2, \ldots, p_{i_2-1}, \ldots$$

de la série (p_ν) sont situés tous, en dehors de la sphère K_2 ; le rayon ρ_2 de la dernière est, comme on voit, plus petit que $\frac{1}{2}$.

De même soit p_{i_2} le premier point de la suite (p_ν) de tous ceux, qui suivent p_{i_2} et qui tombent dans l'intérieur de la sphère K_2 ; il y en a un nombre infini, puisque p_{i_2} est supposé être point-limite de P ; nous désignons la distance des points p_{i_2} et p_{i_3} par σ_2 et prenons p_{i_3} pour centre d'une troisième sphère K_3 dont le rayon ρ_3 est déterminé par la condition d'être la plus petite des deux quantités :

$$\frac{1}{2}\sigma_2, \qquad \frac{1}{2}(\rho_2 - \sigma_2).$$

la sphère K_3 est alors située tout entière à l'intérieur de K_2 et les points $p_1, p_2, p \ldots, p_{i_3-1}, \ldots$ de la série (p_ν) sont situés tous en dehors de la sphère K_3 ; le rayon ρ_3 est évidemment plus petit que $\frac{1}{4}$.

On voit donc ici une *loi* d'après laquelle on peut former une suite infinie de sphères :

$$K_1, K_2, K_3, \ldots, K_\nu, \ldots$$

liée à une série déterminée de nombres entiers i_ν croissants avec leurs indices, de sorte que l'on a :

$$1 < i_2 < i_3 < \ldots$$

Chaque sphère K_ν est située toute entière à l'intérieur de la précédente $K_{\nu-1}$.

Le centre p_{i_ν} de la sphère K_ν est défini par la condition qu'il est le premier point de la série (p_ν) de tous ceux qui suivent $p_{i_{\nu-1}}$ et qui sont situés à l'intérieur de la sphère $K_{\nu-1}$; le rayon ρ_ν de K_ν est défini par la condition d'être le plus petit des deux nombres :

$$\frac{1}{2}\sigma_{\nu-1}, \qquad \frac{1}{2}(\rho_{\nu-1} - \sigma_{\nu-1}).$$

en désignant par $\sigma_{\nu-1}$ la distance, des points $p_{i_{\nu-1}}$ et p_{i_ν}.

Les points $p_1, p_2, \ldots, p_{i_\nu - 1}$ sont situés tous en dehors de la sphère K_ν mais il y a un nombre infini de points de la série (p_ν), qui sont situés à l'intérieur de K_ν puisque le centre p_{i_ν} est, comme nous l'avons admis, un point-limite de P. Comme on a évidemment

$$\rho_\nu < \frac{1}{2^{\nu-1}},$$

les rayons des sphères K_ν deviennent infiniment petits pour $\nu = \infty$, et puisque les sphères K_ν, sont emboîtées de telle sorte que K_ν, est située à l'intérieur de $K_{\nu-1}$, celle-ci à l'intérieur de $K_{\nu-2}$, etc., on en conclut d'après un principe connu l'existence d'un point t dont s'approchent indéfiniment les centres p_{i_ν}, en sorte que l'on a

$$\mathop{lim}_{\nu=\infty} p_{i_\nu} \doteq t \qquad ;$$

le point t est donc point-limite de P. Mais de plus on s'assure, que t n'est pas un *point* appartenant à P ; car s'il l'était, on aurait $t = p_n$ pour une certaine valeur de l'indice n, équation *impossible*, puisque t est situé à l'intérieur de la sphère K_ν, quelque grand que soit ν, quand au contraire on peut prendre ν assez grand, savoir $\nu > n$, de sorte que p_n tombe en dehors de la sphère K_ν.

Donc nous avons démontré que P ne peut pas être un *ensemble parfait.*

Démonstration du théorème B.

α étant un nombre donné quelconque de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres, on a, quel que soit l'ensemble P, l'identité suivante :

(I) $$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}) + P^{(\alpha)}$$

dans laquelle α' parcourt tous les nombres entiers positifs qui sont *inférieurs* à α. La vérité de cette identité (I) découle facilement de la notion générale de *l'ensemble dérivé* $P^{(\alpha)}$ *de l'ordre* α.

Lorsque α est un nombre tel qu'il existe un autre $\alpha - 1$ qui précède α immédiatement, alors $P^{(\alpha)}$ est défini comme étant le *premier ensemble dérivé* de $P^{(\alpha-1)}$ mais lorsque α est un nombre tel (comme par exemple ω ou ω^ω ou $\omega^{\omega^\omega} + \omega^2$), qu'il n'a point de voisin qui le précède immédiatement, alors $P^{(\alpha)}$ est défini comme étant le plus grand commun diviseur de tous les ensembles dérivés $P^{[\alpha')}$ dont les ordres α' sont *inférieurs* à α.

D'après l'hypothèse admise dans notre théorème, $P^{(\alpha)}$ s'évanouit, on a donc ici :

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

Le nombre des valeurs de α' est ou fini ou infini selon que α appartient à la *première* ou à la *seconde* classe de nombres ; mais dans le dernier cas l'ensemble des valeurs de α' est de la *première* puissance (cf. la définition de la seconde classe de nombres dans *Gr.* § 11).

Chaque terme

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

de notre somme est un ensemble de points appartenant à la catégorie de ceux que j'appelle *ensembles isolés* (voir Annales math. T. 21 p. 51).

Comme je l'ai démontré au même endroit, un ensemble *infini* et *isolé* est toujours de la *première puissance*. Donc le terme

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

de notre somme est un ensemble ou fini, ou de la *première puissance*.

Par là, on conclut facilement que $P^{(1)}$ est aussi de la *première puissance* donc aussi P est de la première puissance, comme on le trouve démontré à l'endroit cité tout à l'heure.

Démonstration du théoreme C.

En désignant par Ω le premier nombre de la *troisième* classe de nombres, on a, quelque soit l'ensemble P, l'identité suivante :

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha} (P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)}) + P^{(\Omega)} \tag{2}$$

où α parcourt tous les nombres entiers positifs de la *première* et de la *seconde* classe de nombres.

L'ensemble P est d'après l'hypothèse admise dans notre théorème tel que son premier dérivé $P^{(1)}$ ait la *première puissance* ; donc aussi les dérivés $P^{(\alpha)}$, qui sont tous des diviseurs de $P^{(1)}$, ont la même puissance, en tant qu'ils sont constitués par un nombre infini de points.

En nous appuyant maintenant sur le théorème A, démontré plus haut, nous concluons que la différence $(P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)})$ *ne peut pas s'annuler tant que* $P^{(\alpha)}$ *n'est pas zéro.*

Si donc tous les dérivés $P^{(\alpha)}$ étaient *différents* de zéro, tous les termes $(P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)})$ de notre somme à droite de l'équation (2) le seraient de même et comme l'ensemble de ces *termes* est de la *seconde* puissance (cf. *Gr.* § 12), il s'ensuivrait à plus forte raison que l'ensemble de points à droite de notre équation (2) serait d'une puissance *non inférieure* à la *seconde* ; ce qui serait contraire à l'hypothèse, d'après laquelle l'ensemble $P^{(1)}$ à gauche de l'équation (2) est supposé de la *première* puissance.

Donc les dérivés $P^{(\alpha)}$ ne peuvent pas être tous différents de zéro, il existe donc des nombres α de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres tels que l'on a :

$$P^{(\alpha)} \equiv 0$$

De ces nombres α, il y en a un qui est le plus petit, comme il est facile de le voir.

Dans le mémoire *Gr.* page 31, j'ai aussi indiqué une proposition se rapportant au cas où $P^{(1)}$ n'est pas de la première puissance, et qui, dans la forme où je l'ai exprimée, n'est pas tout à fait juste dans sa généralité. Comme je l'ai trouvé alors, il existe sans doute, une seule décomposition :

$$P^{(1)} = R + S,$$

où S est un ensemble parfait, mais R un ensemble de la *première* puissance. Si passant de là, je dis que R est un ensemble réductible, ce n'est pas correct dans sa portée générale.

Monsieur Bendixson de Stockholm qui s'est occupé avec un succès distingué de l'examen de ma proposition a trouvé que R est toujours tel que, pour, un certain γ de la première ou de la seconde classe de nombres, on a l'équation :

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) = 0.$$

Il résulte des communications que M. Bendixson a eu l'obligeance de me faire, qu'il a retrouvé d'une manière parfaitement indépendante mes développements d'alors concernant ce sujet, et qu'il les a complétés et rectifiés dans le sens indiqué. Sur ma demande, M. Bendixson a voulu bien rédiger ses recherches pour être publiées à la suite de cette communication.

Halle, le 22 Avril 1883.

Le calcul de la Logique
George Boole

Dans un travail publié dernièrement [1], j'ai montré l'application d'une nouvelle forme particulière de raisonnement mathématique. Dans le présent essai, j'ai comme objectif de fournir un compte-rendu d'une portion du traité en question et ainsi de fournir une vue correcte de la nature du système développé. Je m'efforcerai d'établir clairement ce en quoi consistent ses caractéristiques distinctives, et fournirai une illustration plus particulière de quelques éléments qui sont moins présentés dans le travail original. La partie du système à laquelle je cantonnerai mes observations est celle qui traite des propositions catégoriques, et les points que je souhaite illustrer selon cette contrainte sont les suivants :

(1) Je parlerai de logique en tant qu'elle traite des relations entre classes, ainsi que des modes selon lesquels l'esprit voit ces relations.

(2) Précédemment à notre reconnaissance de l'existence de propositions, il y a des lois auxquelles la conception d'une classe est sujette, lois qui sont dépendantes de la constitution de l'intellect, et qui déterminent le caractère et la forme du processus de raisonnement.

(3) Ces lois peuvent être exprimées mathématiquement, et elles constituent la base d'un calcul interprétable.

(4) Ces lois sont de plus telles que toutes les équations qui sont formées contraintes par ces lois, même si elles sont exprimées par des signes fonctionnels, admettent une parfaite solution, de telle façon que tout problème de logique peut être résolu en se référant à un théorème général.

(5) Les formes sous lesquelles les propositions sont habituellement exhibées, en accord avec les principes de ce calcul, sont analogues à celles du langage philosophique.

(6) Bien que les symboles du calcul ne dépendent pas pour leur interprétation de l'idée de quantité, ils nous conduisent cependant, dans leur application particulière au syllogisme aux conditions quantitatives de l'inférence.

C'est en particulier de ces deux derniers points que je souhaite offrir ici une illustration, ceux-ci ayant été partiellement fournis comme exemples dans le travail que j'ai cité.

Les autres points, cependant, seront incidemment sujets de la discussion. Il sera nécessaire de fournir au préalable la notation suivante.

L'univers des objets concevables est représenté par 1 ou par l'unité. C'est la conception primaire. Toutes les conceptions de classes secondaires doivent être comprises comme étant formées à partir de la conception primaire par limitations, selon le schéma suivant.

Supposons que nous concevions un groupe quelconque d'objets constitué de X, Y, et autres, et que x, que nous appellerons symbole électif, représente l'opération de choisir dans ce groupe tous les X qu'il contient, ou de fixer notre attention sur les X à l'exclusion de tous ceux qui ne sont pas des X, y l'opération mentale consistant à sélectionner les Y, etc. ; alors, 1 ou l'univers étant la conception sujet, nous aurons

Journal mathématique de Cambridge et Dublin, Vol. III (1848), p. 183-98.

1. L'analyse mathématique de la logique, essai vers un calcul du raisonnement déductif. Cambridge, Macmillan ; London, G. Bell.

$$
\begin{aligned}
x1 \text{ ou } x \quad &= \text{la classe des } X, \\
y1 \text{ ou } y \quad &= \text{la classe des } Y, \\
xy1 \text{ ou } xy \quad &= \text{la classe dont chaque membre est à la fois } X \text{ et } Y,
\end{aligned}
$$

et etc..

De la même manière, nous aurons

$$
\begin{aligned}
1-x \quad &= \text{la classe des non-}X, \\
1-y \quad &= \text{la classe des non-}Y, \\
x(1-y) \quad &= \text{la classe dont les membres sont des } X \text{ mais des non-}Y, \\
(1-x)(1-y) \quad &= \text{la classe dont les membres ne sont ni des } X \text{ ni des } Y, \\
\text{etc.} &
\end{aligned}
$$

En outre, de considérations sur la nature des opérations mentales impliquées, il apparaîtra que les lois suivantes sont satisfaites.

En représentant par x, y, z des symboles électifs quels qu'ils soient,

$$
\begin{aligned}
x(y+z) &= xy + xz, & & (1) \\
xy &= yx, \qquad \text{etc.,} & & (2) \\
x^n &= x, \qquad \text{etc.} & & (3)
\end{aligned}
$$

Des premières lignes, on voit que les symboles électifs sont distributifs dans leur opération ; de la seconde, on voit qu'ils sont *commutatifs*. J'ai appelé la troisième la loi indexante ; elle est spécifique aux symboles électifs.

La vérité de ces lois ne dépend pas du tout de la nature, ou du nombre, ou des relations mutuelles, des individus inclus dans les différentes classes. Il peut y avoir un seul individu dans une classe, ou bien des milliers. Il peut y avoir des individus communs à plusieurs classes, ou les classes peuvent s'exclure mutuellement. Tous les symboles sont distributifs, commutatifs et tous les symboles électifs satisfont la loi exprimée par (3).

Ces lois sont en fait incarnées par tout langage parlé ou écrit. L'équivalence entre les expressions "un homme sage et bon" et "un homme bon et sage", n'est pas un simple truisme, mais une conséquence de la loi de commutativité exhibée en (2). Et il y a des illustrations similaires des autres lois.

Relié à ces lois, il y a un axiome général. Nous avons vu que les opérations algébriques effectuées avec ces symboles électifs représentent les processus mentaux. Ainsi la connexion de deux symboles par le signe + représente l'agrégation de deux classes en une classe simple, la connexion de deux symboles xy comme dans la multiplication, représente l'opération mentale de sélectionner dans la classe Y ces membres qui appartiennent aussi à une autre classe X, et etc. Par de telles opérations, la conception d'une classe est modifiée. Mais à côté de cela, l'esprit a le pouvoir de percevoir les relations d'égalité entre classes. L'axiome en question, alors, est que *si une relation d'égalité est perçue entre deux classes, cette relation reste non affectée quand les deux sujets sont modifiés de la même façon par les opérations précédemment décrites.* (A). Cette axiome, et non le "postulat d'Aristote", est le fondement réel de tout raisonnement, la forme et le caractère du processus étant, cependant, déterminé par les trois lois déjà établies.

Il est non seulement vrai que tout symbole électif représentant une classe satisfait la loi indexante (3), mais il peut être démontré rigoureusement que toute combinaison de symboles électifs $\phi(xyz\ldots)$, qui satisfait la loi $\phi(xyz\ldots)^n = \phi(xyz\ldots)$, représente une conception intelligible, - un groupe ou une classe définis par un nombre plus ou moins grand de propriétés constitué d'un nombre plus ou moins grand de parties.

Les quatre propositions catégoriques sur lesquelles la doctrice du syllogisme ordinaire est fondée sont

Tous les Y sont des X.	A,
Aucun Y n'est un X.	E,
Quelques Y sont des X,	I,
Quelques Y sont des non-X.	O.

Nous considèrerons ces propositions en référence aux classes sur lesquelles la relation est exprimée.

A. L'expression Tous les Y représente la classe Y et sera ainsi exprimée par y, les copula par le signe $=$, le terme indéfini, X, est équivalent à Quelques X. C'est une convention de langage que le mot Quelques est exprimé dans le sujet, mais non dans le prédicat d'une proposition. Le terme Quelques X sera exprimé par vx, dans lequel v est un symbole électif appropriée pour une classe V, dont quelques membres sont des X, mais qui est arbitraire à d'autres égards. Ainsi la proposition A sera exprimée par l'équation.

$$y = vx. \tag{4}$$

E. Dans la proposition, Aucun Y n'est un X, les particules négatives semblent être attachées au sujet plutôt qu'au prédicat auquel elles appartiennent manifestement [2]. Nous n'avons pas l'intention de dire que ces choses qui sont des non-Y sont des X mais que ces choses qui sont des Y sont des non-X. Maintenant la classe non-X est exprimée par $1 - x$; par conséquent, la proposition Aucun Y n'est un X, ou plutôt Tous les Y sont des non-X, sera exprimée par

$$y = v(1 - x). \tag{5}$$

I. Dans la proposition Quelques Y sont des X, ou Quelques Y sont quelques X, nous pouvons remarquer que le Quelques dans le sujet et le Quelques dans le prédicat font référence à la même classe arbitraire V, et ainsi écrire

$$vy = vx,$$

mais c'est moins une assomption qu'une contrainte de le faire. Ainsi, nous devrions écrire

$$vy = v'x, \tag{6}$$

v' faisant référence à une autre classe arbitraire V'.

O. Similairement, la proposition Quelques Y sont des non-X, sera exprimée par l'équation

$$vy = v'(1 - x) \tag{7}$$

On voit des considérations ci-dessus que les formes que prennent les quatre propositions catégoriques A, E, I, O dans la notation des symboles électifs sont analogues à celles du

2. Il y a deux façons de comprendre Aucun X n'est un Y. Premièrement, dans le sens où tous les X sont des non-Y. Deuxièmement, dans le sens où Il n'est pas vrai que certains X sont des Y, i.e. la proposition "Quelques X sont des Y" est fausse. La première de ces deux possibilités est une proposition catégorique simple. La seconde est *une assertion sur une proposition*, et cette expression appartient à une partie différente du système électif. Il me semble que c'est le deuxième sens, qui est vraiment adopté par ceux qui réfèrent à la négation, non, au couple. Faire référence au prédicat n'est pas un raffinement inutile, mais une étape nécessaire, pour que la proposition soit effectivement *une relation entre classes…* . Je crois qu'on trouvera que cette étape doit vraiment être effectuée dans les tentatives de démontrer les règles de distributivé d'Aristote. La transposition de la négation est un procédé commun du langage. L'habitude nous rend presque insensible à lui dans notre propre langage, mais dans une langue étrangère, le même principe se voit différemment, comme dans l'exemple grec, *οὐ ψημὶ* pour *ψημὶ οὐ*, cela nécessite d'être attentif.

langage naturel, *i.e.* avec les formes que les discours humains présentent, selon des règles entièrement construites sur une base scientifique. Dans une grande majorité de propositions qui peuvent être conçues par l'esprit, les lois d'expression n'ont pas été modifiées par l'usage, et l'analogie devient plus apparente, *e.g.* l'interprétation de l'équation

$$z = x(1-y) + y(1-x)$$

est, la classe Z constituée de tous les X qui sont des non-Y et de tous les Y qui sont des non-X.

Théorèmes généraux liés aux fonctions électives.

Nous sommes maintenant arrivés à cette étape, où nous sommes en possession d'une classe de symboles $x, y, z, etc.$ respectant certaines lois, et applicable à l'expression rigoureuse de toute proposition catégorique quelconque. Ce sera notre prochaine tâche d'exhiber quelques-uns des théorèmes généraux du calcul qui repose sur la base de ces lois, et nous appliquerons ensuite ces théorèmes dans le traitement de certains exemples.

Je ne montrerai que deux ensembles de théorèmes généraux : ceux reliés au développement de fonctions, et ceux reliés aux solutions d'équations.

Théorèmes de développement.

(1) Si x est un symbole électif, alors

$$\phi(x) = \phi(1)x + \phi(0)(1-x) \tag{8}$$

les coefficients $\phi(1), \phi(0)$, qui sont des fonctions algébriques quantitatives ou communes, sont appelés des modules, et x et $1-x$ sont les constituants.

(2) Pour une fonction de deux symboles électifs, nous avons

$$\phi(xy) = \phi(11)xy + \phi(10)x(1-y) + \phi(01)(1-x)y + \phi(00)(1-x)(1-y), \tag{9}$$

équation dans laquelle $\phi(11), \phi(10)$, etc. sont des variables quantitatives, et sont appelées les modules, et $xy, x(1-y)$, etc. les constituants.

(3) Fonctions de trois symboles :

$$\begin{aligned}\phi(xyz) \quad = \quad & \phi(111)xyz + \phi(110)xy(1-z) \\ & +\phi(101)x(1-y)z + \phi(100)x(1-y)(1-z) \\ & +\phi(011)(1-x)yz + \phi(010)(1-x)y(1-z) \\ & +\phi(001)(1-x)(1-y)z + \phi(000)(1-x)(1-y)(1-z) \end{aligned} \tag{10}$$

équation dans laquelle $\phi(111), \phi(110)$, etc. sont des modules, et $xyz, xy(1-z)$, etc. des constituants.

A partir de ces exemples, la loi générale de développement est évidente. Et je souhaite qu'on remarque que cette loi est une simple conséquence des lois primaires qui ont été exprimées en (1), (2), (3)

Théorème. *Si nous avons une équation quelconque $\phi(xyz\ldots) = 0$, et que nous développons le premier membre, alors tout constituant dont le module ne s'évanouit pas peut être rendu nul.*

Cela nous permet d'interpréter toute équation par une règle générale.

Règle. *Amener tous les termes du même côté, le développer en fonction de tous les symboles électifs qui y apparaissent, et rendre nul tout constituant dont le module ne s'évanouit pas.*

Pour la démonstration de ces résultats et de nombreux autres, je dois faire référence au travail original. On doit noter qu'à la page 66, z a été, par erreur, substitué à w, et que la référence de la page 80 devrait être une référence à la propriété Prop. 2.

Comme exemple, prenons l'équation

$$x + 2y - 3xy = 0 \tag{a}$$

Ici $\phi(xy) = x + 2y - 3xy$, d'où on tire les valeurs des modules qui sont

$$\phi(11) = 0, \qquad \phi(10) = 1, \qquad \phi(01) = 2, \qquad \phi(00) = 0,$$

de telle façon que l'expansion de (9) donne

$$x(1-y) + 2y(1-x) = 0$$

qui est en fait une autre forme de (a). Nous avons alors, par la règle

$$x(1-y) = 0, \tag{11}$$
$$y(1-x) = 0; \tag{12}$$

la première implique qu'il y a des non-X qui sont des non-Y, la seconde qu'il y a des non-Y qui sont des non-X, ces deux assertions ensemble exprimant la signification complète de l'équation originale.

Nous pouvons, cependant, souvent, recombiner les constituants avec un gain de simplicité.

Dans le cas présent, en soustrayant (12) de (11), nous avons $x - y = 0$, ou $x = y$, c'est-à-dire, la classe X est identique à la classe Y. Cette proposition est équivalente aux deux premières.

Toutes les équations sont ainsi de sens égal, ce qui donne, par expansion, les mêmes séries d'équations constituantes ; et *toutes sont interprétables.*

Solution générale des équations électives.

(1) La solution générale de l'équation $\phi(xy) = 0$, dans laquelle deux symboles électifs sont impliqués, y étant celui dont la valeur est recherchée est,

$$y = \frac{\phi(10)}{\phi(10) - \phi(11)} x + \frac{\phi(00)}{\phi(00) - \phi(01)} (1 - x). \tag{13}$$

Les coefficients

$$\frac{\phi(10)}{\phi(10) - \phi(11)}, \qquad \frac{\phi(00)}{\phi(00) - \phi(01)}$$

sont ici les modules.

(2) La solution générale de l'équation $\phi(xyz) = 0$, z étant le symbole dont on doit déterminer la valeur, est

$$\begin{aligned} z &= \frac{\phi(110)}{\phi(110)-\phi(111)}xy + \frac{\phi(100)}{\phi(100)-\phi(101)}x(1-y) \\ &\quad + \frac{\phi(010)}{\phi(010)-\phi(011)}(1-x)y + \frac{\phi(000)}{\phi(000)-\phi(001)}(1-x)(1-y) \end{aligned} \tag{14}$$

dont nous appellerons à nouveau les coefficients les modules. Les lois de leur formation seront vus, de telle façon que les théorèmes généraux qui auront été donnés pour la solution des équations électives à deux ou trois symboles, peuvent être regardés comme des exemples d'un théorème plus général applicable à toutes les équations électives quelles qu'elles soient. En appliquant ces résultats, on doit observer que si un module prend la forme $\frac{0}{0}$, il doit être remplacé par un symbole électif arbitraire w, et que si un module prend n'importe quelle valeur numérique sauf 0 ou 1, les constituants dont il est un facteur doivent être séparément mis à 0. Bien que ces conditions se déduisent seulement des lois auxquelles les symboles appartiennent, et sans référence à l'interprétation, ils ne rendront jamais la solution de toute équation interprétable en logique. Pour de telles formules aussi, *toute question sur les relations entre les classes doit être mise en référence.* Une ou deux illustrations simples devraient suffire.

(1) Étant donnée

$$yx = yz + x(1-z). \tag{b}$$

Les Y qui sont des X consistent en les Y qui sont des Z et les X qui sont des non-Z.
On recherche la classe Z.
Ici $\phi(xyz) = yx - yz - x(1-z)$,

$$\begin{gathered} \phi(111)=0 \qquad \phi(110)=0 \qquad \phi(101)=0, \\ \phi(100)=-1 \qquad \phi(011)=-1 \qquad \phi(010)=0, \\ \phi(001)=0 \qquad \phi(000)=0; \end{gathered}$$

et en substituant dans (14), on obtient

$$\begin{aligned} z &= \frac{0}{0}xy + x(1-y) + \frac{0}{0}(1-x)(1-y) \\ &= x(1-y) + wxy + w'(1-x)(1-y). \end{aligned} \tag{15}$$

Par conséquent la classe Z inclut tous les X qui sont des non-Y, un nombre indéfini de X qui sont des Y, et un nombre indéfini d'individus qui ne sont ni des X ni des Y. Les classes w et w' étant plutôt arbitraires, le reste indéfini l'est également ; il peut s'évanouir ou pas [3].

3. Cette conclusion peut être illustrée et vérifiée en considérant un exemple comme le suivant.
Soit
x l'ensemble des bateaux à vapeur, ou navires à vapeur,
y l'ensemble des navires armés,
z l'ensemble des vaisseaux de la Méditerranée,
L'équation (b) exprimerait alors que *les navires armés sont constitués par les navires armés de la Méditerranée et par les navires à vapeur non en Méditerranée.* De là il découle
(1) Qu'il n'y a pas de vaisseaux armés si ce n'est des bateaux à vapeur en Méditerranée.
(2) Que tous les bateaux non armés sont des bateaux de Méditerranée (puisque les navires à vapeur qui ne sont pas en Méditerranée sont armés). Ainsi nous inférons que *les navires en Méditerranée sont constitués de tous les vaisseaux non armés : n'importe quel nombre de navires non armés et n'importe quel nombre de vaisseaux non armés non à vapeur.* Ceci, exprimé symboliquement, est l'équation (15).

Puisque $1-z$ représente une classe, non-Z, et satisfait la loi indexante

$$(1-z)^n = 1-z$$

comme cela est évident en essayant, nous pouvons, si nous le souhaitons, déterminer les valeurs de cet élément de la même façon que nous pouvons le faire pour z.

Prenons, en illustration de ce principe, l'équation $y = vx$, (Tous les Y sont des X), et recherchons la valeur de $1-x$, la classe des non-X.

Posons $1-x=z$ alors $y=v(1-z)$, et si nous écrivons cela par la forme $y-v(1-z)=0$ et représentons le premier membre par $\phi(vyz)$, v prenant ici la place de x, dans (14), nous aurons

$$\begin{array}{llll} \phi(111)=1, & \phi(110)=0, & \phi(101)=0, & \phi(100)=-1, \\ \phi(011)=1, & \phi(010)=1, & \phi(001)=0, & \phi(000)=0; \end{array}$$

la solution prendra alors la forme

$$z = \frac{0}{0-1}vy + \frac{-1}{-1-0}v(1-y) + \frac{1}{1-1}(1-v)y + \frac{0}{0-0}(1-v)(1-y)$$

ou

$$1-x = v(1-y) + \frac{1}{0}(1-v)y + \frac{0}{0}(1-v)(1-y). \tag{16}$$

Le coefficient infini du second terme dans le second membre nous permet d'écrire

$$y(1-v) = 0 \tag{17}$$

le coefficient $\frac{0}{0}$ étant remplacé par w, un symbole électif quelconque, on a

$$1-x = v(1-y) + w(1-v)(1-y), \tag{18}$$

ou

$$1-x = \{v + w(1-v)\}(1-y).$$

On peut remarquer par ce résultat que le coefficient $v+w(1-v)$ dans le second membre satisfait la condition

$$\{v+w(1-v)\}^n = v + w(1-v),$$

comme c'est évident en l'élevant au carré. Cela représente alors une classe. Nous pouvons le remplacer par un symbole électif u, on a alors

$$1-x = u(1-y), \tag{19}$$

dont l'interprétation est

Tous les non-X sont des non-Y.

C'est une transformation connue en logique, on l'appelle conversion par contraposition, ou conversion négative. Mais c'est loin d'épuiser la solution que nous avons obtenue. Les logiciens ont négligé le fait que quand on convertit la proposition Tous les Y sont des (quelques) X en Tous les non-X sont des (quelques) non-Y, il y a une relation entre les deux (*quelques*), comprise dans les prédicats. L'équation (18) montre que quelle que soit la condition qui limite le X dans la proposition originale, les non-Y dans la proposition transformée consiste en tous ceux qui sont sujets de la même condition et un reste arbitraire de ceux qui ne sont pas sujets de la condition. L'équation (17) plus loin montre qu'il y a des non Y qui sont des non-sujets de cette condition.

Nous pouvons de la même manière réduire l'équation $y = v(1 - x)$, Aucun Y n'est un X, à la forme $x = v'(1 - y)$ Aucun X n'est un Y, avec une relation similaire entre v et v'. Si nous résolvons l'équation $y = vx$ Tous les Y sont des X, avec référence à v, nous obtenons la relation secondaire $y(1 - x) = 0$ Aucun Y est un non-X, et similairement de l'équation $y = v(1 - x)$ (Aucun Y n'est un X), nous obtenons $xy = 0$. Ces équations, qui peuvent également être obtenues d'autres façons, je les ai utilisées dans le traité original. Toutes les équations dont les interprétations sont reliées sont elles-mêmes reliées, par solution ou par développement.

Sur le Syllogisme.

Les formes des propositions catégoriques déja déduites sont

$y = vx$,	Tous les Y sont des X,
$y = v(1 - x)$,	Aucun Y n'est un X,
$vy = v'x$,	Quelques Y sont des X,
$vy = v'(1 - x)$,	Quelques Y sont des non-X,

dont les deux premières équations donnent par solution, $1 - x = v'(1 - y)$. Tous les non-X sont des non-Y, $x = v'(1 - y)$, Aucun X n'est un Y. Au schéma ci-dessus, qui est celui d'Aristote, nous pourrions ajouter les quatre propositions catégoriques

$1 - y = vx$,	Tous les non-Y sont des X,
$1 - y = v(1 - x)$	Tous les non-Y sont des non-X,
$v(1 - y) = v'x$,	Quelques non-Y sont des X,
$v(1 - y) = v'(1 - x)$	Quelques non-Y sont des non-X,

dont les deux premières peuvent être transformables en

$1 - x = v'y$,	Tous les non-X sont des Y,
$x = v'y$,	Tous les X sont des Y,
or	Aucun non-X n'est un Y,

Si maintenant les deux prémisses de tout syllogisme peuvent être exprimées par des équations des formes ci-dessus, l'élimination du symbole en commun y nous amènera à une équation exprimant la conclusion.

Ex. 1. Tous les Y sont des X, $\quad y = vx$,
Tous les Z sont des Y, $\quad z = v'y$,
l'élimination d'y donne

$$z = vv'x,$$

dont l'interprétation est

Tous les Z sont des X,

la forme du coefficient vv' indique que le prédicat de la conclusion est limité par les deux conditions qui limitent séparément les prédicats des prémisses.

Ex. 2. Tous les Y sont des X, $\quad y = vx$,
Tous les Y sont des Z, $\quad y = v'z$
L'élimination d'y donne

$$v'z = vx,$$

qui est interprétable en Quelques Z sont des X. Il est toujours nécessaire qu'un terme de la conclusion soit interprétable au moyen des équations des prémisses. Dans le cas ci-dessus, c'est le cas pour les deux.

Ex.3. Tous les X sont des Y, $x = vy$
Aucun Z n'est un Y, $z = v'(1 - y)$.

Plutôt que d'éliminer directement y, transformons plutôt l'équation par la solution comme en (19). La première donne

$$1 - y = u(1 - x),$$

u étant équivalent à $v + w(1 - v)$, dans lequel w est arbitraire. Éliminer $1 - y$ entre cela et la seconde équation du système, nous obtenons

$$z = v'u(1 - x),$$

dont l'interprétation est

Aucun Z n'est un X

Aurions-nous éliminé y direcgtement que nous aurions obtenu

$$vz = v'(v - x),$$

dont la solution réduite est

$$z = v'\{v + (1 - v)\}(1 - x),$$

dans laquelle w est un symbole électif arbitraire. Cela est parfaitement en accord avec le premier résultat.

Ces exemples peuvent suffire à illustrer l'emploi de la méthode dans des cas particuliers. Mais son applicabilité à la démonstration de théorèmes généraux est ici, comme dans d'autres cas, un défi plus important. Je joins ci-dessous les résultats d'une recherche récente sur les lois du syllogisme. Alors que ces résultats se caractérisent par leur grande simplicité et ne gardent, par exemple, que peu de trace de leur origine mathématique, il aurait été, je le conçois, très difficile de les obtenir par l'examen et la comparaison de cas particuliers.

Les lois du syllogisme déduites du calcul électif.

Nous allons prendre en compte toutes les propositions qui peuvent être faites en dehors des classes X, Y, Z, et qui peuvent être retrouvées dans n'importe laquelle des formes fournies dans le système suivant,

A, Tous les X sont des Z.	A', Tous les non-X sont des Z.
E, Aucun X n'est un Z.	E', $\left\{\begin{array}{l}\text{Aucun non-}X\text{ n'est un non-}Z.\\ \text{(Tous les non-}X\text{ sont des non-}Z\text{).}\end{array}\right.$
I, Quelques X sont des Z	I', Quelques non-X sont des Z
O, Quelques X sont des non-Z.	0', Quelques non-X sont des non-Z.

Il est nécessaire de rappeler que la quantité (universelle et particulière) et la qualité (affirmative et négative) doivent être comprises comme appartenant aux *termes* des propositions, ce qui est en effet l'appréciation correcte [4].

Ainsi, dans la proposition Tous les X sont des Y, le sujet Tous les X est universel-affirmatif, le prédicat (quelques) Y particulier-affirmatif.

4. Quand des *propositions* sont affectées de quantité et qualité, la qualité est vraiment celle du *prédicat*, qui exprime la *nature* de l'assertion, et la quantité celle du *sujet*, qui montre son étendue.

Dans la proposition, Quelques X sont des Z, les deux (sujet et prédicat) sont particulier-affirmatif.

La proposition Aucun X n'est un Z serait en langage philosophique écrite sous la forme Tous les X sont des non-Z. Le sujet est universel-affirmatif, le prédicat particulier-négatif.

Dans la proposition Quelques X sont des non-Z, le sujet est particulier-affirmatif, le prédicat particulier-négatif. Dans la proposition Tous les non-X sont des Y le sujet est universel-négatif, le prédicat particulier-affirmatif, et etc.

Dans un couple de prémisses, il y a quatre termes, *viz.* deux subjets et deux prédicats ; deux de ces termes, *viz.* ceux impliquant les Y ou les non-Y peuvent être appelés les termes médians, les deux autres les extrêmes, les uns impliquant X ou non-X, les autres Z ou non-Z.

Les conditions et les règles d'inférence sont alors les suivants.

1er cas. Les termes médians sont de qualité égale.
Condition d'inférence. Un terme médian universel.
Règle. Égaler les extrêmes.

2nd cas. Les termes médians sont de qualités opposées.
1er. Condition d'inférence. Un extrême universel
Règle. Changer la quantité et la qualité de chaque extrême, et égaler le résultat à l'autre extrême.
2nd. Condition d'inférence. Deux termes médians universels.
Règle. Changer la quantité et la qualité de l'une des extrêmes, et la rendre égale à l'autre extrême.

J'ajoute quelques exemples,

1er Tous les Y sont des X.
Tous les Z sont des Y.
On est dans le cas 1. Tous les Y est le terme médian universel. Egaliser les extrêmes donne Tous les Z sont des X, le terme le plus fort devenant le sujet.

2nd

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Tous les } X \text{ sont des } Y\\ \text{Aucun } Z \text{ n'est un } Y.\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l}\text{Tous les } X \text{ sont des } Y.\\ \text{Aucun } Z \text{ n'est un non-}Y.\end{array}\right.$$

On est dans le cas 2, et la première condition est satisfaite. Le terme médian est particulier-affirmatif dans la première prémisse, particulier-négatif dans la seconde. En prenant Tous les-Z comme l'extrême universelle, on a, en changeant sa quantité et sa qualité, Quelques non-Z, et l'égaler à l'autre extrême donne

Tous les X sont des (quelques) non-Z = Aucun X n'est un Z.

Si nous prenons Tous les X comme l'extrême universelle, on obtient

Aucun Z n'est un X.

3ème Tous les X sont des Y.
Quelques Z sont des non-Y.
On est aussi dans le cas 2, et la première condition est satisfaite. L'extrême universelle Tous les X devient, quelques non-X, par conséquent

Quelques Z sont des non-X,

4ème Tous les Y sont des X,

Tous les non-Y sont des Z.

On est dans le cas 2, et la seconde condition est satisfaite. L'extrême Quelques X devient Tous les non-X,

Tous les non-X sont des Z.

L'autre extrême traitée de la même manière donnera

Tous les non-Z sont des X,

qui est un résultat équivalent.

Si nous nous cantonnons aux prémisses Aristotéliciennes A, E, I, O, la seconde condition d'inférence dans le cas 2 n'est pas nécessitée. La conclusion ne sera pas nécessairement confinée au système Aristotélicien.

$$\text{Ex.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Quelques } Y \text{ sont des non-}X \\ \text{Aucun } Z \text{ n'est un } Y \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \text{Quelques } Y \text{ sont des non-}X. \\ \text{Tous les } Z \text{ sont des non-}Y. \end{array} \right.$$

On est dans le cas 2, et la première condition est satisfaite. Le résultat est

Quelques non-Z sont des non-X.

Voici ce qui me semble être les dernières lois de l'inférence syllogistique. Elles s'appliquent à tous les cas, et elles abolissent complètement la distinction de cas, la nécessité de conversion, les lois partielles [5] et arbitraires de distributivité, etc. Si toute la logique était réduisible au syllogisme, celles-ci pourraient être regardées comme les règles de la logique. Mais la logique, considérée comme la science des relations entre classes s'est avérée être d'une bien plus grande étendue. L'inférence syllogistique, dans le système électif, correspond à l'élimination. Mais ce n'est pas le plus élevé de ses procédés. Toutes les questions d'élimination peuvent être considérées comme subsidiaires du problème plus général de trouver les solutions d'équations électives. Pour ce problème, toutes les questions de logique et de raisonnement, sans exception, peuvent être citées. Pour les illustrations les plus complètes de ce principe, je dois cependant vous renvoyer vers mon travail original. La théorie des propositions hypothétiques, l'analyse des éléments positifs et négatifs, dans lesquelles toutes les propositions sont des buts résolvables, et d'autres sujets similaires sont aussi discutés dans le document en question.

Sans aucun doute, le but ultime de la spéculation logique est d'adresser les conditions qui rendent un tel raisonnement possible, et les lois qui déterminent ses caractère et expression. L'axiome général (A) et les lois (1), (2), (3), semblent fournir la solution la plus précise qui peut à présent être donnée à cette question. Quand nous passons à la considération des propositions hypothétiques, les mêmes lois et le même axiome général qui devrait peut-être également être regardé comme une loi, continuent de prévaloir, la seule différence étant que les sujets de pensée ne sont plus des classes d'objets, mais des cas de vérité ou fausseté coexistantes de différentes propositions. Ces relations que les logiciens désignent par les termes de conditions, disjonctions, etc., sont appelées par Kant conditions distinctes de la pensée. Mais c'est un fait très remarquable, que les expressions de telles relations puissent se déduire les unes des autres par un processus analytique simple. De l'équation $y = vx$, qui exprime une proposition *conditionnelle*, "Si la proposition Y est vraie, la proposition X est vraie,", on peut déduire

$$yx + (1-y)x + (1-y)(1-x) = 1$$

qui exprime la proposition *disjonctive*, "Soit Y et X sont vraies ensemble, soit X est vraie et Y est fausse, soient elles sont toutes les deux fausses," et à nouveau l'équation $y(1-x) = 0$, qui

5. Partielles, parce qu'elles font seulement référence à la quantité des X, même lorsque la proposition est liée aux non-X. Il serait possible de construire la contre-partie exacte des règles Aristotéliciennes du syllogisme, en ne quantifiant que les non-X. Le système dans le texte est *symétrique* parce qu'il est complet.

exprime une relation de coexistence, *viz.* que la vérité de Y et la fausseté de X ne coexistent pas. La distinction dans le regard mental qui mérite le plus d'être vue comme fondamentale, est, je le concède, celle qui distingue l'affirmation de la négation. De là, nous déduisons l'opération directe et l'opération inverse, le vrai et le faux des propositions, et l'opposition des qualités dans leurs termes.

La vision que ces recherches présentent de la nature du langage est très intéressante. Elles nous le montrent non comme une simple collection de signes, mais comme un système d'expression, dont les éléments sont sujets des lois de la pensée qu'ils représentent. Que ces lois soient aussi mathématiquement rigoureuses que les lois qui gouvernent les conceptions purement quantitatives de l'espace et du temps, de nombre et grandeur, est une conclusion que je n'hésite pas à soumettre à l'examen minutieux le plus exact.

Traduction d'extraits de Mathématiques conceptuelles de F. William Lawvere et Stephen H. Schanuel, Cambridge University Press

Session 13 : Monoïdes

En général, pour complètement définir une catégorie, on doit spécifier quels en sont les *objets*, quelles en sont les *applications*, quel objet est le *domaine de chaque application*, quel objet est le *codomaine de chaque application*, quelle application est l'*identité de chaque objet*, et quelle est l'application *composée* de n'importe quelles applications "composables" - six choses à spécifier. Bien sûr, cela ne peut pas être fait de façon arbitraire. Rappelons les lois qui doivent être satisfaites :

lois comptables
lois associatives
lois d'identité

Voici un cas particulier. Supposons que nous n'ayons qu'un seul objet, que nous appelons "$*$". Cela signifie que toutes les applications dans la catégorie sont des applications intérieures (de cet objet unique). Néanmoins, il peut y avoir de nombreuses applications dans cette catégorie. Supposons que comme applications, on prenne tous les entiers naturels : 0 est une application, 1 est une application, 2 est une application, et etc. Ce sont toutes des applications de $*$ dans $*$, de telle façon que nous pouvons écrire

$$* \xrightarrow{0} *, \quad * \xrightarrow{1} *, \quad * \xrightarrow{2} *, \quad * \xrightarrow{3} *, \quad \text{etc.}$$

Que prendrons nous comme composition dans cette catégorie ? Les possibilités sont nombreuses mais celle que je choisirai est juste la multiplication. En d'autres mots, la composée de deux applications dans cette catégorie - deux nombres - est leur produit : $n \circ m = n \times m$. Parce qu'il n'y a qu'un seul objet, les lois comptables [1] sont automatiquement satisfaites.

Maintenant, nous devons spécifier l'application identité sur le seul objet, $*$. Quel nombre devrions-nous déclarer être 1_* ? Maintenant 1_* est supposé satisfaire $1_* \circ n = n$ et $n \circ 1_* = n$ pour tout nombre n, et selon notre définition de la composition, ces équations signifient juste que 1_* est un nombre qui multiplié par n'importe quel autre nombre n donne n. Par conséquent, le seul choix qu'on a est clair : l'identité de $*$ doit être le nombre un : $1_* = 1$.

Definition : *Une catégorie avec exactement un objet est appelée un* **monoïde**.

Une telle catégorie semble un peu étrange dans le sens où les objets semblent sans particularité. Pourtant, il y a des façons d'interpréter une telle catégorie dans les ensembles. Les objets prennent en quelque sorte vie. Appelons la catégorie que nous avons définie $\mathcal{M}$ pour multiplication. Une interprétation se notera ainsi :

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{S}$$

Une interprétation "interprète" le seul objet $*$ de $\mathcal{M}$ comme l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, et chaque application dans $\mathcal{M}$ (un nombre naturel) est interprétée comme une application de l'ensemble des entiers naturels dans lui-même

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f_n} \mathbb{N}$$

définie par

$$f_n(x) = n \times x$$

Ainsi $f_3(x) = 3x$, $f_5(x) = 5x$, et etc. Selon cette définition, qu'est-ce que l'application f_1 ? Comment évalue-t-on cette application ? En multipliant par 1, n'est-ce-pas ? Du coup qu'est-ce que f_1 ?

1. (a) domaine et codomaine de l'identité 1_A d'une catégorie A sont tous les deux A ; (b)$g \circ f$ est seulement définie si le domaine de g est le codomaine de f ; (c) le domaine de $g \circ f$ est le domaine de f et le codomaine de $g \circ f$ est le codomaine de g.

Alysia : L'identité ?
C'est cela, $f_1 = 1_{\mathbb{N}}$. Aussi, la composée de deux applications $f_n \circ f_m$ est l'application qui évaluée en un nombre x donne

$$(f_n \circ f_m)(x) = f_n(f_m(x)) = n \times (m \times x) = (n \times m) \times x = (nm) \times x = f_{nm}(x)$$

ainsi nous concluons que

$$f_n \circ f_m = f_{nm}$$

Cela montre que cette interprétation préserve la structure de la catégorie, parce que les objets vont sur les objets, les applications vont sur les applications, la composition est préservée, et les applications identité vont sur les applications identité. Une telle interprétation "préservant la structure" d'une catégorie dans une autre est appelée un **foncteur** (de la première catégorie vers la seconde).

Un foncteur est vraiment nécessaire pour préserver toutes les notions de "domaine" et "codomaine", mais dans notre exemple, cela est automatique puisque toutes les applications ont le même domaine et le même codomaine.

Un tel foncteur est éclairant dans le sens où nous pouvons utiliser le symbole d'élévation à la puissance moins un comme une vaste généralisation de l'"inverse." Si nous changeons légèrement cet exemple, en prenant les rationnels plutôt que les entiers naturels comme applications dans $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, nous trouverons que $(f_3)^{-1} = f_{3^{-1}}$. L'application inverse d'une application dans la liste des interprétations est aussi un exemple d'application de la liste, ainsi si une application "nommée" est inversible, son inverse peut aussi être nommée. Dans l'exemple ci-dessus, f_3 est inversible et son inverse est nommée par l'inverse de 3.

Mais si les applications dans $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ consistent seulement en les entiers naturels, et si $*$ est interprétée comme l'ensemble des nombres rationnels, alors f_3 a un inverse, mais maintenant il n'y a pas d'entier naturel inverse de 3.

Danilo : Je peux voir que f_3 a une rétraction, mais pourquoi a-t-il une section [2] ?

Bien, la commutativité de la multiplication des nombres implique que $f_n \circ f_m = f_m \circ f_n$. Toutes les applications de la liste sont-elles inversibles ?

Omer : Non, f_0 ne l'est pas.

C'est vrai. $f_0(x) = 0 \times x = 0$, du coup, de nombreux entiers différents ont pour image 0 ; f_0 n'est pas inversible.

Introduisons maintenant une autre catégorie que nous pouvons appeler $\boldsymbol{\mathcal{N}}$. C'est aussi un monoïde, de telle façon qu'elle n'aura aussi qu'un seul objet, à nouveau noté $*$. Les applications seront à nouveau les nombres, mais maintenant, la composition sera l'addition plutôt que la multiplication. Quel nombre sera l'identité de $*$? La condition qu'1_* doit satisfaire signifie que "en ajoutant 1_* à n'importe quel nombre n, on obtient n". Par conséquent, 1_* doit être 0. Donner un foncteur $\boldsymbol{\mathcal{N}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}$ signifie que l'on interprète $*$ comme un certain ensemble S et chaque application $* \xrightarrow{n} *$ dans $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ comme une application interne $S \xrightarrow{g_n} S$ de l'ensemble S, de telle façon que $g_0 = 1_S$ et $g_n \circ g_m = g_{n+m}$.

On peut prendre pour S un certain ensemble de nombres et définir

$$g_n(x) = n + x$$

En particulier, si on prend $S = \mathbb{N}$ (les entiers naturels), par exemple le nombre 2 (comme application

2. Si $A \xrightarrow{f} B$, une rétraction de f est une application r de B dans A pour laquelle $r \circ f = 1_A$; une section de f est une application s de B dans A pour laquelle $f \circ s = 1_B$.

dans $\boldsymbol{\mathcal{N}}$) peut être interprété comme l'application g_2 (dans $\boldsymbol{\mathcal{S}}$) dont l'image interne est

$$g_2 = \boxed{\begin{array}{c} 0 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow \dots \\ 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow \dots \end{array}}$$

Maintenant nous devons vérifier que $g_{n+m}(x) = g_n(g_m(x))$, ce qui est similaire au cas précédent

$$g_n(g_m(x)) = n + (m + x) = (n + m) + x = g_{n+m}(x).$$

Tout ce qui a été présenté ci-dessus suggère un "exemple standard" d'interprétation d'un monoïde dans les ensembles, dans laquelle l'objet du monoïde est interprété comme l'ensemble des applications du monoïde lui-même. De cette façon, nous obtenons un foncteur standard de tout monoïde dans la catégorie des ensembles.

Il y a de nombreux foncteurs de $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ vers les ensembles autres que l'exemple standard. Supposons qu'on prenne un ensemble X avec une application interne α, et qu'on interprète $*$ comme X et qu'on envoie chaque application n de $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ (un entier naturel) sur la composée de α avec lui-même n fois, i.e. α^n, et pour préserver les identités, on envoie le nombre 0 sur l'application identité de X. De cette façon, on obtient un foncteur de $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ vers les ensembles, $h : \boldsymbol{\mathcal{N}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}$ qui peut être résumé ainsi :

1. $h(*) = X$,

2. $h(n) = \alpha^n$, et

3. $h(0) = 1_X$. (Il est raisonnable, pour un endomorphisme α d'un objet X, de définir le symbole α^0 pour signifier 1_X ; alors (3) devient un cas particulier de (2).)

Alors il est clair que $h(n + m) = h(n) \circ h(m)$.

De cette manière, à chaque fois qu'on spécifie un ensemble-avec-endomorphisme $X^{\circlearrowleft\alpha}$, on obtient une interprétation fonctorielle de $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ dans les ensembles. Cela suggère qu'un autre nom raisonnable pour $\boldsymbol{\mathcal{S}}^{\circlearrowleft}$ devrait être spuissn.jpg pour suggérer qu'un objet est un foncteur de $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ vers $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. C'était la catégorie des systèmes dynamiques (appelés de façon plus appropriée "systèmes dynamiques à temps-discret"). Un système dynamique à temps-discret est juste un foncteur de ce monoïde $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ vers la catégorie des ensembles. Que serait un "système dynamique à temps continu" ?

Danilo : Remplaçons juste les entiers naturels par des nombres réels ?

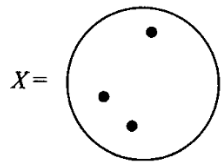
C'est cela. Autorisons tous les nombres réels comme applications dans le monoïde. Alors, donner un foncteur de ce nouveau monoïde $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ vers les ensembles revient à donner un ensemble X et un endomorphisme $X^{\circlearrowleft\alpha_t}$ pour chaque nombre réel t. Pour préserver la composition, nous devons nous assurer qu'$\alpha_0 = 1_X$, et que $\alpha_{s+t} = \alpha_s \circ \alpha_t$. Nous pouvons penser à X comme à l'ensemble des "états" d'un système physique qui, s'il est dans l'état x à un certain instant, alors t unités de temps plus part sera dans l'état $\alpha_t(x)$.

(p. 338 (fin de la section 31) et sections suivantes) La discussion ci-après donne une brève introduction à l'algèbre des parties. Cette algèbre a reçu un large développement, spécialement dans l'étude du comportement des opérateurs logiques quand l'objet dans lequel les parties vivent varie lui-même selon une application, et dans les études (en analyse fonctionnelle et en topologie générale) des parties d'objets-applications. L'algèbre logique développée sert d'outil auxiliaire utile dans l'étude du contenu central des mathématiques, qui est la variation des quantités dans l'espace ; en effet, c'est une forme particulière de cette variation, connu sous le nom de faisceau, qui a amené à la première découverte, par A. Grothendieck en 1960, de la classe des catégories connues sous le nom de topos. Ainsi le mot grec *topos* signifiant lieu ou situation a été adopté pour signifier un mode de cohésion ou variation (d'une sorte) de catégorie.

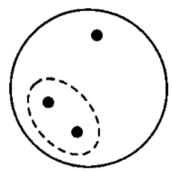
Session 32 : Sous-objets, logique, et vérité

1. Sous-objets

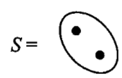
Nous allons trouver un objet remarquable qui relie les **sous-objets**, la **logique**, et la **vérité**. Que souhaite-t-on dire par sous-objet, ou partie d'un objet ? Supposons que nous ayons un ensemble abstrait tel que



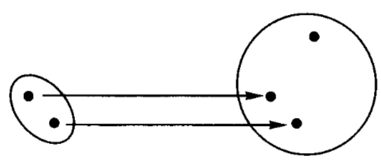
et que nous regardions certains de ses éléments, par exemple ceux indiqués sur la figure



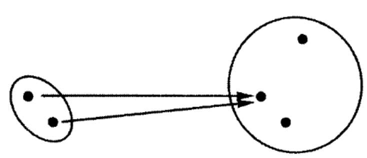
Ils constituent ce qu'on appelle une *partie* de l'ensemble X. Ce concept de "partie" comprend deux ingrédients. D'abord, une partie a une *forme*, qui dans cet exemple est un ensemble S avec précisément deux éléments



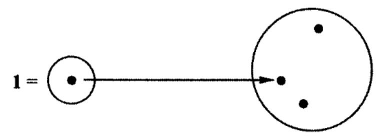
mais cela n'a pas de sens de dire que S lui-même est une partie de X, parce qu'il y a différentes parties de X qui ont la même forme. Ainsi, un second ingrédient est nécessaire pour déterminer une partie de X : une application d'"inclusion" qui indique la façon particulière dont l'ensemble S est inséré dans X :



Une partie de X (de forme S) devrait par conséquent être une application de S dans X. Mais il y a beaucoup d'applications de S dans X (dans l'exemple ci-dessus il y en a précisément $3^2 = 9$) et nous ne souhaiterions pas appeler la plupart d'entre elles parties, par exemple



Il y a une partie de X qui provient de cette application, mais ce n'est pas une partie de forme S ; c'est une application de **1** dans X, notamment



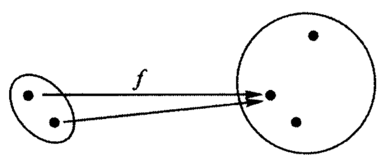
Qu'est-ce qu'une application $S \longrightarrow X$ devrait satisfaire pour être appelée une "application d'inclusion" ?

Définition : *Dans toute catégorie, une application $S \xrightarrow{i} X$ est une **inclusion**, ou **monomorphisme** si elle satisfait la condition suivante*

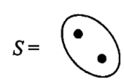
Pour tout objet T et toute paire d'applications s_1, s_2 de T dans S
$is_1 = is_2$ implique $s_1 = s_2$.

D'autres mots sont possibles à la place d'"inclusion" ou d'"application d'inclusion", ce sont : "application non-singulière", particulièrement dans les ensembles, "application injective" et "application un-un (bijective)". Il y a une notation spéciale pour indiquer qu'une application $S \xrightarrow{i} X$ est une inclusion ; plutôt que d'écrire une flèche droite comme $\longrightarrow$, on met un petit hameçon, $\subset$, à son bout, ainsi $S \xhookrightarrow{i} X$ pour indiquer qu'i est une application d'inclusion.

Selon notre définition, l'application



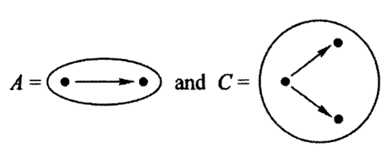
est non injective parce qu'il y a deux applications *différentes* d'un ensemble vers



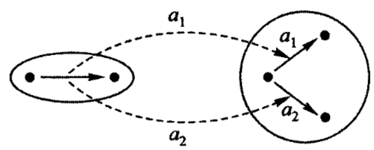
qui composées avec f donnent le même résultat (en fait, dans ce cas particulier, il est même vrai que toutes les applications de *n'importe quel* ensemble donné vers S donne le même résultat quand on les compose avec f).

Un bon exemple d'une application d'inclusion dans les ensembles est l'application qui assigne à chaque étudiant de la classe, la chaise qu'il occupe. (Pour que ça soit une application, tous les étudiants doivent être assis, et c'est une application d'inclusion s'il n'y a pas de personnes assises sur les genoux d'autres !). Dans cet exemple, on peut prendre pour S l'ensemble de tous les étudiants de la classe et X l'ensemble de toutes les chaises de la classe. L'exemple illustre que le même ensemble S peut recouvrir différentes parties de l'ensemble X, parce qu'un autre jour, les étudiants peuvent s'asseoir à d'autres places et ainsi déterminer une partie différente de l'ensemble des chaises. Ainsi, une partie de X n'est pas spécifiée juste par un autre ensemble, mais par un autre ensemble avec une application d'inclusion de cet ensemble vers X.

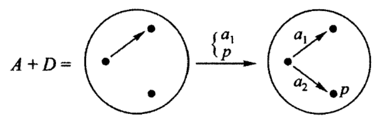
Pour un exemple dans la catégorie $\boldsymbol{\mathcal{S}}^{\downdownarrows}$ de graphes non-réflexifs, considérons les graphes



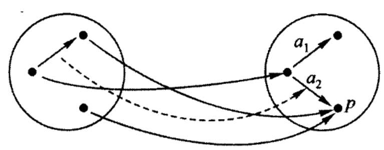
Nous pouvons voir deux parties différentes de *sous-graphes* de C de forme A :



bien sûr, a_1 et a_2 sont seulement deux des nombreux sous-graphes qu'a C. Un autre sous-graphe est spécifié par



Noter que l'application $\left\{ \begin{array}{l} a_2 \\ p \end{array} \right.$ de $A + D$ vers C, i.e.



ne donne pas un sous-graphe parce qu'elle est non injective.

2. Vérité

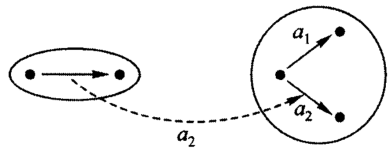
Laissez-moi illustrer que si vous avez une partie de X et que vous choisissez n'importe quel élément particulier ou n'importe quelle figure particulière dans X, cet élément ou cette figure peut être déjà inclus(e) dans la partie. Comment cette idée peut-elle être exprimée juste en fonction des applications et de la composition ? Supposons que nous ayons une figure $T \xrightarrow{x} X$ et que nous ayons une partie $S \xhookrightarrow{i} X$. Si l'on revient à l'exemple des étudiants et des chaises ci-dessus, x peut être juste une chaise particulière. Alors pour demander si cette chaise x est incluse dans la partie des chaises déterminée par l'assoiement des étudiants consiste juste à demander si la chaise x est occupée, et cela, en retour, consiste juste à demander s'il y a une application f pour remplir le diagramme

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[dr, "x"] & \\ S \arrow[rr, hook, "i"] & & X \end{tikzcd}$$

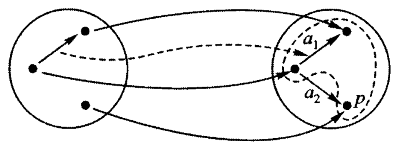
notamment, une application f telle que $i \circ f = x$. L'injectivité de i implique qu'il peut seulement y avoir au plus une application f qui "prouve" que la chaise x est occupée, ce qui signifie qu'elle est incluse dans la partie S, i.

Dans l'exemple ci-dessus où la figure $T \xrightarrow{x} X$ est juste un point de l'ensemble des chaises, l'objet T est terminal, mais nous devons souligner que T peut être n'importe quel objet, puisque le même concept s'applique à des figures arbitraires de n'importe quelle forme.

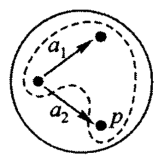
Comme exemple dans la catégorie des graphes, nous pouvons prendre les applications que nous avions précédemment ; comme figure x, on prend



et comme partie S, i, on prend

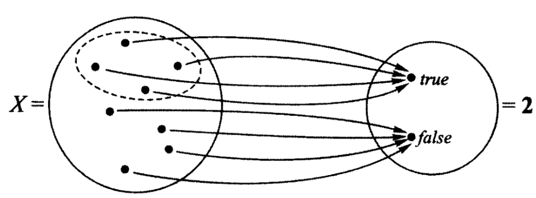


et maintenant, on demande : Est-ce que la flèche a_2 de X est incluse dans la partie S, i ? La réponse à cette question est clairement "non". C'est évident sur la figure



et on peut aussi vérifier qu'aucune des applications de A vers $A + D$ composée avec i ne donne x. Pourtant, on ne peut éviter le sentiment que cette réponse ne rend pas complètement justice à la question, parce que bien que la figure a_2 ne soit pas dans le sous-graphe indiqué de X, à la fois sa source et son but le sont. Ainsi, il y a un certain degré de vérité dans l'assertion qu'a_2 est incluse dans le sous-graphe S, i ; ce n'est pas complètement faux. Cela suggère qu'il est possible de définir différents degrés de vérité appropriés pour la catégorie des graphes, de manière à pouvoir rendre complètement justice en répondant à de telles questions.

Revenons à la catégorie des ensembles et voyons quelle est la situation là. Si nous avons une partie d'un ensemble et un point dans cet ensemble, et que quelqu'un dit que le point est inclus dans la partie, il n'y a que deux niveaux possibles de vérité à cette assertion : elle est soit vraie, soit fausse. Ainsi, dans la catégorie des ensembles, l'ensemble à deux éléments $\mathbf{2} = \{vrai, faux\}$ a la propriété suivante (au moins pour les points x, mais en fait pour les figures de n'importe quelle forme) : Si X est un ensemble et $S \overset{i}{\hookrightarrow} X$ est n'importe quel sous-ensemble de X, il y a exactement une fonction $\varphi_s : X \longrightarrow \mathbf{2}$ telle que pour tout x, x est inclus dans S, i si et seulement si $\varphi_s(x) = vrai$.



Ainsi, une fois que nous avons choisi un point $\mathbf{1} \xrightarrow{vrai} \mathbf{2}$, nous avons une correspondance un-un

$$\frac{\textit{parties de } x}{\textit{applications } X \longrightarrow \mathbf{2}}$$

En particulier, cela nous autorise à compter le nombre de parties de X, qui est égal au nombre d'applications de X vers $\mathbf{2}$, et celui-ci, en retour, est égal au nombre de points de $\mathbf{2}^X$.

Étant donnée une partie d'un ensemble X, disons $S \overset{i}{\hookrightarrow} X$, son application correspondante $X \xrightarrow{\varphi_s} \mathbf{2}$ est appelée l'application *caractéristique* de la partie S, i, puisqu'au moins φ_s caractérise les points de X qui sont inclus dans la partie S, i comme les points x tels que $\varphi_s(x) = vrai$. En réalité, l'application φ_s fait bien plus que ça puisque, comme indiqué ci-dessus, cette caractérisation est valide pour toutes sortes de figures $T \xrightarrow{x} X$ et non seulement pour des points ; la seule différence est que quand T n'est pas l'ensemble terminal, nous avons besoin d'une application $vrai_T$ de T dans $\mathbf{2}$ plutôt que d'une application $vrai : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$. L'application $vrai_T$ n'est rien d'autre que la composée de l'unique application $T \longrightarrow \mathbf{1}$ dans $vrai : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "true_T"'] & \mathbf{1} \arrow[r, "true"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$$

Pour résumer : La propriété fondamentale de l'application caractéristique φ_s est que pour *toute* figure $T \xrightarrow{x} X$, x est incluse dans la partie S, i de X si et seulement si $\varphi_s(x) = vrai_T$.

3. L'objet valeur-de-vérité

Voyons maintenant comment faire quelque chose de similaire dans la catégorie des graphes. Donner une partie d'un objet X dans cette catégorie (i.e. donner un sous-graphe d'un graphe X) revient à donner une partie S, de l'ensemble des flèches de X, et une partie S_D de l'ensemble des points de X tels que la source et la cible de chaque flèche dans S_A est un point dans S_D :

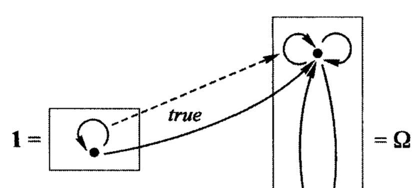
$$\begin{tikzcd} S_A \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & arrows\,(X) \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ S_D \arrow[r, hook] & dots\,(X) \end{tikzcd}$$

Maintenant nous avons besoin d'un graphe qui joue le même rôle pour les graphes que celui que joue l'ensemble $\mathbf{2}$ pour les ensembles. Nous voulons un graphe Ω, ainsi qu'un point spécifié $\mathbf{1} \xrightarrow{vrai} \Omega$, avec les propriétés suivantes : les applications de n'importe quel graphe X vers Ω doivent correspondre aux parties de X

$$\frac{S \hookrightarrow X}{X \xrightarrow{\varphi_S} \Omega}$$

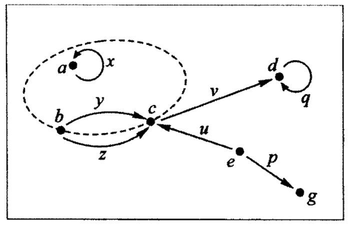
de telle manière que pour chaque figure $T \xrightarrow{x} X$ de X, $\varphi_S s = vrai_T$ si et seulement si x est inclus dans la partie S. Si une telle paire Ω et $1 \xrightarrow{vrai} \Omega$ existe, elle est caractérisée de manière unique par la propriété ci-dessus. Ce sera un bonus surprenant que pour chaque figure $T \xrightarrow{x} X$, l'application $T \xrightarrow{\varphi_S x} \Omega$ nous dise le "niveau de vérité" de l'assertion que x est inclus dans la partie donnée S.

Par chance, un tel objet pointé existe dans la catégorie des graphes et c'est le suivant $\mathbf{1} \xrightarrow{vrai} \Omega$:

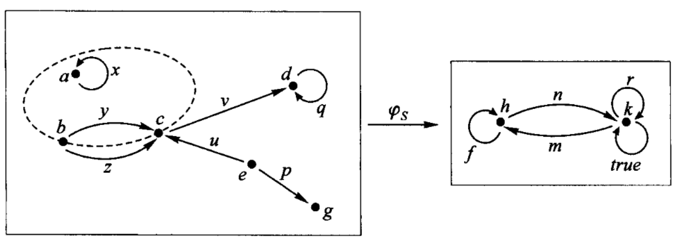


Ce graphe Ω joue parmi les graphes le rôle que l'ensemble $\mathbf{2}$ joue parmi les ensembles. Il y a cinq flèches et deux points dans Ω, qui représente les différents degrés de vérité qu'une assertion peut prendre. (Ici nous considérons des assertions de la forme "une certaine figure est incluse dans un certain sous-graphe"). Ces sept éléments représentent les sept relations possibles dans lesquelles un élément de X (flèche ou point) peut entretenir avec un certain sous-graphe de X (il y a cinq possibilités pour une flèche et deux pour un point). Ce sont les suivantes

(a) Pour les flèches
1. La flèche est en effet incluse dans le sous-graphes. Des exemples de cela sont les flèches x et y, par rapport au sous-graphe indiqué du graphe suivant.

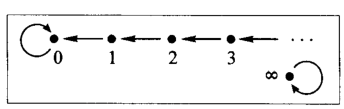


2. La flèche n'est pas dans le sous-graphe, mais sa source et sa cible sont une flèche z dans le graphe ci-dessus).
3. La flèche n'est pas dans le sous-graphe et sa source non-plus, mais sa cible l'est (e.g. la flèche u ci-dessus),
4. La flèche n'est pas dans le sous-graphe ni sa cible, mais sa source l'est (e.g. la flèche v ci-dessus).
5. La flèche n'est pas dans le sous-graphe et ni sa source ni sa cible non plus (e.g. les flèches p et q ci-dessus).
Pour les points
1. Le point est dans le sous-graphe (e.g. les points a, b, et c ci-dessus.)
2. Le point n'est pas dans le sous-graphe (e.g. les points d, e, et g dans la figure dessinée ci-dessus).
Ainsi, dans l'exemple expliqué ci-dessus, l'application caractéristique de la partie indiquée est la suivante

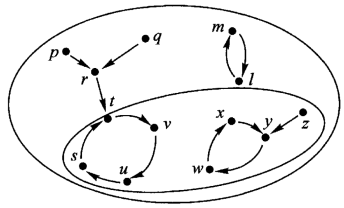


définie sur les flèches comme $\varphi_S(x) = \varphi_S(y) = vrai, \varphi_S(z) = r, \varphi_S(u) = n, \varphi_S(v) = m, \varphi_S(p) = f$ et $\varphi_S(q) = f$ (et similairement sur les points).

La catégorie des systèmes dynamiques a aussi un objet valeur-de-vérité Ω ; il est surprenant qu'il y ait un nombre infini d'éléments ou de "valeurs-de-vérité", et cet objet n'est pas l'ensemble des nombres naturels avec l'endomorphisme *successeur*, c'est plutôt l'opposé à cela dans le sens où la dynamique va dans la direction opposée. On voit cet objet des valeurs-de-vérité dans la catégorie des systèmes dynamiques sur le dessin suivant :



L'explication de cela est qu'un sous-système est la partie d'un système dynamique qui est fermée sous la dynamique et si vous prenez un état x et demandez si x est inclus dans le sous-système, la réponse peut être "non, mais il le sera dans une étape", ou dans deux étapes, etc. Par exemple, considérons le système sous-dynamique indiqué ci-dessous :



Si on demande si l'état p est dans le sous-système, la réponse est "Non, mais oui après deux étapes", alors que la même question à propos de m a comme valeur-de-vérité ∞, "toujours faux".

Ainsi pour chaque état dans le système complet, l'assertion exprimant qu'il est dans le sous-système a une valeur définie dans Ω ; cette valeur n'est $vrai = 0$ que pour huit des états.

Danilo : Que dire du cas d'un élément qui quitte le sous-système ?

Nous parlons ici de systèmes sous-dynamiques, i.e. d'applications d'inclusions dont les domaines sont aussi des objets dans la catégorie des systèmes dynamiques. Ainsi les éléments ne "quittent" jamais ; le cas intéressant est qu'ils pourraient entrer depuis le système plus grand. Nous pouvons, bien sûr, considérer les *sous-ensembles* de l'ensemble d'états sous-tendant un système dynamique donné.

Il y a, en fait, un *système dynamique* plus grand $\hat{\Omega}$ que nous pourrions appeler l'espace des "valeurs-de-vérité chaotiques" avec la propriété que les applications $X \xrightarrow{\varphi} \hat{\Omega}$ des systèmes dynamiques correspondent à ces sous-ensembles arbitraires de X ; seulement ces φ qui appartiennent à $\Omega \hookrightarrow \hat{\Omega}$ correspondent à des sous-systèmes réels. Il y a des "opérteurs modaux" $\hat{\Omega} \rightrightarrows \Omega$ qui relient tout sous-ensemble A d'un X quelconque au plus petit sous-système de X contenant A et au plus grand sous-système qui est contenu dans A.

L'espace d'applications Ω^Y de l'objet valeur-de-vérité a comme points les parties de Y, comme cela sera discuté dans la prochaine et dernière section. Dans de nombreuses catégories, cela permet d'obtenir une clarification plus grande de la construction du co-égaliseur d'une relation d'équivalence $X \rightrightarrows Y$.

Session 33 : Parties d'un objet : Topos

1. Parties et inclusions

Dans la session précédente, nous avons utilisé l'idée d'inclusion, qui est à la base de la vérité et de la logique ; maintenant nous allons la considérer plus en détail. La logique (dans un sens étroit) concerne en premier lieu les les sous-objets ; l'importante chose concernant les sous-objets est la manière dont ils sont reliés, et les relations les plus basiques sont données par les applications d'une certaine catégorie.

Si X est un objet donné d'une catégorie $\mathcal{C}$, alors, comme nous l'avons déjà expliqué, nous pouvons former une autre catégorie $\mathcal{C}/X$: un objet de $\mathcal{C}/X$ est une application de $\mathcal{C}$ de codomaine X, et une application d'un objet $A = (A_0 \xrightarrow{\alpha} X)$ vers un objet $B = (B_0 \xrightarrow{\beta} X)$ est une application de $\mathcal{C}$de A_0 vers B_0 qui fait correspondre β à α, i.e. une application $A_0 \xrightarrow{f} B_0$ telle que $\beta f = \alpha$

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B_0 \arrow[dl, "\beta"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Bien sûr, nous obtenons une catégorie, parce que si nous avons une autre application

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\beta"'] & & C_0 \arrow[dl, "\gamma"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

i.e. $\gamma g = \beta$ alors gf est aussi une application dans $\mathcal{C}/X$ puisque $\gamma(gf) = \alpha$;

$$\gamma(gf) = (\gamma g)f = \beta f = \alpha.$$

Nous voulons définir une partie de cette catégorie, notée par $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}/X$ qui est appelée *la catégorie des parties de* X. Les *objets* de $\mathcal{P}(X)$ sont tous des objets α de $\mathcal{C}/X$ qui sont des *applications d'inclusions dans* $\mathcal{C}$, i.e. les objets de $\mathcal{P}(X)$ sont les parties ou sous-objets de X dans $\mathcal{C}$. Les applications de $\mathcal{P}(X)$ sont toutes les applications entre ses objets dans $\mathcal{C}/X$; mais comme nous l'avons noté dans la dernière session, étant donnés deux objets $A_0 \xrightarrow{\alpha} X$ et $B_0 \xrightarrow{\beta} X$ dans $\mathcal{P}(X)$, il y a *au plus une* application $A_0 \xrightarrow{f} \beta_0$ dans $\mathcal{C}$ telle que $\beta f = \alpha$

Si la catégorie $\mathcal{C}$ a un objet terminal $\mathbf{1}$, alors nous pouvons former la catégorie $\mathcal{C}/\mathbf{1}$, mais elle s'avère n'être rien d'autre que $\mathcal{C}$, puisqu'elle a un objet pour chaque objet de $\mathcal{C}$ (une application $A_0 \longrightarrow \mathbf{1}$ ne contient pas plus d'information que le seul objet A_0 de $\mathcal{C}$) et ses applications sont précisément les applications de $\mathcal{C}$. Par conséquent, la catégorie des parties de $\mathbf{1}$, $\mathcal{P}(\mathbf{1})$, est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, précisément la sous-catégorie déterminée par ces objets A_0 dont l'unique application $A_0 \longrightarrow \mathbf{1}$ est injective. Ainsi, alors qu'un sous-objet d'un objet général X implique à la fois un objet A_0 et une application $A_0 \xrightarrow{\alpha} X$, quand $X = \mathbf{1}$, seul A_0 a besoin d'être spécifié, de telle façon qu'"être une partie de $\mathbf{1}$" peut être regardé comme étant une *propriété* de l'objet A_0, plutôt qu'une *structure* additionnelle α.

Comme exemple de la catégorie des parties d'un objet terminal, on peut considérer les parties de l'ensemble terminal d'une catégorie d'ensembles. Les objets de cette catégorie sont tous les ensembles dont l'application vers l'ensemble terminal est injective. Pouvez-vous donner un exemple d'un tel ensemble ?

Danilo : L'ensemble terminal lui-même.

Oui. En fait, dans n'importe quelle catégorie, toutes les applications dont le domaine est un objet terminal sont injectives. Et une application d'un objet terminal vers un objet terminal est même un isomorphisme. Un autre exemple ?

Fatima : L'ensemble vide.

Oui. La seule application $\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1}$ est aussi injective parce que n'importe quelle application de domaine $\mathbf{0}$ est injective : pour tout ensemble X, il y a au plus une application $X \longrightarrow \mathbf{0}$ et par conséquent, il n'est pas possible de trouver deux applications différentes $X \longrightarrow \mathbf{0}$ qui composées avec l'application $\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1}$ donnent le même résultat. Y a-t-il d'autres ensembles dont l'application vers l'ensemble terminal est injective ? Non. Par conséquent, la catégorie des parties ou des sous-ensembles de l'ensemble terminal est très simple : elle a seulement deux objets non-isomorphes $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$, et seulement une application en plus des identités. Elle peut être dessinée ainsi

$$\mathcal{P}(\mathbf{1}) = \boxed{\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1}}$$

Dans cette catégorie, il est habituel d'appeler les deux objets $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$ respectivement *faux* et *vrai*, ce qui fait que (1) peut aussi être dessiné ainsi

$$\mathcal{P}(\mathbf{1}) = \boxed{faux \longrightarrow vrai}$$

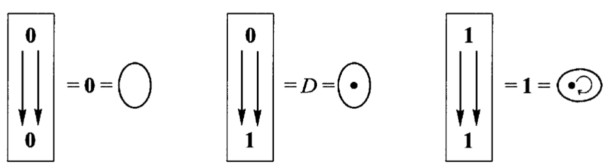
Qu'en est-il de la catégorie des graphes $\mathcal{C} = \mathcal{S}^{\downdownarrows}$? Quelle est la catégorie des parties de l'objet terminal dans cette catégorie ? Pour répondre à cela, nous devons commencer par déterminer ces graphes X de telle façon que l'unique application $X \longrightarrow \mathbf{1}$ vers le graphe terminal soit injective. Pour cela, il est utile de se rappeler qu'un graphe, c'est deux ensembles (un ensemble de flèches et un ensemble de points) et deux applications,

$$\boxed{\begin{tikzcd} \textit{arrows} \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ \textit{dots} \end{tikzcd}}$$

et que pour le graphe terminal, les deux ensembles sont des singletons, de telle façon que nous devons trouver les différentes possibilités pour les ensembles *flèches* et *points* pour lesquels la seule application de graphes

$$\begin{tikzcd} \textit{arrows} \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & \mathbf{1} \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\ \textit{dots} \arrow[r, "f_D"'] & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

est injective. Cela signifie (exercice) que les deux applications d'ensembles f_A, et f_D doivent être injectives, chacun des ensembles *flèches* et *points* doit être soit vide soit avoir un seul élément. Ainsi, tout sous-graphe du graphe terminal est isomorphe à l'un de ces trois graphes :



Ces trois graphes et les applications entre eux forment une catégorie qui peut être dessinée ainsi

$$\mathcal{P}(\mathbf{1}) = \boxed{\mathbf{0} \longrightarrow D \longrightarrow \mathbf{1}}$$

Les graphes $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ sont aussi appelés respectivement "*faux*" et "*vrai*", de telle façon que nous pouvons écrire

$$\mathcal{P}(\mathbf{1}) = \boxed{faux \longrightarrow D \longrightarrow vrai}$$

Ici le graphe D représente une valeur de vérité intermédiaire qui peut être interprétée comme "vrai pour les points mais faux pour les flèches".

Les réponses que nous obtenons pour "les parties de $\mathbf{1}$" semblent familières, parce que nous les avons déjà vues précédemment : l'application $X \longrightarrow \mathbf{1}$ est injective si et seulement si X est idempotent.

Comme cela a été souligné au début de cette session, étant donnés deux objets $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$, et $B \overset{\beta}{\hookrightarrow} X$ dans $\mathcal{P}(X)$, il y a au plus une application $A \xrightarrow{f} B$ dans $\mathcal{C}$ telle que $\beta f = \alpha$. Ainsi, la catégorie des parties d'un objet est très spéciale. Pour n'importe quels objets au nombre de deux, il y a au plus une application du premier vers le second. Une catégorie qui a cette propriété est appelée un *pré-ordre* ou un *poset* (pour ensemble pré-ordonné). Ainsi, *la catégorie des sous-objets d'un objet donné dans n'importe quelle catégorie est un poset.*

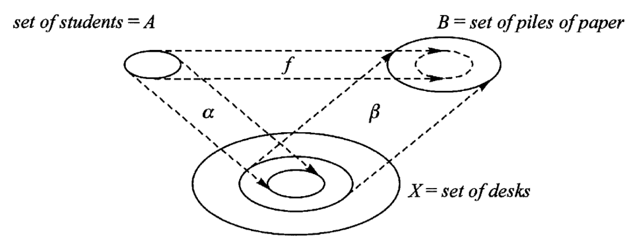
Par conséquent, pour connaître la catégorie des sous-objets d'un objet donné X, nous avons seulement besoin de savoir, pour chaque paire de sous-objets de X, s'il y a ou s'il n'y a pas d'application du premier vers le second. Pour indiquer qu'il y a une application (nécessairement unique) d'un sous-objet $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ vers un sous-objet $B \overset{\beta}{\hookrightarrow} X$, nous utilisons souvent la notation

$$A \subseteq_X B$$

(lire : A est *inclus* dans B sur X) ; le "A" est une abréviation pour "la paire A, α", et similairement pour B. Le "X" en indice est destiné à nous rappeler cela.

FATIMA : Pouvez-vous expliquer l'inclusion d'une partie dans une autre avec un diagramme ?

Oui. Supposons que sur certains bureaux de la classe, il y ait des piles de papiers. Si B est l'ensemble des piles de papiers, nous avons l'application injective de B vers l'ensemble des bureaux, appelons-la $B \overset{\beta}{\hookrightarrow} X$. Nous avons aussi une application injective α de l'ensemble A des étudiants vers l'ensemble X des bureaux, chaque étudiant occupe un bureau. Maintenant, supposons que chaque étudiant a une pile de papiers, et qu'il puisse aussi y avoir des piles de papiers sur des bureaux non-occupés. Alors le diagramme des deux inclusions est le suivant :



qui montre que les bureaux occupés par les étudiants sont inclus dans les bureaux sur lesquels il y a une pile de papiers. La raison ou la "preuve" pour cette inclusion est une application $A \longrightarrow B$ (affectant à chaque étudiant la pile de papiers sur son bureau) telle que $\beta f = \alpha$. Cette application est la (seule) preuve de la relation $A \subseteq_X B$.

DANILO : Mais si chaque pile de papier appartient à un étudiant, l'application évidente est de B vers A, affectant à chaque pile de papier son propriétaire.

Oui, nous aurions alors une application $B \longrightarrow A$, mais elle pourrait ne pas être compatible avec les inclusions α et β de A et B dans X ; en général $\alpha g = \beta$.

DANILO : Alors on devrait dire "si f existe".

Tout à fait ! C'est ce qui importe. Une telle application f peut ne pas exister, mais il ne peut y en avoir plus d'une puisque β est à part.

D'un autre côté, dans quelques cas, l'application g peut aussi être dans la catégorie $\boldsymbol{\mathcal{P}}(X)$; i.e. elle peut être compatible avec α et β ($\alpha g = \beta$). Si tel est le cas, il est aussi vrai que

$$B \subseteq_X A$$

Alors, en fait, les applications f et g sont inverses l'une de l'autre, de telle façon que A et B sont des objets isomorphes ; et plus que ça : $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ et $B \overset{\beta}{\hookrightarrow} X$ sont des objets isomorphes dans $\boldsymbol{\mathcal{P}}(X)$. Ainsi, nous avons :

$$\text{Si } \ A \subseteq_X B \ \text{ et } \ B \subseteq_X A \ \text{ alors } \ A \cong_X B.$$

Que signifie un isomorphisme de sous-objets ? Supposons que le vendredi et le lundi, les étudiants des ensembles d'étudiants F et M occupent exactement les mêmes chaises dans la classe. Alors nous avons deux applications différentes vers les ensembles de chaises, mais elles sont isomorphes :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & M \arrow[dl, "\beta"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Puisque entre deux sous-objets isomorphes, il n'y a qu'un seul isomorphisme, nous les traitons comme le "même sous-objet".

L'idée d'une chaise occupée peut être exprimée de la façon suivante : supposons que l'on ait un sous-objet $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ et une figure $T \xrightarrow{x} X$ (qui n'est pas supposée être injective). Dire que x est dans le sous-objet $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ (écrit $x \in_X A$) signifie qu'il existe un $T \xrightarrow{a} A$ pour lequel $\alpha a = x$. Maintenant, puisque α est injective, il y a au plus un a, ce qui prouve que $x \in_X A$. Par exemple, si Danilo s'assoit sur cette chaise, alors Danilo est la preuve que cette chaise est occupée. Selon la définition ci-dessus, si on a $x \in A$ et $A \subseteq B$ (le X étant compris) alors nous pouvons conclure que $x \in B$, dont la preuve n'est rien d'autre que la composée des applications $T \xrightarrow{a} A \xrightarrow{i} B$ prouvant respectivement $x \in A$ et $A \subseteq B$.

La propriété ci-dessus (si $x \longrightarrow A$ et $A \subset B$ alors $x \longrightarrow B$) est parfois prise comme la *définition* de l'inclusion, à cause du résultat suivant : si pour tous les objets T et toutes les applications $T \xrightarrow{x} X$ telles que $x \in A$ it is vrai that $x \in B$, alors nécessairement $A \subseteq B$.

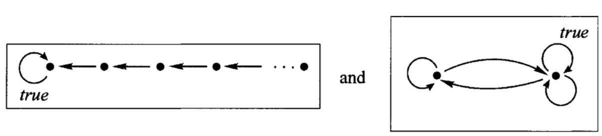
2. Topos et logique

Il est clair de ce qui précède qu'on peut discuter de la catégorie $\mathcal{P}(X)$ et des relations $\subseteq$, $\in$ dans n'importe quelle catégorie $\mathcal{C}$, mais la structure "logique" est beaucoup plus riche pour ces catégories connues sous le nom de *topos*.

Définition : *Une catégorie* $\mathcal{C}$ est un topos si et seulement si :
1. $\mathcal{C}$ a $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, x, +, et pour tout objet X, $\mathcal{C}/X$ a des produits.
2. $\mathcal{C}$ a des objets applications Y^X, et
3. $\mathcal{C}$ a un "objet valeur-de-vérité" $\mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ (également appelé "classifiant de sous-objets").

La plupart des catégories que nous avons étudiées sont des topos : les ensembles, les graphes irréflexifs, les systèmes dynamiques, les graphes réflexifs. (Les ensembles pointés et bipointés ne sont pas des topos, puisque le fait d'avoir des objets applications implique la distributivité.)

Nous avons vu à la session précédente que l'objet valeur-de-vérité dans la catégorie des ensembles est $\mathbf{2} = vrai, faux$, alors que ceux des systèmes dynamiques et des graphes irréflexifs sont respectivement



La propriété définissant un objet valeur-de-vérité ou un sous-objet classifiant $\mathbf{1} \xrightarrow{vrai} \Omega$ était que pour tout objet X, les applications $X \longrightarrow \Omega$ sont "les mêmes" que les sous-objets de X. Cette idée est abrégée symboliquement en

$$\frac{X \longrightarrow \Omega}{? \hookrightarrow X}$$

Cela signifie que pour chaque sous-objet, $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ de X, il existe exactement une application

$$X \xrightarrow{\varphi_A} \Omega$$

ayant la propriété que pour chaque figure $T \xrightarrow{x} X$, $\varphi_A(x) = vrai_T$ si et seulement si la figure x est incluse dans la partie $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ de X.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed] \arrow[drr] \arrow[ddr, "x"'] & & \\
& A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathbf{1} \arrow[d, "true"] \\
& X \arrow[r, "\varphi_A"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

La conséquence de l'existence d'un tel objet est que tout ce qu'on peut dire à propos des sous-objets d'un objet X peut être traduit en des énoncés à propos des applications de X vers Ω.

Quelle est la relation entre cela et la logique ? On peut considérer le produit $\Omega \times \Omega$ et définir l'application $\mathbf{1} \xrightarrow{(vrai,vrai)} \Omega \times \Omega$. Elle est injective parce que toute application dont le domaine est terminal est injective ; par conséquent, c'est vraiment un sous-objet et il a une application classifiante, ou application caractéristique $\Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$. Cette application classifiante est l'opération logique "*et*", notée de différentes façons comme "&" et "$\wedge$". La propriété de cette opération est que pour tout $T \xrightarrow{a} \Omega \times \Omega$, disons $a = \langle b, c\rangle$ où b et c sont des applications de T vers Ω, l'application composée

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "a"] \arrow[rr, bend right, "b \wedge c"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

(qui est habituellement notée $b \wedge c$ plutôt que $\wedge \circ \langle b, c\rangle$, exactement comme on écrit $5 + 3$ plutôt que $+ \circ \langle 5, 3\rangle$) a la propriété que $b \wedge c = vrai_T$ si et seulement si $\langle b, c\rangle \in \langle vrai, vrai\rangle$, qui signifie précisément : $b = vrai_T$ et $c = vrai_T$.

Maintenant, comme b est une application dont le codomaine est Ω, par la propriété définissant Ω, elle doit être application classifiante d'un sous-objet de T, $B \hookrightarrow T$. De la même façon, c est l'application classifiante de quelques autres sous-objets, $C \hookrightarrow T$, et le sous-objet classifié par $b \wedge c$ est appelé l'*intersection* de B et C.

Une autre opération logique est l'"implication", qui est notée " $\implies$ ". C'est aussi une application $\Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$, définie comme l'application classifiante du sous-objet $S \hookrightarrow \Omega \times \Omega$ déterminé par toutes ces $\langle \alpha, \beta\rangle$ dans $\Omega \times \Omega$ telles que $\alpha \subseteq \beta$.

Il y a une troisième opération logique appelée "*ou*" (disjonction) et notée "$\vee$", et il y a des relations au niveau des opérations $\wedge$, $\implies$, $\vee$, qui sont complètement analogues aux relations parmi les opérations catégoriques $\times$, objet application, et $+$. Rappelez-vous que ces relations étaient

$$\frac{X \longrightarrow B_1 \times B_2}{X \longrightarrow B_1, X \longrightarrow B_2} \qquad \frac{X \longrightarrow Y^T}{T \times X \longrightarrow Y} \qquad \frac{B_1 + B_2 \longrightarrow X}{B_1 \longrightarrow X, B_2 \longrightarrow X}$$

Les cas particuliers parmi ceux-ci dans la catégorie $\mathcal{P}(X)$ des sous-objets de X sont les règles de logique suivantes :

$$\frac{\xi \subseteq \beta_1 \wedge \beta_2}{\xi \subseteq \beta_1 \text{ et } \xi \subseteq \beta_2} \qquad \frac{\xi \subseteq (\alpha \implies \eta)}{\xi \wedge \alpha \subseteq \eta} \qquad \frac{\beta_1 \vee \beta_2 \subseteq \xi}{\beta_1 \subseteq \xi, \beta_2 \subseteq \xi}$$

La règle du milieu est appelée *règle d'inférence du modus ponens.*

Fatima : La dernière ne devrait-elle pas dire “ou” plutôt que “et” ?

Non. Pour que la disjonction “$\beta_1 \vee \beta_2$” soit incluse dans ξ, il est nécessaire qu'à la fois β_1 ET β_2 soient inclus dans ξ. C'est une autre manifestation du fait que les produits sont plus basiques que les sommes. La conjonction “et” est réellement un produit, elle est encore nécessaire dans le but d'expliquer la disjonction “ou”, qui est une somme.

Un élément remarquable à propos de l'application classifiante d'un sous-objet est que bien que le sous-objet soit juste déterminé par les éléments sur lesquels l'application classifiante prend la valeur “*vrai*”, l'application classifiante assigne aussi de nombreuses autres valeurs aux éléments restant.

Ainsi, ces autres valeurs sont en quelque sorte déterminées justement par ces éléments sur lesquels l'application prend la valeur “*vrai*”.

Il est aussi possible de définir une opération de négation (“non”) par

$$non\ \varphi \overset{\text{def}}{=} [\varphi \implies faux]$$

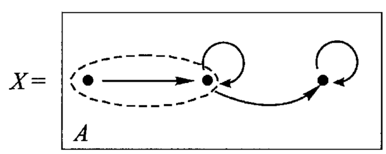
Alors on peut prouver l'égalité

$$\varphi \wedge non\ \varphi = faux$$

et l'inclusion

$$\varphi \subseteq\ non\ non\ \varphi.$$

Dans la plupart des catégories, cette inclusion n'est pas une égalité. La propriété universelle (règle d'inférence) pour $\implies$ entraîne que pour tout sous-objet A d'un objet $X, non(A)$ est le sous-objet de X qui est le plus grand parmi tout les sous-objets dont l'intersection avec A est vide. Voici un exemple dans les graphes.



La logique dans un topos tel que celui-ci est dite *non-Booléenne* ; l'algébriste et logicien G. Boole a traité le cas particulier selon lequel $non\ non\ A\ =\ A$. Noter, cependant, que dans cet exemple

$$non\ non\ non\ A\ =\ non\ A$$

Séminaire Bourbaki 513-01
30^e année, 1977/78, n° 513 Février 1978

Logique, catégories et faisceaux
(D'après F. Lawvere et M. Tierney)

Pierre Cartier

À Alexander Grothendieck,
pour son $50^{\text{ème}}$ anniversaire.

1. Introduction

1.1. La logique "classique"

La logique "classique" a été codifiée pour plus de deux millénaires par Aristote dans son ouvrage $\tau\grave{o}$ $O\rho\gamma\alpha\nu o\nu$. Par une analyse de la pratique des sciences mathématiques et de l'argumentation juridique, il met en évidence le caractère *hypothétique* des jugements comportant nécessairement hypothèse et conclusion. Le rôle de la logique est d'étudier les *règles de déduction* par lesquelles, à partir de certains jugements vrais (ou acceptés comme tels par l'interlocuteur), on peut en fabriquer de nouveaux. Le modèle de ces règles resta longtemps le syllogisme qui sous sa forme la plus simple ("barbara") se traduit ainsi :

$$\begin{array}{r} \text{Tout B est C} \\ \text{(or) Tout A est B} \\ \hline \text{(donc) Tout A est C.} \end{array}$$

Une fois admis le principe du tiers exclus ("toute assertion est vraie ou fausse"), on est aussi conduit à cette extraordinaire création de l'esprit chicanier des Grecs : le raisonnement par l'absurde.

L'analyse classique confond les relations des types "A appartient à B" et "A est contenu dans B". Les logiciens du 19^e siècle découvrent progressivement que la logique aristotélicienne est une logique des classes, maniant les relations que nous notons $A \subset B$ et $A \cap B = \varnothing$, ainsi que leurs négations. Peu à peu, on s'enhardit à traiter de relations plus complexes entre classes, et à créer un véritable calcul logique (voir [14], chapitre 2, pour une mise au point moderne). Mais on rencontre ici une difficulté assez subtile ; en effet, dans une assertion du type

$$(A \subset B) \implies (A \subset C)$$

par exemple, on doit distinguer les notions voisines d'implication logique ($\implies$) et d'inclusion des classes ($\subset$). De même, le mode de déduction appelé "modus ponens" (de A et $A \implies B$, on a le droit de conclure B) oblige à séparer plusieurs niveaux d'implication, comme il est illustré de manière burlesque dans l'apologue "Achille et la tortue" de Lewis Carroll. Frege [13] fait la remarque

Je remercie vivement F. Lawvere et J. Bénabou pour leurs indications et les documents qu'ils m'ont communiqués lors de la préparation de cet exposé.

fondamentale qu'il ne suffit pas qu'un jugement soit formulé d'une manière grammaticalement correcte pour qu'il soit vrai ; il invente un nouveau signe à ce propos : pour lui $\vdash A$ signifie que l'on affirme A comme vrai. On doit à Gentzen [12] et à son calcul des séquents la distinction définitive entre l'affirmation $A \vdash B$ d'un jugement hypothétique d'hypothèse A et de conclusion B, et une implication "interne" conçue comme opérateur dans l'ensemble des "formules logiques". Il met aussi en évidence que le maniement des règles de déduction présuppose un résidu irréductible de logique extérieur au système formel.

1.2. Paradoxes

Frege et Peano imposent la distinction entre les relations $x \in A$ et $A \subset B$ et Peano invente les signes nécessaires. Frege [13] découvre aussi l'importance des quantificateurs. Avec Cantor et Dedekind, on s'enhardit à considérer comme un tout la classe des objets satisfaisant à une propriété donnée et à introduire cette classe comme sujet dans des jugements d'un ordre supérieur : Cantor va si loin qu'il considère tout objet mathématique comme un ensemble, au moins jusqu'à la découverte des antinomies, telles celle de Russell sur l'ensemble des x tels que $x \notin x$. Si la seule relation primitive est $\in$, il faut donc abandonner l'illusion que toute propriété définit un ensemble légitime. Deux solutions ont été offertes à cette difficulté. Russell restreint la portée de la relation $\in$ au moyen des types, de sorte que l'on n'a plus le droit d'écrire $x \notin x$. Zermelo, Fraenkel et leurs successeurs délimitent par axiomes le champ des relations "collectivisantes" qui définissent des ensembles. Un système intermédiaire (d'ailleurs équivalent à celui de Zermelo-Fraenkel) est celui de von Neumann, Gödel et Bernays qui ne retiennent que deux types : ensembles et classes.

Mais cette axiomatisation de la théorie des ensembles laisse ouverts deux énormes problèmes, concernant l'axiome du choix et l'hypothèse du continu. Gödel [45] démontre en 1940 leur non-contradiction, grâce à l'emploi du modèle interne de la théorie des ensembles fourni par les ensembles "constructibles". Il faut attendre 1963 pour apprendre de Cohen [44] que ces deux axiomes sont indépendants des axiomes non controversés. Cohen invente à ce propos la méthode du "forcing" : elle consiste à introduire un ensemble indéterminé a d'entiers (positifs), et pour chaque entier n d'étudier la classe des assertions qui sont forcées par la connaissance du segment $a \cap [0, n]$ de a. On est ainsi amené à codifier une logique qui se développe au fur et à mesure qu'on obtient des informations supplémentaires (reflétant d'ailleurs le développement réel des connaissances). Si le principe du tiers-exclus reste vrai à la limite, on dispose à chaque étape finie de relations vraies, fausses ou indéterminées : il est remarquable que les règles de déduction ainsi obtenues soient pratiquement identiques à celles qu'Heyting [19] et Kripke ont formulées en traduisant la philosophie "intuitionniste" de Brouwer.

Une variante de la méthode de Cohen est due à Scott et Solovay [48, 50]. Elle consiste à supposer qu'une relation cesse d'être vraie ou fausse, mais qu'elle est susceptible de valeurs logiques intermédiaires, appartenant à une algèbre de Boole. Cette démarche est familière dans le calcul des probabilités, où depuis Kolmogoroff on interprète cette algèbre au moyen des parties mesurables de l'espace Ω où les Dieux jouent aux dés (il est remarquable que Boole ait introduit le calcul qui porte son nom pour exprimer des raisonnements probabilistes).

1.3. Catégories

Une ligne de développements bien différente est issue des travaux de Mac Lane et Eilenberg sur les catégories. Après le succès spectaculaire des méthodes catégoriques en Algèbre, Topologie et Géométrie algébrique, il était naturel de chercher à inclure la théorie des ensembles elle-même dans ce cadre. C'est ce qu'entreprend Lawvere à partir de 1963, sur l'instigation d'Eilenberg. Lawrere propose en 1964 un nouveau système d'axiomes pour la catégorie des ensembles [1, 2] puis découvre la signification logique de la relation d'adjonction entre foncteurs [3, 4] et étend de manière importante le rôle des quantificateurs [5].

A peu près au même moment, Grothendieck [23, 24] pousse jusqu'à ses conséquences ultimes l'idée des surfaces de Riemann, et réalise que la "topologie" d'une variété algébrique X réside non seulement dans ses ouverts au sens de Zariski, mais aussi dans les variétés algébriques étalées sur X. Il étend à cette situation nouvelle la technique des faisceaux, dont l'usage était bien établi en Géométrie algébrique grâce à Cartan et Serre. Grothendieck développe une vaste théorie des "topologies" sur une catégorie, et des catégories de faisceaux qui leur sont associées. Il baptise *topos* ces dernières, et remarque qu'elles sont l'objet fondamental, ce que justifie Giraud en caractérisant axiomatiquement les topos.

Une des idées-clé de Grothendieck est celle de "famille de variétés algébriques". Lawvere [5, 6, 7] réalise progressivement la synthèse de cette idée avec celle d'ensembles variables, rencontrée dans la logique intuitionniste, le forcing ou le calcul des probabilités. Acceptant le slogan de Grothendieck selon lequel la catégorie des faisceaux sur un espace topologique a les "mêmes" propriétés que celle des ensembles "constants", il tire de son axiomatique des ensembles et de la définition des topos par Giraud une nouvelle définition des topos qui a l'avantage d'être absolue et de ne pas s'inscrire à l'intérieur d'une théorie des ensembles préétablie. Son axiomatique est progressivement simplifiée et conduit à la théorie élémentaire des topos qui se développe rapidement entre 1969 et 1975. Un des avantages de cette théorie est que chaque topos contient automatiquenent un objet Ω qui joue le rôle d'ensemble des valeurs logiques ; et qu'il n'est plus nécessaire de l'imposer de l'extérieur comme dans les modèles booléens de Scott et Solovay. Du coup, la logique intuitionniste des types apparaît comme la norme naturelle dans les topos ; ce n'est pas fortuit que l'ensemble des ouverts d'un espace topologique ait la structure d'une algèbre des propositions au sens de Brouwer-Heyting.

Ce nouveau point de vue suggère que l'on peut réaliser des modèles non orthodoxes de la théorie des ensembles en combinant l'usage des faisceaux avec la technique des ultraproduits. C'est ce que démontre Tierney [53] en donnant une nouvelle version, plus compréhensible, de la démonstration par Cohen de l'indépendance de l'hypothèse du continu. La démonstration de Tierney laissait ouverte la question des rapports entre la théorie des topos et les théories orthodoxes des ensembles, mais cette lacune est rapidement comblée par Cole [52], Mitchell [39] et Osius [52] par usage d'un artifice ancien de Mostowski [47].

1.4. Diagrammes

Eilenberg et Mac Lane ont souvent insisté sur l'importance des raisonnements par diagrammes, qui évitent le recours à la notion d'élément et gardent un sens dans toute catégorie. Malheureusement, des arguments simples se transforment souvent en de monstrueux diagrammes qui envahissent les pages imprimées. Par un étrange retour des choses, ces représentations ont été réhabilitées récemment. Dans des versions successivement affinées, Mitchell [39], Osius [40, 41] et Bénabou [36] ont proposé un “langage interne” des topos qui permet l’interprétation de toute relation de la logique des types à l’intérieur d’un topos donné. S’appuyant sur les idées de Bénabou, Coste [37] a montré que la logique intuitionniste (révisée sur un point concernant les variables libres) était la logique adéquate à ce type de modèle en démontrant un théorème de complétude. Un des avantages de cette méthode est de remplacer des constructions assez compliquées dans des faisceaux par des raisonnements “ensemblistes” élémentaires.

Il semble que la théorie des topos a maintenant atteint une certaine stabilité, comme en témoigne la parution récente du premier ouvrage [31] entièrement consacré à ce sujet. On va essayer dans la suite de cet exposé de décrire la théorie telle qu’elle apparaît aujourd’hui. Il faudra d’abord décrire la logique intuitionniste.

2. Outils de la logique

2.1 Algèbres de Heyting et de Boole [1]

Rappelons qu’un *treillis* est un ensemble ordonné T où deux éléments arbitraires a, b ont une borne supérieure $a \vee b$ et une borne inférieure $a \wedge b$. On a les relations suivantes dans T :

$$a \vee a = a, \qquad a \vee b = b \vee a, \qquad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \tag{1}$$
$$a \wedge a = a, \qquad a \wedge b = b \wedge a, \qquad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \tag{2}$$
$$a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a. \tag{3}$$

Inversement, si l’on s’est donné deux opérations $\vee$ et $\wedge$ dans un ensemble T satisfaisant aux relations (1), (2) et (3), c’est un treillis dans lequel la relation d’ordre est définie par

$$a \leq b \iff a = a \wedge b \iff a \vee b = b \tag{4}$$

Un treillis est dit *distributif* s’il satisfait aux deux relations équivalentes suivantes :

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{5}$$

Une *algèbre de Heyting* est un treillis H possédant un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1, muni d’une opération $\to$ telle que les relations $a \wedge b \leq c$ et $a \leq (b \to c)$ soient équivalentes. Il y a unicité de 0, 1 et de l’opération $\to$, et une algèbre de Heyting est un treillis distributif. Pour tout a dans H, notons a' l’élément $a \to 0$ de H. On a alors les relations

$$a \leq a'', \qquad a \wedge a' = 0 \tag{6}$$

et l’application $a \mapsto a'$ est décroissante, d’où aussitôt $a' = a'''$.

Une *algèbre de Boole* B est une algèbre de Heyting dans laquelle on a $a = a''$, ou ce qui revient au même $a \wedge a' = 1$. Il revient au même de supposer que B est un treillis distributif, et qu’à chaque élément a de B, on peut associer un élément a' tel que $a \wedge a' = 0$ et $a \vee a' = 1$; il y a alors unicité de a'. Une structure d’algèbre de Boole sur un ensemble B équivaut à une structure d’anneau booléen, c’est-à-dire dans lequel on a l’identité $a^2 = a$. Les éléments 0 et 1 sont les mêmes pour les deux

1. cf. [17], [22]

structures, et l'on a identiquement $a \wedge b = ab$. Les autres opérations sont reliées de la manière suivante :

$$a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \tag{7}$$
$$a \wedge b = a + b + ab, \qquad a' = 1 + a. \tag{8}$$

Soit H une algèbre de Heyting. Un *opérateur modal* dans H est une application j de H dans H satisfaisant aux relations

$$j(1) = 1, \qquad j(j(a)) = j(a), \qquad j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b). \tag{9}$$

Si l'on a de plus $j(a)$ pour tout a dans H, l'ensemble H_j des a dans H tels que $j(a) = a$ est une algèbre de Heyting, où la borne inférieure de a et b est $a \wedge b$, et leur borne supérieure est $j(a \vee b)$, tandis que l'opération $\to$ est donnée par $j(a \to b)$. Dans toute algèbre de Heyting, l'application $a \mapsto a''$ est un opérateur modal, et l'ensemble des a tels que $a = a''$ est une algèbre de Boole.

Toute algèbre de Heyting H se plonge dans une algèbre de Boole au sens suivant : il existe une algèbre de Boole B et un opérateur modal j dans B tel que $J(a) \leq a$ et que H soit égal à l'algèbre de Heyting B_j. Si l'on suppose de plus que H engendre l'algèbre de Boole B (comme anneau par exemple), alors il y a unicité de (B, j) (voir [20]).

2.2. Représentation topologique des algèbres de Boole [2]

Soit B une algèbre de Boole, considérée comme anneau booléen. Soit S le *spectre* de B, c'est-à-dire l'ensemble des homomorphismes d'anneau de B dans le corps à deux éléments $\mathcal{F}_2$. Si u est un homomorphisme de B dans un corps K, on a $u(B) \subset \{0, 1\}$ puisque tout élément a de B satisfait à $a^2 = a$, donc K est de caractéristique 2 et u prend ses valeurs dans le sous-corps $\mathcal{F}_2$ de K. Or B est un anneau commutatif, et 0 est le seul élément nilpotent de B ; d'après des théorèmes connus d'algèbre, l'intersection des noyaux des éléments de S est réduite à 0. Pour tout a dans B, soit $[a]$ l'ensemble des u dans S tels que $u(a) = 1$. Il existe alors sur S une (unique) topologie d'espace compact totalement discontinu telle que l'application $a \mapsto [a]$ soit un isomorphisme de B sur l'agèbre de Boole formée des parties ouvertes et fermées de S (théorème de représentation de Stone).

Un treillis S est dit *complet* si toute partie de T possède une borne supérieure, donc aussi une borne inférieure. Un treillis distributif est automatiquement une algèbre de Heyting. On parlera donc d'algèbre de Heyting complète, et en particulier d'algèbre de Boole complète.

Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{U}$, l'ensemble de ses parties ouvertes.

Pour la relation d'inclusion, $\mathcal{U}$ est une algèbre de Heyting complète, avec $a \wedge b = a \cap b, a \vee b = a \cup b$ et où a' est l'intérieur du complémentaire de a dans X. D'après la fin du n° 2.1, l'ensemble des ouverts a de X tels que $a = a''$ (c'est-à-dire égaux à l'intérieur de leur adhérence) est une algèbre de Boole complète. En particulier, si B est une algèbre de Boole, l'ensemble $\hat{B}$ des parties du spectre S de B qui sont égales à l'intérieur de leur adhérence est une algèbre de Boole complète, et B est isomorphe à une sous-algèbre de Boole de $\hat{B}$.

On dit qu'une algèbre de Boole B satisfait à la *condition de chaîne dénombrable* si toute partie I de B telle que $a \wedge b = 0$ pour a, b distincts dans I est dénombrable. C'est le cas si B est composé

2. Cf. [18], [48, chap. 2]

de parties ouvertes d'un espace compact X qui possède une mesure de Radon de support X.

2.3. Adjonction dans les ensembles ordonnés

La notion d'adjonction dans les ensembles ordonnés est un cas particulier d'une notion générale pour les catégories. L'importance de ce cas particulier a été mise en évidence par Lawvere [3, 4].

Soient T et T' deux ensembles ordonnés, $f : T \to T'$ et $g : T' \to T$ deux applications. On dit que f est *adjointe à gauche* de g, et g *adjointe à droite* de f, si la relation $f(t) \leq t'$ équivaut à $t \leq g(t')$ quels que soient t dans T et t' dans T'. Cette relation se note $f \dashv g$ ou $g \vdash f$. Une application f de T dans T' a au plus une adjointe à droite.

Sous les hypothèses précédentes, on a $t \leq gf(t)$ pour t dans T et $fg(t') \leq t'$ pour tout t' dans T' ; on en déduit $fgf = f$ et $gfg = g$, et l'application gf de T dans T est idempotente d'image $T_1 = g(T')$; de même, l'application fg de T' dans T' est idempotente, d'image $T'_1 = f(T)$. Comme les applications f et g sont croissantes, elles induisent des automorphismes réciproques d'ensembles ordonnés

$$T_1 \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} T'_1.$$

Si deux éléments t_1 et t_2 de T ont une borne supérieure $t_1 \vee t_2$, alors $f(t_1)$ et $f(t_2)$ ont une borne supérieure dans T', et l'on a

$$f(t_1 \vee t_2) = f(t_1) \vee f(t_2) \qquad \text{pour } t_1,\ t_2 \text{ dans } T. \tag{10}$$

On établit de manière analogue la relation

$$g(t'_1 \wedge t'_2) = g(t'_1) \wedge g(t'_2) \qquad \text{pour } t'_1,\ t'_2 \text{ dans } T'. \tag{11}$$

Donnons des exemples d'adjonction :

a) Soit H une algèbre de Heyting, et posons $T = T' = H$; fixons a dans H. Si l'on pose

$$f(x) = a \wedge x, g(x') = a \to x', \tag{12}$$

la définition de l'opération $\to$ se traduit par $f \dashv g$.

b) Soit toujours H une algèbre de Heyting et soit H^{op} l'ensemble ordonné obtenu en renversant la relation d'ordre dans H. Alors l'application $a \mapsto a'$ de H dans H^{op} est adjointe à gauche de l'application $a \mapsto a'$ de H^{op} dans H.

Les propriétés élémentaires des algèbres de Heyting découlent aussitôt des propriétés générales de l'adjonction appliquées aux exemples a) et b).

c) Pour tout ensemble X, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X ordonné par inclusion. C'est une algèbre de Boole complète [3]. Soit $f : X \to Y$ une application, et soit $f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$

3. Un opérateur modal j dans $\mathcal{P}(X)$ tel que $j(A) \subset A$ n'est autre qu'une topologie $\mathcal{T}$ dans X, ou plutôt l'application qui associe à toute partie de X son intérieur pour $\mathcal{T}$. Dans ces conditions, $\mathcal{P}(X)_j$ est l'algèbre de Heyting formée des ouverts de X pour $\mathcal{T}$.

l'application qui à toute partie B de Y associe son image réciproque par f dans X. De même, l'opération d'image directe est une application $f_* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$. On a alors $f_* \dashv f^*$.

d) Sous Les hypothèses de c), on définit comme suit une application $f_!$ de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(Y)$ telle que $f_! \vdash f^*$: pour toute partie A de X, on note $f_!(a)$ l'ensemble des éléments y de Y tels que A contienne toute la fibre de f au-dessus de y.

Dans les exemples c) et d), Lawvere écrit $\exists_f$ pour f_* et $\forall_f$, pour $f_!$, à cause du lien étroit qui existe entre ces opérations et les quantificateurs (cf. p. 135).

3. Logique intuitionniste

3.1. Logique des propositions

Rappelons les caractéristiques d'une théorie mathématique formalisée. Tout d'abord, on a un *prologue* composé de *déclarations* qui spécifient que certains symboles sont des *variables*, d'autres des *constantes* et attribuent un *type* à chacun d'eux (il est d'usage de postuler une infinité de variables pour chaque type ; la méthode proposée ici, qui évite certaines difficultés logiques, se rapproche des langages de programmation du type ALGOL). On fixe ensuite des *règles de production* qui permettent de définir les formules de la théorie, puis les axiomes et les *règles de déduction* qui permettent de démontrer des théorèmes. Nous adoptons ici la présentation de Gentzen [12] par les séquents.

La logique des propositions comporte un nombre indéterminé de variables, toutes d'un même type, dit *logique* et noté λ, et des constantes V, F, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\implies$ dont voici les types

$$\begin{array}{ll} \mathrm{V, F} & \text{type } \lambda \\ \neg & \text{type } \lambda \to \lambda \\ \vee, \wedge, \implies & \text{type } \lambda \times \lambda \to \lambda. \end{array}$$

Les formules (logiques) sont toutes de type λ, et sont définies par les règles de production suivantes :

a) toute variable ou toute constante de type λ est une formule ;

b) si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule ;

c) si A et B sont des formules, il en est de même de $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$ et $(A \implies B)$.

Voici la signification de ces règles. Les formules sont des suites de signes, qui sont les variables et constantes déclarées ci-dessus et les parenthèses (et). Une *construction* est une suite Σ de telles suites, chacune de ces suites X étant soit une variable ou une constante de type λ (règle a), soit obtenue en préfixant $\neg$ à une suite A qui la précède dans Σ (règle b), soit obtenue comme une juxtaposition du type $(A \vee B)$, etc... où A et B précèdent X dans Σ (règle c). Une formule est une suite qui apparaît comme la dernière d'une construction, qui est dite la vérifier. On notera que nous ne cherchons pas à définir ce qu'est une suite de symboles, ni une suite de telles suites !

Voici maintenant les axiomes :

Tautologies : $\quad F \vdash A, \qquad A \vdash V, \qquad A \vdash A;$

Négation : $\quad \neg A \vdash (A \implies F), \qquad (A \implies F) \vdash \neg A.$

Enfin, les règles de déduction sont les suivantes :

Syllogisme : $\quad \dfrac{A \vdash B, B \vdash C}{A \vdash C}$

Conjonction : $\quad \dfrac{A \vdash (B \wedge C)}{A \vdash B} \qquad \dfrac{A \vdash (B \wedge C)}{A \vdash C} \qquad \dfrac{A \vdash B, A \vdash C}{(A \vee B) \vdash C}$

Disjonction : $\quad \dfrac{(A \vee B) \vdash C}{A \vdash C} \qquad \dfrac{(A \vee B) \vdash C}{B \vdash C} \qquad \dfrac{A \vdash C, B \vdash C}{(A \vee B) \vdash C}$

Implication : $\quad \dfrac{(A \wedge B) \vdash C}{A \vdash (B \implies C)} \qquad \dfrac{A \vdash (B \implies C)}{(A \wedge B) \vdash C}.$

Un *séquent* est une suite de symboles de la forme $A \vdash B$, où A et B sont des formules. Une *démonstration* est une suite D de séquents, dont chaque X est un axiome ou résulte d'une règle de déduction : si l'on applique par exemple le syllogisme, X est de la forme $A \vdash C$ et il est précédé dans D de deux séquents de la forme $A \vdash B$ et $B \vdash C$. Un *théorème* est un séquent qui apparaît comme le dernier d'une démonstration, qui en constitue la preuve. Un théorème de la forme $V \vdash A$ s'écrit plus simplement sous la forme $\vdash A$ et l'on dit alors que la formule A est *valide*.

La logique des propositions que l'on vient de décrire est dite "intuitionniste". Pour obtenir la logique classique (ou booléenne), il faut ajouter l'axiome de double négation $\neg\neg A \vdash A$, qui entraîne le tiers-exclus $\vdash (A \vee \neg A)$.

La lectrice aura remarqué l'analogie des axiomes et règles de déduction ci-dessus avec les règles de calcul dans une algèbre de Heyting. De manière plus précise, supposons qu'on ait introduit des variables $x_1, \ldots, x_n$ de type λ ; disons que deux formules A et B sont équivalentes si l'on a prouvé les deux théorèmes $A \vdash B$ et $B \vdash A$. Les opérations définies dans l'ensemble des formules par $\vee, \wedge, \neg$ et $\implies$ sont compatibles avec cette relation d'équivalence, et définissent sur l'ensemble $H(x_1, \ldots, x_n)$ des classes d'équivalence de formules une structure d'algèbre de Heyting ; la classe de F (resp. V) est l'élément 0 (resp. 1) de cette algèbre de Heyting ; si a (resp. b) est la classe de la formule A (resp. B), la relation $a \leq b$ signifie que le séquent $A \vdash B$ est un théorème. En un sens évident, $H(x_1, \ldots, x_n)$ est l'algèbre de Heyting libre en les générateurs $x_1, \ldots, x_n$; d'après [20], elle a une infinité d'éléments.

La logique classique conduit de manière analogue à la construction de l'algèbre de Boole libre $B(x_1, \ldots, x_n)$ à n générateurs, dont les éléments peuvent s'interpréter comme les 2^{2^n} applications de $F_2 \times \ldots \times F_2$ (n facteurs) dans F_2.

3.2. Logique des prédicats

En plus des variables et constantes logiques introduites au n° 3.1, nous admettons maintenant des variables de type *individu* (noté i dans la suite). De plus, on introduit des constantes de deux espèces :

- constantes de fonctions, de type $i^n \to i$, où l'entier $n \geq 0$ dépend de la constante ; pour $n = 0$, on a simplement une constante de type i ;

- prédicats de type $i^n \to \lambda$ (même remarque sur n), parmi lesquels le prédicat d'égalité $=$ de type $i^2 \to \lambda$.

Les formules sont réparties en *termes* de type i et en *relations* de type λ. Les règles de production comprennent d'abord les règles a), b) et c) du n° 3.1 qui s'appliquent uniquement à des relations et fournissent des relations. De plus :

d) toute variable ou toute constante de type i est un terme ;

e) soient $T_1, \ldots, T_n$ des termes ; si f eut une constante de fonction de type $i^n \to i$ et p un prédicat de type $i^n \to \lambda$ alors $f(T_1, \ldots, T_n)$ est un terme et $p(T_1, \ldots, T_n)$ une relation (on écrit $T = T'$ au lieu de $= (T, T')$).

Nous laisserons à la lectrice le soin de définir la substitution de termes $T_1, \ldots, T_n$ à des variables $x_1, \ldots, x_n$ de type i dans un terme ou une relation F, le résultat étant noté $F(T_1|x_1, \ldots, T_n|x_n)$.

Les règles de raisonnement comprennent d'abord les règles du n° 3.1 appliquées à des relations ; on a de plus les axiomes d'égalité et la règle de substitution :

Égalité :

$$\vdash x = x$$
$$T = T' \vdash S(T|x) = S(T'|x), \qquad T = T' \vdash A(T|x) \implies A(T'|x)$$

Substitution :

$$\frac{A \vdash B}{A(T|x) \vdash B(T|x)}$$

où x est une variable de type i, où A, B sont des relations et S, T, T' des termes.

On peut formaliser de cette manière les théories algébriques usuelles (groupes, anneaux, algèbres de Lie,...). Par exemple, la théorie des groupes contient une constante e de type i, une constante de fonction s de type $i \to i$ et une constante de fonction m de type $i^2 \to i$ et trois *axiomes spécifiques*

$$\vdash m(m(x,y),z) = m(x, m(y,z))$$
$$\vdash (m(x, s(x)) = e) \wedge (m(s(x), x) = e)$$
$$\vdash (m(x, e) = x) \wedge (m(e, x) = x),$$

où x, y et z sont des variables (distinctes) de type i. Introduisons des variables $x_1, \ldots, x_n$, de type i, et disons que deux termes T et T' sont équivalents si $T = T'$ est une formule valide de la théorie des groupes. Comme dans le cas des algèbres de Heyting ou de Boole, on montre que l'ensemble des classes d'équivalence de termes est le groupe libre $G(x_1, \ldots, x_n)$ construit sur $x_1, \ldots, x_n$.

Introduisons maintenant les *quantificateurs* $\forall$ et $\exists$ et la notion de *variable libre* dans une relation. Ceci se fait au moyen des règles suivantes :

f) si $T_1, \ldots, T_n$ sont des termes et p un prédicat de type $i^n \to \lambda$, toute variable intervenant dans $p(T_1, \ldots, T_n)$ est libre et il n'y en a pas d'autre ;

g) si A et B sont des relations, une variable est libre dans $\neg A$ (resp. $A \vee B$, etc...) si elle est libre dans A (resp. dans A ou dans B) et il n'y en a pas d'autre ;

h) si x est une variable libre dans une relation p, alors $\forall x(p)$ et $\exists x(p)$ sont des relations où sont déclarées libres toutes les variables libres dans p à l'exception de x.

Nous laisserons à la lectrice le soin de généraliser ce qui précède au cas où l'on a plusieurs types d'individus, et définir les types libres d'une relation.

Les axiomes et règles de déduction sont ceux énoncés précédemment, aux réserves suivantes près :

1) dans le syllogisme et la conjonction, tout type qui est libre dans la ligne du haut doit apparaître comme l'un des types libres dans la ligne du bas ;

2) la tautologie $A \vdash V$ et l'axiome d'égalité $\vdash x = x$ sont remplacés par la règle suivante

$$A \vdash (x_1 = x_1) \wedge \ldots \wedge (x_k = x_k)$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont des variables d'individus dont les types contiennent exactement tous les types libres dans la relation A.

Il faut ajouter les règles de déduction pour les quantificateurs :

Universel :

$$\frac{A \vdash B}{A \vdash \forall x(B)} \qquad \frac{A \vdash \forall x(B)}{A \vdash B}$$

Existentiel :

$$\frac{B \vdash A}{\exists x(B) \vdash A} \qquad \frac{\exists x(B) \vdash A}{B \vdash A}$$

où A et B sont des relations, et où la variable d'individu x est libre dans B, mais non dans A.

La logique des prédicats (ou logique du premier ordre) peut s'étendre en une *logique des types* (ou logique d'ordre supérieur). Sans entrer dans les détails d'une description formelle, disons qu'on a une hiérarchie de types engendrée par la règle de production : si $t, t_1, \ldots, t_n$ sont des types, il en est de même de $t_1 \times \ldots \times t_n \to t$. On a alors vraiment le droit de considérer par exemple $\vee$ comme un individu de type $\lambda \times \lambda \to \lambda$. La nouveauté est le *principe d'abstraction* suivant qui conduit au calcul de λ-conversion de Church [10] :

i) si f est une formule de type s contenant une variable libre x de type t, alors $\lambda_x f$ est une formule de type $t \to s$, où x n'est plus une variable libre.

Autrement dit, on a le droit de considérer une fonction de la forme $x \mapsto f(x)$, définie par une formule, comme un individu du type approprié ; on peut en particulier introduire des prédicats variables, des prédicats de prédicats, etc. On renvoie la lectrice au traité de Curry [11] pour le développement de ces idées sous le nom de logique combinatoire.

3.3. Modèles d'une théorie

Tout groupe explicitement construit est un modèle de la théorie des groupes. Dans un tel groupe, on dispose en effet d'un ensemble G, d'un élément $\overline{e}$ de G et de deux applications $\overline{m} : G \times G \to G$ et $\overline{s} : G \to G$. Soit T un terme de la théorie des groupes construit à partir de e, m et s et de variables $x_1, ..., x_n$. En "interprétant" e comme $\overline{e}$, ... , et $x_1, \ldots, x_n$ comme des éléments variables de G, on associe à T une application $\overline{T}$ de G^n dans G. Si T et T' sont deux termes construits à partir de ces mêmes variables $x_1, \ldots, x_n$, la relation R égale à $T = T'$ est interprétée comme l'ensemble $\overline{R}$ des éléments $(g_1, \ldots, g_n)$ de G^n tels que l'on ait $\overline{T}(g_1, \ldots, g_n) = \overline{T'}(g_1, \ldots, g_n)$. À partir de là, on peut interpréter des relations plus compliquées, à $A \wedge B$ correspondant par exemple $\overline{A} \cap \overline{B}$. Dire que G est un groupe signifie que, pour toute relation A à n variables qui est un axiome de la théorie des groupes, on a $\overline{A} = G^n$. On a alors $\overline{A} = G^n$ pour toute formule valide A de la théorie, comprenant n variables.

On définit de manière analogue la notion de modèle pour toute théorie qui s'exprime dans la logique des prédicats : il est décrit par la donnée d'un ensemble de base X_i pour chaque type d'individu i, d'une application $\overline{f} : X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n} \to X_i$ pour toute constante de fonction de type $i_1 \times \ldots \times i_n \to i$ et d'une partie $\overline{p}$ de $X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n}$ pour tout prédicat de type $i_1 \times \ldots \times i_n \to \lambda$. Comme précédemment, l'interprétation d'un terme donne une fonction et celui d'une relation donne une partie d'un ensemble $X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n}$. Précisons l'interprétation des quantificateurs : si par exemple la relation A contient deux variables libres x et y de types respectifs i et j, alors $\exists x(A)$ s'interprète en $f_*(\overline{A})$ et $\forall x(A)$ en $f_!(\overline{A})$ où $\overline{A}$ est la partie de $X_i \times X_j$ qui interprète A et f est la projection de $X_i \times X_j$ sur le deuxième facteur. On postule que l'interprétation de chaque axiome spécifique de la théorie est la partie pleine du produit correspondant d'ensemble X_i, et il en est alors de même pour toute formule valide.

Scott et Solovay ont généralisé la notion de modèle en celle de *modèle booléen.* En plus des ensembles X_i, on se donne une algèbre de Boole complète $\mathcal{B}$; l'interprétation des prédicats est modifiée, au prédicat p de type $i_1 \times \ldots \times i_n \to \lambda$ correspondant une application $\overline{p}$ de $X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n}$ dans $\mathcal{B}$. Cela revient en fait à traiter le type logique λ sur le même plan que les types d'individus, et à considérer les opérateurs logiques $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\implies$ comme des constantes de fonctions du type approprié, qui seront interprétées comme les opérations de Boole dans $\mathcal{B} = X_\lambda$. Avec les notations ci-dessous, la relation $\exists x(A)$ s'interprète comme l'application $y \mapsto \sup[\overline{A}(x, y) | x \in X_i]$ et de même $\forall x(A)$ s'interprète comme l'application $y \mapsto \inf[\overline{A}(x, y) | x \in X_i]$ de Xj dans $\mathcal{B}$. On dit qu'une relation A est *validée* dans le modèle M (notation $\vdash_M A$) si A est la fonction constante de valeur 1. On postule que tout axiome explicite de la théorie est validé dans le modèle M et il en sera de même de toute formule valide.

Nous avons admis implicitement que l'on utilisait la logique classique. On peut procéder de manière analogue en logique intuitionniste en remplaçant l'algèbre de Boole complète $\mathcal{B}$ par une algèbre de Heyting complète $\mathcal{H}$. Classiquement, on n'admet que les modèles où chacun des ensembles X_i est non vide ; en logique intuitionniste, un ensemble peut être partiellement vide, et cette restriction n'est plus tenable, et c'est pourquoi nous avons dû amender les règles de déduction du paragraphe 3.2.

4. Catégories et faisceaux

4.1. Topos élémentaires

Un topos élémentaire $\mathcal{T}$ est une catégorie où est défini le produit cartésien $X \times Y$ de deux objets X et Y, munie d'un objet final noté 1, et dans laquelle on a associé à tout objet X un objet $\mathcal{P}(X)$ et un monomorphisme $\varepsilon_X : \sum_X \to X \times \mathcal{P}(X)$ satisfaisant à la propriété universelle suivante :

(Top) *Étant donnés deux objets X et Y et un monomorphisme $i : S \to X \times Y$, il existe un morphisme $u : Y \to \mathcal{P}(X)$ et un seul pour lequel il existe un carré cartésien :*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X \times Y \arrow[d, "I_X \times u"] \\ \sum_X \arrow[r, "\varepsilon_X"] & X \times \mathcal{P}(X) \end{tikzcd}$$

Réciproquement, u étant donné, il existe un monomorphisme i et un carré cartésien comme ci-dessus.

Intuitivement, on doit considérer $\mathcal{P}(X)$ comme l'ensemble des parties de X et $\sum_X$ comme le graphe de la relation d'appartenance restreinte à $X \times \mathcal{P}(X)$.

La structure d'un topos est extrêmement riche ; elle permet en particulier l'interprétation des relations de la logique intuitionniste des prédicats. Tout d'abord, on appelle *élément global* (ou section) d'un objet X de $\mathcal{T}$ tout morphisme de 1 dans X, et *sous-objet* de X tout morphisme de 1 dans $\mathcal{P}(X)$. Soit $i : S \to X$ un monomorphisme ; faisant $Y = 1$ dans l'axiome (Top), on obtient un morphisme de 1 dans $\mathcal{P}(X)$; c'est-à-dire un sous-objet de X qu'on appelle l'image de i. En particulier, l'image de l'identité $I_X : X \to X$ est un sous-objet de X, qu'on note X. Posons $\Omega = \mathcal{P}(1)$. Échangeant les rôles de X et Y dans l'axiome (Top), on associe à tout sous-objet z de X un morphisme $\varphi_z : X \to \Omega$, qu'on appelle le morphisme caractéristique de z. Réciproquement, tout morphisme φ de X dans Ω est le morphisme caractéristique d'un sous-objet de X, qu'on appelle l'*extension de* φ et qu'on note $[x \in X|\varphi(x)]$.

Pour tout objet X de $\mathcal{T}$, le morphisme diagonal $\Delta_X : X \to X \times X$ est un monomorphisme, et le morphisme caractéristique de son image sera noté $=_X$. De même, on note $\in_X$ le morphisme caractéristique de l'image de $\varepsilon_X : \sum_X \to X \times \mathcal{P}(X)$. Si f et g sont deux morphismes de X dans un même objet Y, le morphisme composé $X \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y \xrightarrow{=_Y} \Omega$ est le morphisme caractéristique d'un sous-objet de X qu'on appelle l'*égalisateur* de la paire (f, g). L'existence d'égalisateurs dans $\mathcal{T}$ montre que l'on peut y définir les produits fibrés.

On définit ensuite les opérateurs logiques dans l'objet Ω, qui joue le rôle d'objet des valeurs logiques. La définition de $\vee$, $\wedge$ et $\implies$ est particulièrement simple. Tout d'abord, le morphisme $V_X : x \to \Omega$ est le morphisme caractéristique du sous-objet $\lceil x \rceil$ de X et $V = V_1$. Le morphisme $\wedge$ de $\Omega \times \Omega$ dans Ω est le morphisme caractéristique de l'égalisateur des morphismes $I_\Omega \times V_\Omega$ et $V_\Omega \times I_\Omega$ de $\Omega \times \Omega$

dans $\Omega \times \Omega$. Enfin, le morphisme $\implies$ de $\Omega \times \Omega$ dans Ω est le morphisme caractéristique de l'égalisateur des morphismes p_1 et $\wedge$ de $\Omega \times \Omega$ dans Ω, où p_1 est la première projection du produit $\Omega \times \Omega$.

L'étape suivante est la définition d'opérations entre les objets du type $\mathcal{P}(X)$. Soit $f : X \to Y$ un morphisme. L'axiome (Top) établit une correspondance bijective entre morphismes de Y dans $\mathcal{P}(X)$ et morphismes de $X \times Y$ dans Ω ; par les arguments fonctoriels usuels, on en déduit que $\mathcal{P}$ est un foncteur contravariant, autrement dit on associe à f un morphisme $\mathrm{f}^* = \mathcal{P}(f)$ de $\mathcal{P}(Y)$ dans $\mathcal{P}(X)$. On construit ensuite des morphismes f_*, et $f_!$ de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(X)$ qui ont les mêmes propriétés formelles que dans le cas ensembliste (cf. § 2.3). L'image de f est un sous-objet de Y ; on peut le définir comme le composé $f_*\lceil X \rceil : 1 \to \mathcal{P}(Y)$. On notera aussi $\{.\}$ le morphisme de X dans $\mathcal{P}(X)$ qui correspond par l'axiome (Top) au morphisme diagonal $\Delta_X : X \to X \times X$.

Pour interpréter une formule de la logique des prédicats, on doit associer à chaque type i en jeu un objet X_i de T, avec en particulier $X_\lambda = \Omega$; à chaque constante de fonction de type $i_1 \times \ldots \times i_n \to i$ est associé un morphisme de $X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n}$ dans X_i et à chaque prédicat p de type $i_1 \times \ldots \times i_n \to \lambda$ un morphisme de $X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n}$ dans Ω. Les opérateurs logiques $\vee, \wedge, \ldots$ seront interprétés comme les opérateurs de même nom dans Ω. Une constante de type i sera interprétée comme un élément global de X_i. On supposera que, pour tout type i en jeu, on a deux prédicats $=_i$ et $\in_i$ qui seront interprétés au moyen de $=_{X_i}$ et $\in_{X_i}$ respectivement. Puisque nous disposons des opérations f_* et $f_!$, on pourra interpréter les quantificateurs comme dans le cas ensembliste (cf. § 3.3). En conclusion, l'interprétation d'une relation A dans laquelle les variables libres sont $x_1, \ldots, x_n$ de types respectifs $i_1, \ldots, i_n$ sera dans la catégorie $\mathcal{T}$, un morphisme $\overline{A}$ de $X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n}$ dans Ω ; par exemple, si x et y sont deux variables de type λ, l'interprétation de la relation $x = x \wedge y$ est le morphisme $\implies$ de $\Omega \times \Omega$ dans Ω. Le cas des termes est analogue. Enfin, toute relation étant interprétée comme un morphisme à valeur dans Ω, c'est le morphisme caractéristique d'un sous-objet que l'on appelle l'*extension de la relation* en question.

On peut maintenant appliquer au topos $\mathcal{T}$ tous les théorèmes de la logique des prédicats. Par exemple, si A et B sont deux relations, et que l'on a prouvé $A \vdash B$ et $B \vdash A$, alors les extensions de A et B seront égales dans $\mathcal{T}$. On pourra ainsi prouver que Ω se comporte comme un objet en "algèbres de Heyting", de même que $\mathcal{P}(X)$ pour tout objet X de $\mathcal{T}$; l'ensemble des sous-objets de X est une vraie algèbre de Heyting.

Les méthodes précédentes peuvent être utilisées, non seulement pour prouver des égalités de morphismes dans la catégorie $\mathcal{T}$, mais aussi pour en construire. Par exemple, soit A une relation comportant deux variables libres x, y de types respectifs i, j ; si la formule

$$(\forall x \exists y(A)) \wedge \forall x \forall y \forall y'((A \wedge A(y'|y)) \implies y = y')$$

est valide, il existera dans $\mathcal{T}$ un morphisme $f : X_i \to X_j$ tel que $\overline{A}$ soit le morphisme caractéristique de l'image du monomorphisme (I_{X_i}, f) de X_i dans $X_i \times X_j$ (le "graphe de f"). En interprétant de manière convenable la formule précédente où l'on prendrait pour A un prédicat variable du type convenable, on peut définir le sous-objet Y^X de $\mathcal{P}(X \times Y)$ formé des "applications" de X dans Y. En particulier, on peut identifier $\mathcal{P}(X)$ à Ω^X.

En conclusion, les topos pemettent une très vaste extension de la notion de modèle. L'objet Ω étant un objet comme un autre dans $\mathcal{T}$, on peut traiter sur pied d'égalité les termes et les relations, et en particulier les modèles booléens sont des modèles comme les autres dans le cadre des topos. Les relations permises dans un topos comportent la relation d'appartenance, mais limitée par une restriction de types, puisque l'on a une telle relation $\in_X$ entre X et $\mathcal{P}(X)$ pour chaque objet X de $\mathcal{T}$.

4.2. Faisceaux

Jusqu'à présent, nous n'avons pas donné d'exemple de topos. Le premier exemple est fourni par "la" catégorie des ensembles $\mathcal{S}$ (cf. la conclusion, § 5). Soient maintenant $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $\mathcal{T}$ la catégorie $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{S}$. Par exemple, on pourra considérer la catégorie $\mathcal{C}$ associée de la manière usuelle à un ensemble ordonné I, les objets étant les éléments de I, et les morphismes les paires (i, j) d'éléments de I avec $i \leq j$. Plus particulièrement encore, on pourra prendre pour I l'ensemble ordonné par inclusion des parties ouvertes d'un espace topologique X ; alors $\mathcal{T}$ sera la catégorie des préfaisceaux sur X.

Pour passer de là aux faisceaux, nous aurons besoin d'une construction due à Lawvere et Tierney [34]. Soit $\mathcal{T}$ un topos quelconque. Un *opérateur modal* dans $\mathcal{T}$ est un morphisme $j : \Omega \to \Omega$ satisfaisant aux relations

$$jV = V, \qquad jj = j, \qquad j(x \wedge y) = jx \wedge jy \tag{13}$$

où $V : 1 \to \Omega$ est le "vrai" et où x, y désignent les deux projections de $\Omega \times \Omega$ dans Ω conformément aux principes généraux d'interprétation des relations. On notera l'analogie avec la formule (9) du § 2.1. D'ailleurs, j induit un opérateur modal au sens du § 2.1 dans l'algèbre de Heyting des sous-objets d'un objet X quelconque de $\mathcal{T}$.

Fixons j. On note J l'égalisateur de la paire (j, V_Ω) et Ω_j l'égalisateur de la paire (j, I_Ω). On dira qu'un monomorphisme $u : X \to Y$ est fermé (resp. dense) s'il existe un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ \Omega_j \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd} \quad \text{(resp.} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ J \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd} \quad \text{).}$$

Associant aux monomorphismes leur image, on voit que l'on peut définir les notions de sous-objet fermé et de sous-objet dense d'un objet X.

On note $\mathcal{T}_j$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ formée des objets F satisfaisant à la condition suivante :

(Faisc) *Si $u : X \to Y$ est un monomorphisme dense, et $v : X \to F$ un morphisme quelconque, il existe un unique morphisme $x : Y \to F$ tel que $v = xu$.*

Alors $\mathcal{T}_j$ est un topos, le produit cartésien dans $\mathcal{T}_j$ étant celui de $\mathcal{T}$ restreint aux objets de $\mathcal{T}_j$. Le foncteur d'inclusion de $\mathcal{T}_j$ dans $\mathcal{T}$ a un adjoint à gauche $a : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_j$ qu'on peut construire comme suit. Comme on a $jj = j$ et que Ω_j est l'égalisateur de (j, I_Ω), on peut factoriser j en $\Omega \xrightarrow{j'} \Omega_j \to \Omega$; on considère alors le morphisme composé $u : X \xrightarrow{\{.\}} \Omega^X \xrightarrow{j'^X} \Omega_j^X$; l'objet $a(x)$ est alors l'adhérence de l'image I de u, à savoir l'unique sous-objet fermé de Ω_j^X dans lequel I soit dense. On montre ensuite que le foncteur a satisfait à un calcul de fractions, et qu'il est donc exact.

Revenons au cas où $\mathcal{T}$ est de la forme $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$. L'objet Ω de $\mathcal{T}$ est le foncteur de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ dans $\mathcal{S}$ qui à chaque objet U de $\mathcal{C}$ associe l'ensemble des cribles dans U, c'est-à-dire [26] l'ensemble des sous-foncteurs du foncteur représentable $h_U : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathcal{S}$. On montre alors sans difficulté que la donnée d'un opérateur modal $j : \Omega \to \Omega$ dans $\mathcal{T}$ revient à celle d'une topologie J sur la catégorie $\mathcal{C}$ au sens de Grothendieck et Giraud [24, 26]. Le topos $\mathcal{T}_j$ est alors le topos des faisceaux sur le site $(\mathcal{C}, J)$ et le foncteur a est celui qui associe à tout préfaisceau le faisceau correspondant au sens de Grothendieck. Autrement dit, *un topos au sens de Grothendieck est un topos au sens de Lawvere et Tierney, mais la réciproque est fausse.*

Plus particulièrement, soit $\mathcal{C}$ la catégorie associée à l'ensemble ordonné des ouverts d'un espace topologique X. Le préfaisceau Ω associe à toute partie ouverte U de X l'ensemble des classes héréditaires F de parties ouvertes de U (F est dite héréditaire si les relations $V \subset V'$ et $V' \in F$ entraînent $V \in F$). Définissons le morphisme $j : \Omega \to \Omega$ comme la famille des applications $j_U : \Omega(U) \to \Omega(U)$ ainsi définies : si F est une classe héréditaire de parties ouvertes de U, alors $j_U(F)$ est l'ensemble des parties ouvertes de U qui sont contenues dans la réunion d'une famille d'ouverts appartenant à F. Avec cette définition, $\mathcal{T}_j$ est la catégorie des faisceaux sur X au sens usuel [28].

5. Conclusion

Nous venons de décrire les parties les plus fondamentales de la théorie des topos. Il convient de la préciser en ajoutant de nouveaux axiomes qui assurent par exemple le caractère booléen de la logique interne. On peut alors obtenir des topos qui se rapprochent de plus en plus de “la” théorie des ensembles classique. De fait, on peut montrer que celle-ci est aussi “forte” qu'une théorie des topos convenablement restreinte [51, 52].

La construction des faisceaux, sous la forme générale décrite au n° 4.2 permet de construire une large classe de topos, et une construction analogue à celle des ultraproduits permet de rendre ces topos booléens. Chacun de ces topos fournit un modèle de la théorie des ensembles élémentaire à la Lawvere [1, 2], et c'est cette liberté accrue qui permet de démontrer facilement l'indépendance de l'hypothèse du continu (ou de l'axiome du choix).

Esquissons une construction qui est une variante de celle de Cohen [44] ou de Tierney [53]. En termes catégoriques, l'hypothèse du continu généralisée est l'inexistence de deux monomorphismes non inversibles $X \to Y \to \mathcal{P}(X)$. Considérons alors un espace topologique S et un ultrafiltre Φ sur S auquel appartiennent les parties ouvertes et denses de S. Nous disons qu'un faisceau $\mathcal{F}$ sur S est *parfait* s'il satisfait à la propriété suivante :

(P) *Étant donnés deux ouverts U et V de S avec $U \subset V \subset \overline{U}$, toute section de $\mathcal{F}$ sur U se prolonge de manière unique en une section de $\mathcal{F}$ sur V.*

Étant donnés deux faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et deux morphismes u et v de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$, disons que u et v sont *équivalents* s'il existe un ouvert U appartenant à Φ tel que u et v coïncident au-dessus de U.

La catégorie des faisceaux parfaits sur S et des classes d'équivalence de morphismes est alors un modèle $\mathcal{M}$ de la théorie élémentaire des ensembles. Pour contredire l'hypothèse du continu dans $\mathcal{M}$, on choisit pour S un espace compact totalement discontinu de la forme $\{0,1\}^I$ où I a la puissance du continu. Alors l'algèbre de Boole formée des parties ouvertes et fermées de S a la puissance du continu, mais satisfait à la condition de chaîne dénombrable car il existe une mesure de support S, par exemple le produit des mesures $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ sur les facteurs $[0,1]$. Soit alors X_0 un faisceau constant sur S de fibre F dénombrable et Y_0 le faisceau constant de fibre $\mathcal{P}(F)$. On a des monomorphismes $X_0 \to Y_0 \to \mathcal{P}(X_0)$ évidents. Ils sont non inversibles, le premier de manière évidente, et le second parce que le faisceau constant X a beaucoup de sous-faisceaux non constants [4]. Les faisceaux X_0 et Y_0 ne sont pas parfaits, mais il est facile de prouver que la catégorie des faisceaux parfaits est une sous-catégorie réflexive de celle de tous les faisceaux. On prend alors pour X (resp. Y) le faisceau parfait “enveloppe” de X_0, (resp. Y_0). On obtient deux monomorphismes non inversibles $X \to Y \to \mathcal{P}(X)$ qui contredisent dans le modèle l'hypothèse du continu.

Pour contredire l'axiome du choix, il faut considérer des faisceaux où opère un groupe.

Bibliographie commentée

Pour une bibliographie exhaustive sur le sujet, on pourra consulter le livre de Johnstone [31]. Nous mentionnons d'abord les principaux articles de Lawvere, de lecture difficile, mais passionnante :

[1] F. W. Lawvere, An elementary theory of the category of sets, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 52 (1964), p. 1506-1511.

[2] ______________, An elementary theory of the category of sets, notes polycopiées 43 pages, Université de Chicago, 1964.

[3] ______________, Adjointness in foundations, Dialectica, 23 (1969), p. 281-296.

[4] ______________, Equality in hyperdoctrines and comprehension schema as an adjoint functor : Symposia Pure Maths., vol. XVII, Amer. Math. Soc., 1970, p. 1-14.

[5] ______________, Quantifiers and sheaves, Actes du Congrès Intern. des Math., Nice, 1970, vol. I, p. 329-334.

[6] ______________, Continuously variable sets : algebraic geometry = geometric logic, in Bristol Logic Colloquium '73 ; North Holland, 1975, p. 135-156.

[7] ______________, Variable quantities and variable structures in topoi, in Algebra, Topology and Category Theory (éd. A. Heller et M. Tierney), Academic Press, 1976, p. 101-131.

De plus, Lawvere est l'éditeur des comptes-rendus de deux colloques, pour lesquels il a écrit deux introductions fort intéressantes :

[8] Toposes, algebraic geometry and logic, Lecture Notes in Maths., vol.274, Springer, 1972.

4. On peut ême prouver que le *faisceau* des épimorphismes de Y_0 dans X_0 (resp. $\mathcal{P}(X_0)$ dans Y_0) est vide.

[9] Model theory and topoi, Lecture Notes in Maths., vol. 445, Springer, 1975.

Voici maintenant quelques ouvrages de référence sur la logique mathématique :

[10] A. Church, The calculi of lambda conversion, Annals of Math. Studies, 6, Princeton University Press, 1941.

[11] H. Curry, R. Feys et W. Craig, Combinatory Logic, vol. I, North Holland, 1958.

[12] G. Gentzen, Collected Papers (M. Szabo édit.), North Holland, 1969.

[13] J. van Heijenoort, Frege and Gödel (Two fundamental texts in mathematical logic), Harvard University Press, 1970.

[14] D. Hilbert et W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, 5º édit., Springer, 1967.

[15] S. Kleene, Introduction to Metamathematics, van Nostrand, 1952.

[16] Y. Manin, A course in Mathematical Logic, Springer, 1977.

Pour les algèbres de Boole, treillis, etc., voici quelques ouvrages de base :

[17] Birkhoff, Lattice theory, Colloquium Publ., vol. XXV, 3º édit., Amer. Math. Soc., 1967.

[18] P. Halmos, Lectures on Boolean algebras, van Nostrand, 1963.

[19] A. Heyting, Intuitionism. An introduction, North Holland, 1956.

[20] J. McKinsey et A. Tarski, On closed elements in closure algebras, Ann. of Maths, 47 (1946), p. 122-162.

[21] R. Sikorski, Boolean algebras, Springer, 1964.

[22] H. Rasiowa et R. Sikorski, The mathematics of metamathematics, Monografie Mat., vol, 41, Varsovie, 1963.

Pour la théorie des faisceaux au sens de Grothendieck, et des catégories qui leur sont associées, consulter :

[23] M. Artin, Grothendieck topologies, notes polycopiées, Harvard, 1962.

[24] M. Artin, A. Grothendieck et J.L. Verdier, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4), Lecture Notes in Maths, vol. 269, Springer, 1972.

[25] J. Giraud, Classifying topos, dans [8], p. 43-56.

[26] Analysis Situs [d'après Artin et Grothendieck], Sém. Bourbaki 1962/3, exposé 256, 11 pages, Benjamin, 1966.

[27] M. Hakim, Topos annelés et schémas relatifs, Springer, 1972.

[28] R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958.

La théorie élémentaire des topos fait l'objet des ouvrages et articles suivants :

[29] J. Bénabou et J. Celeyrette, Généralités sur les topos de Lawvere et Tierney, Sém. Bénabou ; Université Paris-Nord, 1971.

[30] P. Freyd, Aspects of topoi, Bull. Austr. Math. Soc., 7 (1972), p. 1-76 et 467-480.

[31] P. Johnstone, Topos theory, London Math. Soc. vol. 10, Academic Press, 1977.

[32] A. Kock et C. Mikkelsen, Topos theoretic factorization of non-standard analysis, Lecture Notes in Maths., vol. 369, Springer, 1974, p. 122-143.

[33] A. Kock et G. Wraith, Elementary toposes, Aarhus Lecture Notes, vol. 30, 1971.

[34] M. Tierney, Axiomatic sheaf theory : some constructions and applications, in Categories and Commutative Algebra, C.I.M.E. III Ciclo 1971, Edizioni Cremonese, 1973, p. 249-326.

[35] Forcing topologies and classifying topoi, in Algebra, Topology and Category Theory (éd. A. Heller et M. Tierney, Academic Press, 1976, p. 211-219.

Le "langage interne des topos" est mis au point dans les travaux suivants :

[36] J. Bénabou, Catégories et Logiques faibles, Journées sur les Catégories, Oberwolfach, 1973.

[37] M. Coste, Logique d'ordre supérieur dans les topos élémentaires, Sém. Bénabou, Université Paris-Nord, 1973/4.

[38] J. Lambek, Deductive systems and categories, I : Math. Systems Theory, 2 (1968). p. 287-318 ; II : Lecture Notes in Maths., vol. 86, Springer, 1969, p. 76-122 ; III : in [8], p. 57-82.

[39] W. Mitchell, Boolean topoi and the theory of sets, Journ. Pure and Applied Alg., 2 (1972), p. 261-274.

[40] G. Osius, Logical and set theoretical tools in elementary topoi, in [9], p. 297-346.

[41] ———, A note on Kripke-Joyal semantics for the internal language of topos, in [9], p. 349-354.

[42] H. Volger, Logical categories, semantical categories and topoi, in [9], p. 87-100.

Voici un échantillon d'ouvrages où sont traités les problèmes axiomatiques de la théorie des ensembles :

[43] P. Bernays et A. Fraenkel, Axiomatic set theory, North Holland, 1968.

[44] P. Cohen, Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, 1966.

[45] K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory, 4e édit., Princeton University Press, 1958.

[46] R. Jensen, Modelle der Mengenlehre, Lecture Notes in Maths., vol. 37, Springer, 1967.

[47] A. Mostowski, An undecidable arithmetical statement, Fund. Math., 36 (1949), p. 143-164.

[48] J. Rosser, Simplified independence proofs (Boolean valued models of set theory), Academic Press, 1969.

[49] P. Samuel, Modèles booléens et hypothèse du continu, Sém. Bourbaki 1966/7, exposé 317, 12 pages, Benjamin, 1968.

[50] D. Scott, A proof of the independence of the continuum hypothesis, Math. Systems Theory, 1 (1967), p. 89-111.

Voici enfin les références fondamentales pour l'application de la théorie des topos aux problèmes axiomatiques de la théorie des ensembles :

[51] J. Cole, Categories of sets and models of set theory, Proc. Bertrand Russell, Memorial Logic Conference, Uldum 1971, Leeds 1973, p. 351-399.

[52] G. Osius, Categorical set theory : a characterization of the category of sets, Journ. Pure and Applied Alg., 4 (1974), p. 79-119.

[53] M. Tierney, Sheaf theory and the continuum hypothesis, in [8], p. 13-42.

§ 4. Spectres d'anneaux et supports de modules

1. *Espaces irréductibles.*

Définition 1. — *On dit qu'un espace topologique* X *est irréductible si toute intersection finie d'ensembles ouverts non vides de* X *est non vide.*

En considérant la famille vide d'ensembles ouverts de X, on voit qu'un espace irréductible est *non vide* ; pour qu'un espace topologique X soit irréductible, il faut et il suffit qu'il soit non vide et que l'intersection de deux ensembles ouverts non vides de X soit toujours non vide (ou, ce qui revient au même, que la réunion de deux ensembles fermés distincts de X soit toujours distincte de X).

Proposition 1. — *Soit* X *un espace topologique non vide. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) X *est irréductible ;*

b) *tout ensemble ouvert non vide de* X *est dense dans* X *;*

c) *tout ensemble ouvert de* X *est connexe.*

Par définition, un ensemble dense dans X est un ensemble qui rencontre tout ensemble ouvert non vide, donc *a*) et *b*) sont équivalentes. Il est immédiat que *c*) entraîne *a*), car si U_1 et U_2 sont des ensembles ouverts non vides disjoints, $U_1 \cup U_2$ est un ensemble ouvert non connexe. Montrons enfin que *a*) entraîne *c*) : si U est un ensemble ouvert non connexe, il est réunion de deux ensembles non vides disjoints U′, U″ qui sont ouverts dans U, donc aussi ouverts dans X, ce qui implique que X n'est pas irréductible.

Un espace *séparé* n'est irréductible que s'il est réduit à un seul point.

On dit qu'une partie E d'un espace topologique X est un *ensemble irréductible* si le sous-espace E de X est irréductible. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, pour tout couple d'ensembles U, V ouverts dans X et rencontrant E, $U \cap V$ rencontre aussi E, ou (ce qui revient au même) que, pour tout couple d'ensembles F, G fermés dans X et tels que $E \subset F \cup G$, on ait $E \subset F$ ou $E \subset G$. Par récurrence sur n, on en déduit que, si $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille finie d'ensembles fermés dans X, tels que $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, il existe un indice i tel que $E \subset F_i$.

Proposition 2. — *Dans un espace topologique* X, *pour qu'un ensemble* E *soit irréductible, il faut et il suffit que son adhérence* $\overline{E}$ *le soit.*

En effet, pour qu'un ensemble ouvert de X rencontre E, il faut et il suffit qu'il rencontre $\overline{E}$, et la proposition résulte des remarques précédentes.

Proposition 3. — (i) *Si* X *est un espace irréductible, tout ensemble ouvert non vide de* X *est irréductible.*

(ii) *Soit* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *un recouvrement non vide d'un espace topologique* X, *formé d'ensembles ouverts tels que* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ *pour tout couple d'indices* (α, β). *Si les ensembles* U_α *sont irréductibles, l'espace* X *est irréductible.*

(i) Si X est irréductible, $U \subset X$ ouvert non vide dans X et $V \subset U$ ouvert non vide dans U, V est aussi ouvert dans X, donc dense dans X et *a fortiori* dans U. Donc U est irréductible (prop. 1).

(ii) Montrons que, pour tout ensemble V ouvert dans X et non vide, on a $V \cap U_\alpha \neq \emptyset$ pour tout $\alpha \in A$: il en résultera que $V \cap U_\alpha$ est dense dans U_α par hypothèse, donc que V est dense dans X, et cela prouvera que X est irréductible (prop. 1). Or il existe au moins un indice γ tel que $V \cap U_\gamma \neq \emptyset$; comme $U_\alpha \cap U_\gamma \neq \emptyset$ pour tout α, et que $V \cap U_\gamma$ est dense dans U_γ, on a $U_\alpha \cap U_\gamma \cap V \neq \emptyset$ et *a fortiori* $U_\alpha \cap V \neq \emptyset$, ce qui achève la démonstration de (ii).

Proposition 4. — *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques,* f *une application continue de* X *dans* Y. *Pour toute partie irréductible* E *de* X, $f(E)$ *est une partie irréductible de* Y.

En effet, si U, V sont deux ensembles ouverts dans Y rencontrant $f(E)$, $\overset{-1}{f}(U)$ et $\overset{-1}{f}(V)$ sont des ensembles ouverts dans X rencontrant E. Par suite $\overset{-1}{f}(\mathrm{U}) \cap \overset{-1}{f}(\mathrm{V}) = \overset{-1}{f}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$ rencontre E, ce qui entraîne que $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ rencontre $f(\mathrm{E})$ et démontre la proposition.

Définition 2. — *On appelle composante irréductible d'un espace topologique* X *toute partie irréductible maximale de* X.

Il résulte de la prop. 2 que toute composante irréductible de X est *fermée* dans X.

Proposition 5. — *Soit* X *un espace topologique. Toute partie irréductible de* X *est contenue dans une composante irréductible de* X, *et* X *est réunion de ses composantes irréductibles.*

Pour démontrer la première assertion, il suffit, en vertu du th. de Zorn, de prouver que l'ensemble $\mathfrak{I}$ des parties irréductibles de X est *inductif*. Soit $\mathfrak{G}$ une partie de $\mathfrak{I}$ totalement ordonnée par inclusion ; montrons que la réunion E des ensembles $\mathrm{F} \in \mathfrak{G}$ est irréductible. Soient U, V deux ensembles ouverts dans X et rencontrant E ; comme $\mathfrak{G}$ est totalement ordonnée, il existe un ensemble $\mathrm{F} \in \mathfrak{G}$ rencontrant U et V ; comme F est irréductible, $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ rencontre F, donc aussi E, ce qui prouve que E est irréductible, donc que $\mathfrak{I}$ est inductif. La seconde assertion résulte de la première, car toute partie de X réduite à un seul point est irréductible.

Corollaire. — *Toute composante connexe d'un espace topologique* X *est réunion de composantes irréductibles de* X.

En effet, tout sous-espace irréductible de X est connexe en vertu de la prop. 1, donc contenu dans une composante connexe de X.

On notera que deux composantes irréductibles distinctes de X peuvent avoir des points communs (exerc. 11).

Proposition 6. — *Soient* X *un espace topologique,* $(\mathrm{P}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *un recouvrement fini de* X *formé d'ensembles fermés irréductibles. Alors les composantes irréductibles de* X *sont les éléments maximaux* (*pour la relation d'inclusion*) *de l'ensemble des* P_i.

On peut se borner au cas où les P_i sont deux à deux incomparables. Si E est une partie irréductible de X, on a $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, donc E est contenu dans l'un des ensembles fermés P_i ; cela prouve que les P_i sont les seules parties irréductibles maximales de X.

Corollaire. — *Soient* X *un espace topologique*, E *un sous-espace de* X *n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles distinctes* Q_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; *alors les composantes irréductibles de l'adhérence* $\overline{E}$ *dans* X *sont les adhérences* $\overline{Q_i}$ *des* Q_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *et on a* $\overline{Q_i} \neq \overline{Q_j}$ *pour* $i \neq j$.

En effet, $\overline{E}$ est la réunion des $\overline{Q_i}$, qui sont irréductibles (prop. 2) ; comme Q_i est fermé dans E, on a $\overline{Q_i} \cap E = Q_i$; comme $Q_i \not\subset Q_j$ pour $i \neq j$, on a $\overline{Q_i} \not\subset \overline{Q_j}$, d'où le corollaire, en vertu de la prop. 6.

Remarque. — Supposons que X n'ait qu'un nombre *fini* de composantes irréductibles distinctes X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; alors $U_i = \complement\left(\bigcup_{j \neq i} X_j\right)$ est *ouvert dans* X et *dense dans* X_i puisque $X_i \not\subset \bigcup_{j \neq i} X_j$; les U_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont donc des ouverts non vides de X, irréductibles (prop. 2), deux à deux disjoints, et dont la réunion est dense dans X.

Proposition 7. — *Soit* U *une partie ouverte d'un espace topologique* X. *L'application* $V \to \overline{V}$ (*adhérence dans* X) *est une bijection de l'ensemble des parties irréductibles de* U, *fermées dans* U, *sur l'ensemble des parties irréductibles de* X, *fermées dans* X *et rencontrant* U ; *la bijection réciproque est* $Z \to Z \cap U$. *En particulier, cette bijection applique l'ensemble des composantes irréductibles de* U *sur l'ensemble des composantes irréductibles de* X *rencontrant* U.

En effet, si V est fermée dans U et irréductible, $\overline{V}$ est irréductible (prop. 2) et l'on a $V = \overline{V} \cap U$. Inversement, si Z est irréductible, fermé dans X et rencontre U, $Z \cap U$ est un ouvert non vide dans Z, donc est irréductible (prop. 3), dense dans Z, et, comme Z est fermé, on a $Z = \overline{Z \cap U}$. Cela démontre la proposition.

2. *Espaces topologiques nœthériens*

DÉFINITION 3. — *On dit qu'un espace topologique* X *est nœthérien si tout ensemble non vide de parties fermées de* X, *ordonné par inclusion, possède un élément minimal.*

Il revient au même de dire que tout ensemble non vide de parties ouvertes de X, ordonné par inclusion, possède un élément maximal, ou que toute suite décroissante (resp. croissante) d'ensembles fermés (resp. ouverts) est stationnaire (*Ens.*, chap. III, § 6, n° 5, prop. 6).

PROPOSITION 8. — (i) *Tout sous-espace d'un espace nœthérien est nœthérien.*

(ii) *Soit* $(A_i)_{i \in I}$ *un recouvrement* fini *d'un espace topologique* X. *Si les sous-espaces* A_i *de* X *sont nœthériens*, X *est nœthérien.*

(i) Soient X un espace nœthérien, A un sous-espace de X, (F_n) une suite décroissante de parties de A, fermées *dans* A ; on a donc $F_n = \overline{F}_n \cap A$, et les adhérences $\overline{F}_n$ des F_n dans X forment une suite décroissante de parties fermées de X. Comme cette suite est stationnaire, il en est de même de la suite (F_n).

(ii) Soit $(G_n)_{n \geqslant 0}$ une suite décroissante de parties fermées de X; par hypothèse, chacune des suites $(G_n \cap A_i)_{n \geqslant 0}$ est stationnaire. Comme I est fini, il y a un entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait $G_n \cap A_i = G_{n_0} \cap A_i$ pour tout $i \in I$. Mais $G_n = \bigcup_{i \in I} (G_n \cap A_i)$, donc la suite (G_n) est stationnaire, et X est nœthérien.

PROPOSITION 9. — *Pour qu'un espace topologique* X *soit nœthérien, il faut et il suffit que tout ensemble ouvert dans* X *soit quasi-compact.*

Pour démontrer que la condition est nécessaire, il suffit, en vertu de la prop. 8, de prouver que tout espace nœthérien X est quasi-compact. Soit $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de X ; l'ensemble des réunions finies d'ensembles U_ι est non vide et admet donc un élément maximal $V = \bigcup_{\iota \in H} U_\iota$, où H est une partie finie de I. Par définition, on a $V \cup U_\iota = V$ pour tout $\iota \in I$, donc $V = X$.

Réciproquement, supposons que tout ensemble ouvert dans X soit quasi-compact, et soit (U_n) une suite croissante de parties ouvertes de X. La réunion V des U_n est ouverte, donc quasi-compacte ; comme (U_n) est un recouvrement ouvert de V, il y a une sous-famille finie de (U_n) qui est un recouvrement de V, donc $V = U_n$ pour un indice n, ce qui prouve que la suite (U_n) est stationnaire.

Lemme 1 (« principe de récurrence nœthérienne »). — ***Soient*** E *un ensemble ordonné dont toute partie non vide admet un élément minimal. Soit* F *une partie de* E *ayant la propriété suivante : si* $a \in E$ *est tel que la relation* $x < a$ *entraîne* $x \in F$, *alors* $a \in F$. *On a alors* $F = E$.

En effet, supposons $F \neq E$; alors $\complement F$ aurait un élément minimal b. Par définition, on a $x \in F$ pour tout $x < b$, ce qui entraîne $b \in F$, d'où contradiction.

Proposition 10. — *Si* X *est un espace nœthérien, l'ensemble des composantes irréductibles de* X (*et a fortiori l'ensemble des composantes connexes de* X) *est fini.*

Il suffit de prouver que X est réunion finie de parties fermées irréductibles (n° 1, prop. 6). Montrons qu'on peut appliquer le principe de récurrence nœthérienne en prenant pour E l'ensemble des parties fermées de X, ordonné par inclusion, pour F l'ensemble des réunions finies de parties fermées irréductibles. Soit Y une partie fermée de X telle que toute partie fermée $\neq$ Y de Y appartienne à F. Si Y est irréductible, on a $Y \in F$ par définition ; sinon, Y est réunion de deux parties fermées Y_1, Y_2 distinctes de Y. On a donc $Y_1 \in F$ et $Y_2 \in F$ par hypothèse, d'où $Y \in F$ par définition de F.

Il en résulte en particulier qu'un espace nœthérien *séparé* est nécessairement *fini.*

3. Le spectre premier d'un anneau

Soient A un anneau, X l'ensemble des idéaux premiers de A. Pour toute partie M de A, nous noterons V(M) l'ensemble des idéaux premiers de A contenant M ; il est clair que, si $\mathfrak{a}$ est l'idéal de A engendré par M, on a $V(M) = V(\mathfrak{a})$; si M est réduit à un seul élément f, on écrira $V(f)$ au lieu de $V(\{f\})$, et on a $V(f) = V(Af)$. L'application $M \to V(M)$ est *décroissante* pour les relations d'inclusion dans A et X. En outre, on a les formules suivantes :

$$V(0) = X, \qquad V(1) = \emptyset\,; \tag{1}$$

$$V\Big(\bigcup_{\iota\in I} M_\iota\Big) = V\big(\sum_{\iota\in I} M_\iota\big) = \bigcap_{\iota\in I} V(M_\iota) \tag{2}$$

pour toute famille $(M_\iota)_{\iota\in I}$ de parties de A ;

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{a}') \tag{3}$$

pour tout couple d'idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ de A. En effet, les formules (1) et (2) sont évidentes ; d'autre part, la formule (3) signifie que, pour qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A contienne l'un des idéaux $\mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{a}'$, il faut et il suffit qu'il contienne $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, ou qu'il contienne $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$; elle résulte par suite du § 1, n° 1, prop. 1. La seconde formule (1) admet la réciproque suivante : si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A tel que $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$, alors $\mathfrak{a} = A$, car il n'existe aucun idéal maximal de A contenant $\mathfrak{a}$. Enfin, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A et $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ sa *racine* (§ 2, n° 6, déf. 4), on a

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{r}(\mathfrak{a})) \tag{4}$$

comme il résulte du § 2, n° 6, cor. 1 de la prop. 13.

Les formules (1) à (3) montrent que les parties V(M) de X satisfont aux axiomes des *ensembles fermés* d'une topologie (*Top. gén.*, chap. I, 3[e] éd., § 1, n° 4).

DÉFINITION 4. — *Soit* A *un anneau. On appelle spectre premier de* A *et on note* Spec (A) *l'ensemble* X *des idéaux premiers de* A, *muni de la topologie pour laquelle les ensembles fermés sont les ensembles* V(M) *où* M *parcourt* $\mathfrak{P}(A)$. *La topologie ainsi définie s'appelle topologie spectrale ou topologie de Zariski sur* X.

Il est clair que la relation Spec (A) $= \emptyset$ est équivalente à $A = \{0\}$.

Soit X le spectre premier d'un anneau A; pour tout $f \in A$, notons X_f l'ensemble des idéaux premiers de A *ne contenant pas* f ;

on a $X_f = X - V(f)$, et X_f est donc un ensemble *ouvert*. En vertu de (2), toute partie fermée de X est intersection d'ensembles fermés de la forme $V(f)$, donc les X_f forment une *base* de la topologie spectrale sur X. En outre, il résulte aussitôt des définitions que l'on a

$$X_0 = \emptyset, \qquad X_1 = X, \tag{5}$$

et plus généralement $X_f = X$ pour tout élément inversible f de A ;

$$X_{fg} = X_f \cap X_g \text{ pour } f,\ g \text{ dans A.} \tag{6}$$

Pour toute partie Y de X, notons $\mathfrak{I}(Y)$ l'intersection des idéaux premiers de A qui appartiennent à Y. Il est clair que $\mathfrak{I}(Y)$ est un idéal de A, et que l'application $Y \to \mathfrak{I}(Y)$ est *décroissante* pour les relations d'inclusion dans X et dans A. On a évidemment les relations

$$\mathfrak{I}(\emptyset) = A \tag{7}$$

$$\mathfrak{I}\Big(\bigcup_{\lambda \in L} Y_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda \in L} \mathfrak{I}(Y_\lambda) \tag{8}$$

pour toute famille $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$ de parties de X. En outre :

Proposition 11. — *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* A, Y *une partie de* $X = \operatorname{Spec}(A)$.

(i) $V(\mathfrak{a})$ *est fermé dans* X *et* $\mathfrak{I}(Y)$ *est un idéal de* A *égal à sa racine.*

(ii) $\mathfrak{I}(V(\mathfrak{a}))$ *est la racine de* $\mathfrak{a}$, *et* $V(\mathfrak{I}(Y))$ *est l'adhérence de* Y *dans* X.

(iii) *Les applications* $\mathfrak{I}$ *et* V *définissent des bijections décroissantes réciproques l'une de l'autre, entre l'ensemble des parties fermées de* X *et l'ensemble des idéaux de* A *égaux à leurs racines.*

L'assertion (i) et la première assertion de (ii) résultent des définitions et du § 2, n° 6, cor. 1 de la prop. 13. Si un ensemble fermé $V(M)$ (pour un $M \subset A$) contient Y, on a $M \subset \mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in Y$, d'où $M \subset \mathfrak{I}(Y)$ et par suite $V(M) \supset V(\mathfrak{I}(Y))$; comme on a $Y \subset V(\mathfrak{I}(Y))$, $V(\mathfrak{I}(Y))$ est le plus petit ensemble fermé de X contenant Y, ce qui achève de prouver (ii). Enfin, il résulte de (ii) que, si $\mathfrak{a}$ est un idéal égal à sa racine, on a $\mathfrak{I}(V(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$ et que, si Y est fermé dans X, $V(\mathfrak{I}(Y)) = Y$; ce qui démontre (iii).

On déduit aussitôt de la prop. 11 que, si M est une partie quelconque de A et Y une partie quelconque de X, on a $V(M) = V(\mathfrak{I}(V(M)))$ et $\mathfrak{I}(Y) = \mathfrak{I}(V(\mathfrak{I}(Y)))$.

Corollaire 1. — *Pour toute famille* $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de parties fermées de* X, $\mathfrak{I}\left(\bigcap_{\lambda \in L} Y_\lambda\right)$ *est la racine de la somme des idéaux* $\mathfrak{I}(Y_\lambda)$.

En effet, il résulte de la prop. 11, (iii), que $\mathfrak{I}\left(\bigcap_{\lambda \in L} Y_\lambda\right)$ est le plus petit idéal égal à sa racine et contenant tous les $\mathfrak{I}(Y_\lambda)$; cet idéal contient donc $\sum_{\lambda \in L} \mathfrak{I}(Y_\lambda)$ et par suite aussi la racine de $\sum_{\lambda \in L} \mathfrak{I}(Y_\lambda)$ (§ 2, n° 6, cor. 2 de la prop. 13), d'où le corollaire.

Corollaire 2. — *Désignons par* $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ *la racine d'un idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A ; *si* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont deux idéaux de* A, *la relation* $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ *est équivalente à* $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ *et à* $\mathfrak{r}(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$.

Il est immédiat que les relations $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ et $\mathfrak{r}(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ sont équivalentes, et comme $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{r}(\mathfrak{a}))$, le corollaire résulte aussitôt de la prop. 11 ,(iii).

Corollaire 3. — *Soit* $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ *une famille d'éléments de* A. *Pour qu'un élément* $g \in A$ *soit tel que* $X_g \subset \bigcup_{\lambda \in L} X_{f_\lambda}$, *il faut et il suffit qu'il existe un entier* $n > 0$ *tel que* g^n *appartienne à l'idéal engendré par les* f_λ.

En effet, la relation $X_g \subset \bigcup_{\lambda \in L} X_{f_\lambda}$ équivaut à $V(g) \supset \bigcap_{\lambda \in L} V(f_\lambda)$, et il suffit d'appliquer le cor. 2.

Corollaire 4. — *Pour que deux éléments* f, g *de* A *soient tels que* $X_f = X_g$, *il faut et il suffit qu'il existe deux entiers* $m > 0$, $n > 0$ *tels que* $f^m \in Ag$ *et* $g^n \in Af$.

Corollaire 5. — *Pour que* $f \in A$ *soit tel que* $X_f = \emptyset$, *il faut et il suffit que* f *soit nilpotent.*

Cela résulte aussitôt du cor. 4.

Corollaire 6. — *L'adhérence d'un ensemble réduit à un point* $\mathfrak{p} \in X = \mathrm{Spec}(A)$ *est l'ensemble* $V(\mathfrak{p})$ *des idéaux premiers contenant* $\mathfrak{p}$. *Pour que l'ensemble* $\{\mathfrak{p}\}$ *soit fermé dans* X (ou, comme on dit encore par abus de langage, pour que $\mathfrak{p}$ soit un *point fermé* de X), *il faut et il suffit que* $\mathfrak{p}$ *soit maximal.*

Corollaire 7. — *Si* A *est un anneau nœthérien,* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *est un espace nœthérien.*

Proposition 12. — *Pour tout* $f \in A$, *l'ensemble ouvert* X_f *dans* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *est quasi-compact ; en particulier, l'espace* X *est quasi-compact.*

Comme les X_g forment une base de la topologie, il suffit de prouver que, si $(g_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une famille d'éléments de A telle que $X_f \subset \bigcup_{\lambda \in L} X_{g_\lambda}$, alors il existe une sous-famille finie $(g_\lambda)_{\lambda \in H}$ telle que $X_f \subset \bigcup_{\lambda \in H} X_{g_\lambda}$. Mais la relation $X_f \subset \bigcup_{\lambda \in L} X_{g_\lambda}$ signifie qu'il existe un entier $n > 0$ et une sous-famille finie $(g_\lambda)_{\lambda \in H}$ telle que f^n appartienne à l'idéal engendré par cette sous-famille (cor. 3 de la prop. 11) ; d'où la proposition.

Proposition 13. — *Soient* A, A' *deux anneaux,* $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$, *h un homomorphisme de* A *dans* A' ; *l'application* ${}^a h : \mathfrak{p}' \to \overset{-1}{h}(\mathfrak{p}')$ *de* X' *dans* X *est continue.*

En effet, pour $M \subset A$, l'ensemble $({}^a h)^{-1}(V(M))$ est l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}'$ de A' tels que $M \subset \overset{-1}{h}(\mathfrak{p}')$, ce qui équivaut à $h(M) \subset \mathfrak{p}'$; cet ensemble est donc égal à $V(h(M))$ et est par conséquent fermé.

On dit que ${}^a h$ est l'application *associée* à l'homomorphisme *h*.

Remarque. — Si *h* est surjective et si $\mathfrak{a}$ est son noyau, il résulte de la définition de la topologie spectrale que ${}^a h$ est un homéomorphisme de X' sur le sous-espace fermé $V(\mathfrak{a})$ de X ; en effet, pour qu'un idéal premier $\mathfrak{p}'$ de A' contienne un idéal $\mathfrak{b}'$ de A', il faut et il suffit que $\overset{-1}{h}(\mathfrak{p}')$ contienne $\overset{-1}{h}(\mathfrak{b}')$; on voit d'abord que ${}^a h$ est injective en prenant $\mathfrak{b}'$ premier; en outre, pour tout idéal $\mathfrak{b}'$ de A', l'image par ${}^a h$ de $V(\mathfrak{b}')$ est $V(\overset{-1}{h}(\mathfrak{b}'))$, d'où notre assertion, les idéaux de la forme $\overset{-1}{h}(\mathfrak{b}')$ étant tous les idéaux de A contenant $\mathfrak{a}$.

COROLLAIRE. — *Soient* S *une partie multiplicative de* A, $A' = S^{-1}A$, *h l'homomorphisme canonique* i_A^S ; *alors* ${}^a h$ *est un homéomorphisme de* $X' = \operatorname{Spec}(A')$ *sur le sous-espace de* $X = \operatorname{Spec}(A)$ *formé des idéaux premiers de* A *ne rencontrant pas* S.

En effet, soit $f' = f/s$ où $f \in A$, $s \in S$; on a $X'_{f'} = X'_{f/1}$ puisque $s/1$ est inversible dans A'. On sait déjà que ${}^a h$ est injective et que, pour tout $\mathfrak{p}' \in X'$, les relations $f/1 \in \mathfrak{p}'$ et $f \in \overset{-1}{h}(\mathfrak{p}') = {}^a h(\mathfrak{p}')$ sont équivalentes, donc les conditions $\mathfrak{p}' \in X'_{f/1}$ et ${}^a h(\mathfrak{p}') \in X_f$ sont équivalentes ; cela montre que ${}^a h(X'_{f'})$ est égal à $X_f \cap {}^a h(X')$, d'où la première assertion, puisque les X_f (resp. $X'_{f'}$) forment une base de la topologie de X (resp. X'). La seconde assertion résulte du § 2, n° 5, prop. 11, (ii).

PROPOSITION 14. — *Soit* A *un anneau. Pour qu'une partie* Y *de* $X = \operatorname{Spec}(A)$ *soit irréductible, il faut et il suffit que l'idéal* $\mathfrak{J}(Y)$ *soit premier.*

Posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{J}(Y)$, et notons que, pour un élément $f \in A$, la relation $f \in \mathfrak{p}$ est équivalente à $Y \subset V(f)$. Supposons Y irréductible, et soient f, g des éléments de A tels que $fg \in \mathfrak{p}$. On a donc

$$Y \subset V(fg) = V(f) \cup V(g) ;$$

comme Y est irréductible, $V(f)$ et $V(g)$ fermés, on a $Y \subset V(f)$ ou $Y \subset V(g)$, donc $f \in \mathfrak{p}$ ou $g \in \mathfrak{p}$, ce qui prouve que $\mathfrak{p}$ est premier.

Supposons maintenant $\mathfrak{p}$ premier ; on a $\overline{Y} = V(\mathfrak{p})$ (prop. 11, (ii)), et comme $\mathfrak{p}$ est premier, $\mathfrak{p} = \mathfrak{J}(\{\mathfrak{p}\})$, d'où $\overline{Y} = V(\mathfrak{J}(\{\mathfrak{p}\})) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ (prop. 11, (ii)). Comme un ensemble réduit à un point est irréductible, Y est irréductible (n° 1, prop. 2).

COROLLAIRE 1. — *Pour qu'un anneau* A *soit tel que* $X = \operatorname{Spec}(A)$ *soit irréductible, il faut et il suffit que le quotient de* A *par son nilradical* $\mathfrak{N}$ *soit intègre.*

En effet (prop. 11, (i)), $\mathfrak{J}(X)$ est la racine de l'idéal (0), c'est-à-dire $\mathfrak{N}$.

Corollaire 2. — *L'application* $\mathfrak{p} \to V(\mathfrak{p})$ *est une bijection de* $X = \operatorname{Spec}(A)$ *sur l'ensemble des parties fermées irréductibles de* X ; *en particulier les composantes irréductibles d'une partie fermée* Y *de* X *sont les ensembles* $V(\mathfrak{p})$, *où* $\mathfrak{p}$ *parcourt l'ensemble des éléments minimaux de l'ensemble des idéaux premiers de* A *qui contiennent* $\mathfrak{J}(Y)$.

Comme $\mathfrak{J}(V(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, et $Y = V(\mathfrak{J}(Y))$ pour toute partie fermée Y de X, la première assertion résulte de la prop. 14 ; d'autre part, pour que $Y \supset V(\mathfrak{p})$, il faut et il suffit que $\mathfrak{p} = \mathfrak{J}(V(\mathfrak{p})) \supset \mathfrak{J}(Y)$ (prop. 11), d'où la seconde assertion.

Corollaire 3. — *L'ensemble des idéaux premiers minimaux d'un anneau nœthérien* A *est fini.*

En effet, $X = \operatorname{Spec}(A)$ n'a alors qu'un nombre fini de composantes irréductibles (cor. 7 de la prop. 11 et n° 2, prop. 10) et le corollaire résulte du cor. 2 précédent.

Proposition 15. — *Soient* A *un anneau,* I *un ensemble fini,* E *l'ensemble des familles orthogonales* $(e_i)_{i \in I}$ *d'idempotents* $e_i \neq 0$ *de* A, *telles que* $\sum_{i \in I} e_i = 1$. *Pour tout* $(e_i)_{i \in I} \in E$, *posons* $\varpi((e_i)_{i \in I}) = (V(A(1 - e_i)))_{i \in I}$, $\sigma((e_i)_{i \in I}) = (Ae_i)_{i \in I}$. *Alors* ϖ *est une bijection de* E *sur l'ensemble* P *des partitions* $(U_i)_{i \in I}$ *de* $X = \operatorname{Spec}(A)$ *en ensembles ouverts, et* σ *est une bijection de* E *sur l'ensemble* S *des familles* $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ *d'idéaux* $\neq 0$ *de* A *telles que* A *soit somme directe des* $\mathfrak{a}_i$.

Soit $(e_i)_{i \in I}$ un élément de E et posons $Y_i = V(A(1 - e_i))$; si $i \neq j$, on a $1 = 1 - e_i + e_i(1 - e_j) \in A(1 - e_i) + A(1 - e_j)$, d'où $Y_i \cap Y_j = \varnothing$ (formules (1) et (2)). D'autre part,

$$\bigcup_{i \in I} Y_i = V(\prod_{i \in I} A(1 - e_i)) \text{ (formule (3))} ;$$

par hypothèse $\prod_{i \in I} (1 - e_i) = 1 - \sum_{i \in I} e_i = 0$, d'où $\bigcup_{i \in I} Y_i = X$ (formule (1)). Comme les Y_i sont fermés, ils sont aussi ouverts, d'où $\varpi(E) \subset P$. Par ailleurs, on a évidemment $A = \sum_{i \in I} Ae_i$; si $0 = \sum_{i \in I} a_i e_i$

avec $a_i \in \mathrm{A}$, on en tire, par multiplication par e_i, $0 = a_i e_i^2 = a_i e_i$ pour tout i ; ceci prouve que $\sigma(\mathrm{E}) \subset \mathrm{S}$.

Lemme 2. — *Si e, f sont deux idempotents de* A *tels que* $\mathrm{A}e$ *et* $\mathrm{A}f$ *aient même racine, on a* $e = f$.

En effet, il existe par hypothèse des entiers $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ tels que $e = e^m \in \mathrm{A}f$ et $f = f^n \in \mathrm{A}e$; soient x, y des éléments de A tels que $e = xf$, $f = ye$; on a $ef = xf^2 = xf = e$ et de même $ef = ye^2 = ye = f$, d'où $e = f$.

Le lemme 2 et le cor. 2 de la prop. 11 montrent que les applications ϖ et σ sont *injectives*.

Montrons que σ est surjective. Si $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ est un élément de S, il y a des éléments $e_\iota \in \mathfrak{a}_\iota$ tels que $1 = \sum_{\iota \in \mathrm{I}} e_\iota$; si $i \neq j$, on a $e_i e_j \in \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$, d'où $e_i = \sum_{j \in \mathrm{I}} e_i e_j = e_i^2$; enfin, on a $\mathrm{A}e_\iota \subset \mathfrak{a}_\iota$ pour tout $\iota \in \mathrm{I}$ et $\sum_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{A}e_\iota = \mathrm{A}$, d'où $\mathrm{A}e_\iota = \mathfrak{a}_\iota$.

Reste enfin à montrer que ϖ est surjective. Soit $(\mathrm{U}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ un élément de P et posons $\mathrm{Z}_\iota = \complement \mathrm{U}_\iota = \bigcup_{j \neq \iota} \mathrm{U}_j$; comme U_ι et Z_ι sont fermés, il existe des idéaux $\mathfrak{a}_\iota$, $\mathfrak{b}_\iota$ de A tels que $\mathrm{U}_\iota = \mathrm{V}(\mathfrak{a}_\iota)$, $\mathrm{Z}_\iota = \mathrm{V}(\mathfrak{b}_\iota)$. On va montrer qu'on peut de plus supposer que $\mathfrak{a}_\iota \cap \mathfrak{b}_\iota = 0$. On a $\mathrm{U}_\iota \cap \mathrm{Z}_\iota = \varnothing$, d'où $\mathfrak{a}_\iota + \mathfrak{b}_\iota = \mathrm{A}$; soient $a_\iota \in \mathfrak{a}_\iota$, $b_\iota \in \mathfrak{b}_\iota$ tels que $a_\iota + b_\iota = 1$. On a $\mathrm{X} = \mathrm{U}_\iota \cup \mathrm{Z}_\iota = \mathrm{V}(\mathfrak{a}_\iota \mathfrak{b}_\iota)$ (formule (3)) ; tout élément de $\mathfrak{a}_\iota \mathfrak{b}_\iota$ est donc nilpotent (cor. 2 de la prop. 11) ; soit p un entier tel que $a_\iota^p b_\iota^p = 0$. On a $\mathrm{U}_\iota \subset \mathrm{V}(\mathrm{A}a_\iota) = \mathrm{V}(\mathrm{A}a_\iota^p)$, $\mathrm{Z}_\iota \subset \mathrm{V}(\mathrm{A}b_\iota) = \mathrm{V}(\mathrm{A}b_\iota^p)$ et $\mathrm{V}(\mathrm{A}a_\iota) \cap \mathrm{V}(\mathrm{A}b_\iota) = \mathrm{V}(\mathrm{A}a_\iota + \mathrm{A}b_\iota) = \varnothing$, donc $\mathrm{U}_\iota = \mathrm{V}(\mathrm{A}a_\iota^p)$ et $\mathrm{Z}_\iota = \mathrm{V}(\mathrm{A}b_\iota^p)$, ce qui établit notre assertion en remplaçant $\mathfrak{a}_\iota$ par $\mathrm{A}a_\iota^p$ et $\mathfrak{b}_\iota$ par $\mathrm{A}b_\iota^p$. Les idéaux $\mathfrak{a}_\iota$ et $\mathfrak{b}_\iota$ étant ainsi choisis, il résulte de ce que σ est bijective qu'il existe deux idempotents $f_\iota \in \mathfrak{a}_\iota$, $e_\iota \in \mathfrak{b}_\iota$ tels que $1 = e_\iota + f_\iota$, $e_\iota f_\iota = 0$, $\mathfrak{a}_\iota = \mathrm{A}f_\iota$, $\mathfrak{b}_\iota = \mathrm{A}e_\iota$. Si $\iota \neq j$, on a $\mathrm{X} = \mathrm{Z}_\iota \cup \mathrm{Z}_j = \mathrm{V}(\mathrm{A}e_\iota e_j)$, et comme $e_\iota e_j$ est un idempotent, le lemme 2 montre que $e_\iota e_j = 0$. Enfin $e = \sum_{\iota \in \mathrm{I}} e_\iota$ est idempotent et on a $e_\iota \in \mathrm{A}e$ pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, d'où $\mathrm{V}(\mathrm{A}e) \subset \mathrm{Z}_\iota$ pour tout ι ; il en résulte que $\mathrm{V}(\mathrm{A}e) = \varnothing = \mathrm{V}(\mathrm{A}.1)$ et le lemme 2 montre encore que $e = 1$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. — *Soient* A *un anneau*, $\mathfrak{r}$ *un nilidéal de* A, $h : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathfrak{r}$ *l'homomorphisme canonique. Pour toute famille orthogonale finie* $(e'_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *d'idempotents de* $\mathrm{A}/\mathfrak{r}$, *telle que* $\sum_{i \in \mathrm{I}} e'_i = 1$, *il existe une famille orthogonale finie* $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *d'idempotents de* A *telle que* $\sum_{i \in \mathrm{I}} e_i = 1$ *et* $h(e_i) = e'_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$.

Posons $\mathrm{A}' = \mathrm{A}/\mathfrak{r}$. On sait (*Remarque* suivant la prop. 13) que

$$^a h : \mathrm{Spec}(\mathrm{A}') \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$$

est un homéomorphisme bijectif, tout idéal premier de A contenant $\mathfrak{r}$ par hypothèse. La prop. 15 montre qu'il existe dans A une famille orthogonale finie $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'idempotents telle que $\sum_{i \in \mathrm{I}} e_i = 1$ et que l'image par $^a h$ de $\mathrm{V}(\mathrm{A}'(1 - e'_i))$ soit $\mathrm{V}(\mathrm{A}(1 - e_i))$. Mais il est clair que $\mathrm{V}(\mathrm{A}(1 - e_i))$ est aussi l'image par $^a h$ de $\mathrm{V}(\mathrm{A}'(1 - h(e_i)))$; comme $1 - e'_i$ et $1 - h(e_i)$ sont des idempotents, le lemme 2 montre que $e'_i = h(e_i)$, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2. — *Pour que le spectre premier* $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *d'un anneau* A *soit connexe, il faut et il suffit qu'il n'existe dans* A *aucun idempotent autre que* 0 *et* 1.

Dire en effet que X n'est pas connexe signifie qu'il existe dans X un ensemble ouvert et fermé distinct de $\emptyset$ et de X.

4. Support d'un module

DÉFINITION 5. — *Soient* A *un anneau*, M *un* A-*module. On appelle support de* M, *et on note* Supp(M), *l'ensemble des idéaux premiers* $\mathfrak{p}$ *de* A *tels que* $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}} \neq 0$.

Comme tout idéal maximal de A est premier, il résulte aussitôt du § 3, nº 3, cor. 2 du th. 1, que, pour qu'un A-module M soit réduit à 0, *il faut et il suffit que* $\mathrm{Supp}(\mathrm{M}) = \emptyset$.

Exemple. — Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A ; avec les notations du nº 3, on a

$$\mathrm{V}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Supp}(\mathrm{A}/\mathfrak{a}). \tag{9}$$

En effet, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A tel que $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, on sait que $(\mathrm{A}/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} = 0$ (§ 3, nº 1, *Remarque* 3) ; si au contraire $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$ est

Extraits de

Bourbaki - Algèbre - Chapitres 5 à 7

E) *La notion de spectre*. La dernière en date des notions nouvelles de l'Algèbre commutative a une histoire complexe. Le théorème spectral de Hilbert introduisait des ensembles ordonnés de projecteurs orthogonaux d'un espace hilbertien, formant une «algèbre booléienne» (ou mieux un *réseau booléien*)(*), en correspondance biunivoque avec un réseau booléien de classes de parties mesurables (pour une mesure convenable) de **R**. Ce sont sans doute ses travaux antérieurs sur les opérateurs dans les espaces hilbertiens qui, vers 1935, amènent M. H. Stone à étudier de façon générale les réseaux booléiens, et notamment à en chercher des « représentations » par des parties d'un ensemble (ou des classes de parties pour une certaine relation d'équivalence). Il observe qu'un réseau booléien devient un *anneau commutatif* (d'un type très spécial d'ailleurs), lorsqu'on y définit la multiplication par $xy = \inf(x, y)$ et l'addition par $x + y = \sup(\inf(x, y'), \inf(x', y))$. Dans le cas particulier où l'on part du réseau booléien $\mathfrak{P}(X)$ de toutes les parties d'un ensemble *fini* X, on voit aussitôt que les éléments de X sont en correspondance

(*) Un *réseau booléien* est un ensemble ordonné réticulé E, ayant un plus petit élément α et un plus grand élément ω, où chacune des lois sup et inf est *distributive* par rapport à l'autre et où, pour tout $a \in E$, il existe un $a' \in E$ et un seul tel que $\inf(a, a') = \alpha$ et $\sup(a, a') = \omega$ (cf. *Ens.*, chap. III, 2ᵉ éd., § 1, exerc. 17).

biunivoque naturelle avec les *idéaux maximaux* de l'anneau «booléien» correspondant ; et Stone obtient précisement son théorème général de représentation d'un réseau booléien en considérant de même l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau correspondant, et en associant à tout élément du réseau booléien l'ensemble des idéaux maximaux qui le contiennent (XXX *a*)).

D'autre part, on connaissait, comme exemple classique de réseau booléien, l'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace topologique. Dans un second travail (XXX *b*)), Stone montra qu'en fait *tout* réseau booléien est aussi isomorphe à un réseau booléien de cette nature. Il fallait naturellement pour cela définir une *topologie* sur l'ensemble des idéaux maximaux d'un anneau « booléien » ; ce qui se fait très simplement en prenant pour ensembles fermés, pour chaque idéal $\mathfrak{a}$, l'ensemble des idéaux maximaux contenant $\mathfrak{a}$.

Nous n'avons pas à parler ici de l'influence de ces idées en Analyse fonctionnelle, où elles jouèrent un rôle important dans la naissance de la théorie des algèbres normées développée par I. Gelfand et son école. Mais en 1945, Jacobson observe (XXXIV) que le procédé de définition d'une topologie, imaginé par Stone, peut en fait s'appliquer à *tout* anneau A (commutatif ou non) pourvu que l'on prenne comme ensemble d'idéaux non pas l'ensemble des idéaux maximaux, mais l'ensemble des idéaux « primitifs » bilatères (i.e. les idéaux bilatères $\mathfrak{b}$ tels que $A/\mathfrak{b}$ soit un anneau primitif) ; pour un anneau commutatif, on retrouve bien entendu les idéaux maximaux. De son côté, Zariski, en 1944 (XXXIII *a*)), utilise une méthode analogue pour définir une topologie sur l'ensemble des *places* d'un corps de fonctions algébriques. Toutefois, ces topologies restaient pour la plupart des algébristes de simples curiosités, en raison du fait qu'elles sont d'ordinaire non séparées, et qu'on éprouvait une répugnance assez compréhensible à travailler sur des objets aussi insolites. Cette méfiance ne fut dissipée que lorsque A. Weil montra, en 1952, que toute variété algébrique peut être munie de façon naturelle d'une topologie du type précédent et que cette topologie permet de définir, en parfaite analogie avec le cas des variétés différentiables ou analytiques, la notion d'*espace fibré* (XXXVII) ; peu après, Serre eut l'idée d'étendre à ces variétés ainsi topologisées la théorie des *faisceaux cohérents*, grâce à laquelle la topologie rend dans le cas des variétés « abstraites » les mêmes services que la topologie usuelle lorsque le corps de base est **C**, notamment en ce qui concerne l'application des méthodes de la Topologie algébrique (XXXVIII *a*) et *b*)).

Dès lors il était naturel d'utiliser ce langage géométrique dans toute l'Algèbre commutative. On s'est rapidement aperçu que la considération des idéaux maximaux est d'ordinaire insuffisante pour obtenir des énoncés commodes(*), et que la notion adéquate est celle de l'ensemble

(*) L'inconvénient de se borner au « spectre maximal » provient de ce que, si $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux et $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de B, $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{n})$ n'est pas nécessairement un idéal maximal de A, alors que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de B, $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{p})$ est un idéal premier de A. On ne peut donc en général associer à φ de façon naturelle une application de l'ensemble des idéaux maximaux de B dans l'ensemble des idéaux maximaux de A.

des idéaux *premiers* de l'anneau, topologisé de la même manière. Avec l'introduction de la notion de spectre, on dispose maintenant d'un dictionnaire permettant d'exprimer tout théorème d'Algèbre commutative dans un langage géométrique très proche de celui de la Géométrie algébrique de l'époque Weil-Zariski ; ce qui d'ailleurs a amené aussitôt à élargir considérablement le cadre de cette dernière, de sorte que l'Algèbre commutative n'en est plus guère, de ce point de vue, que la partie la plus élémentaire (XXXIX).

systems including some properties of Hilbert numbers, *Math. Ann.*, t. LXXIV (1913), p. 66–121.

(XXII) J. Kürschak, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, *J. de Crelle*, t. CXLII (1913), p. 211–253.

(XXIII) A. Fraenkel, Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen, *J. de Crelle*, t. CXLV (1914), p. 139–176.

(XXIV) A. Ostrowski, Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x\,.\,y)$, *Acta Math.*, t. XLI (1917), p. 271–284.

(XXV) E. Noether: *a*) Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Ann.*, t. LXXXIII (1921), p. 24–66; *b*) Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, *Math. Ann.*, t. XCVI (1927), p. 26–61.

(XXVI) H. Hasse: *a*) Ueber die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratischen Formen im Körper der rationalen Zahlen, *J. de Crelle*, t. CLII (1923), p. 129–148; *b*) Ueber die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen, *J. de Crelle*, t. CLII (1923), p. 205–224; *c*) Kurt Hensels entscheidender Anstoss zur Entdeckung des Lokal-Global-Prinzips, *J. de Crelle*, t. CCIX (1960), p. 3–4.

(XXVII) H. Jung, *Algebraischen Flächen*, Hannover (Helwing), 1925.

(XXVIII) H. Grell, Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, *Math. Ann.*, t. XCVII (1927), p. 490–523.

(XXIX) W. Krull: *a*) Primidealketten in allgemeine Ringbereichen, *Sitz. Ber. Heidelberg Akad. Wiss.*, 1928; *b*) Allgemeine Bewertungstheorie, *J. de Crelle*, t. CLXVII (1931), p. 160–196; *c*) Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, III, *Math. Zeitschr.*, t. XLII (1937), p. 745–766; *d*) Dimensionstheorie in Stellenringen, *J. de Crelle*, t. CLXXIX (1938), p. 204–226; *e*) *Idealtheorie*, Berlin (Springer), 1935.

(XXX) M. H. Stone: *a*) The theory of representation for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XL (1936), p. 37–111; *b*) Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XLI (1937), p. 375–481.

(XXXI) B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, t. II, Berlin (Springer), 1931.

(XXXII) C. Chevalley: *a*) Généralisation de la théorie du corps de classes pour les extensions infinies, *J. de Math.*, (9), t. XV (1936), p. 359–371; *b*) On the theory of local rings, *Ann. of Math.*, t. XLIV (1943), p. 690–708.

(XXXIII) O. Zariski: *a*) The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. L (1944), p. 683–691; *b*) Generalized semi-local rings, *Summa Bras. Math.*, t. I (1946), p. 169–195.

(XXXIV) N. Jacobson, A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, t. XXXI (1945), p. 333–338.

(XXXV) I. Cohen–A. Seidenberg, Prime ideals and integral dependence, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. LII (1946), p. 252–261.

(XXXVI) P. Samuel, La notion de multiplicité en Algèbre et en Géométrie algébrique, *J. de Math.*, (9), t. XXX (1951), p. 159–274.

(XXXVII) A. Weil, *Fibre-spaces in Algebraic Geometry* (Notes by A. Wallace), Chicago Univ., 1952.

(XXXVIII) J. P. Serre: *a*) Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.*, t. LXI (1955), p. 197–278; *b*) Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, t. VI (1956), p. 1–42.

(XXXIX) A. Grothendieck, *Eléments de géométrie algébrique*, Publ. math. Inst. Htes. Et. Scient., 1960.

Représenter les algèbres booléennes
Les 70 théorèmes de l'article de M. H. Stone
"La théorie des représentations pour les algèbres booléennes"

Définition 1. Un anneau dans lequel tout élément est idempotent, i.e. tel que $aa = a$, est appelé un anneau booléen.

Théorème 1. Un anneau booléen est nécessairement commutatif ; il obéit aux deux lois équivalentes $a + a = 0$, $a = -a$; et il contient nécessairement des diviseurs de 0 s'il contient plus de 2 éléments. Tout anneau booléen A peut être projeté dans un anneau booléen B qui a un élément unité de telle manière que B est unique au sens suivant : si C est un anneau booléen à unité contenant A, alors C contient aussi un anneau booléen B^* isomorphe à B et contenant A. Un anneau booléen fini possède nécessairement une unité et a un cardinal qui est une puissance de 2.

Théorème 2. Si A est un anneau booléen d'unité e, l'introduction d'une opération binaire $\vee$ et d'une opération unaire $'$ par les équations
(1) $a \vee b = a + b + ab$, (2) $a' = a + e$
convertit A en un système algébrique B dans lequel
(4.3) $a \vee b = b \vee a$, (4.4) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$,
(4.6) $(a' \vee b')' \vee (a' \vee b)' = a$,
les anciennes opérations étant exprimées en fonction des nouvelles par les équations
(6) $a + b = ab' \vee a'b = (a' \vee b'')' \vee (a'' \vee b')'$,
(7) $ab = (a' \vee b')'$.
D'un autre côté, si B est un système algébrique obéissant aux lois (4.3), (4.4) et (4.6), alors B est une algèbre booléenne ; et l'introduction de nouvelles opérations par les équations (6) et (7) convertit B en l'anneau booléen A avec comme unité $e = a \vee a'$ et comme zéro $0 = e' = (a \vee a')'$, les anciennes opérations étant exprimées en termes des nouvelles par les équations (1) et (2) ci-dessus.

Théorème 3. Si A est un anneau booléen avec unité e, alors le remplacement de l'opération $+$ par une nouvelle opération $\vee$ définie par la relation
(1) $a \vee b = a + b + ab$
convertit A en un système B avec les propriétés
(1_1) $a \vee b = b \vee a$
(3_1) $a(b \vee c) = ab \vee ac$; (3_2) $(a \vee b)c = ac \vee bc$;
(4_1) il existe un élément 0 tel que $a \vee 0 = a$ pour tout a ;
(5) S'il existe un élément 0 avec la propriété (4_1), alors il existe au moins un tel élément 0 auquel correspond un élément fixe e tel que les équations $x \vee a = e, xa = 0$ ont une solution pour tout élément a ;

Présenté à la Société (en partie), 25 Février 1933 ; voir résumé 39-3-86. Reçu par les éditeurs le 10 Octobre 1935.

(6_1) $a \vee a = a$; (6_2) $aa = a$;
où l'ancienne opération $+$ est définie en fonction de la nouvelle par la relation
(7) $a + b$ est une solution, nécessairement unique, des deux équations simultanées $x \vee ab = a \vee b, x(ab) = 0$.
Inversement, si B est un système avec les propriétés dénotées $(1_1) - (6_2)$, le remplacement de l'opération $\vee$ par la nouvelle opération $+$ définie par la relation (7) convertit B en un anneau booléen A avec les éléments 0 et e de (4_1) et (5) comme son zéro et son élément unité respectivement, l'ancienne opération $\vee$ étant exprimée en termes de la nouvelle par la relation (1).

Théorème 4. Si A est un anneau booléen, que ce soit avec ou sans unité, le remplacement de l'opération $+$ par l'opération $\vee$ définie par la relation
(1) $a \vee b = a + b + ab$
convertit A en un système B vérifiant les propriétés
(1_1) $a \vee b = b \vee a$;
(2_2) $a(bc) = (ab)c$;
(3_1) $a(b \vee c) = ab \vee ac$;
(4_1) il existe un élément 0 tel que $a \vee 0 = a$ pour tout a ;
(5_1) si $ba = a$, il existe un élément 0 avec la propriété (4_1), indépendant de a et b, tel que les équations $x \vee a = b, xa = 0$ ont une solution ;
(5_2) si $ab = a$, il existe un élément 0 avec la propriété (4_1), indépendant de a et b, tel que les équations $x \vee a = b, ax = 0$ ont une solution ;
(6_1) $a \vee a = a$; (6_2) $aa = a$;
où la vieille opération $+$ est définie en fonction de la nouvelle par la relation
(7) $a + b$ est une solution, nécessairement unique, des équations simultanées
$x \vee ab = a \vee b, x(ab) = 0$.
Inversement, si B est un système avec les propriétés indiquées $(1_1) - (6_2)$, le remplacement de l'opération $\vee$ définie par la relation (7) convertit B en un anneau booléen A avec l'élément 0 de (4_1) comme son élément zéro, l'ancienne opération $\vee$ étant exprimée en fonction de la nouvelle par la relation (1).

Définition 2. Dans un anneau booléen A, l'élément a est dit inférieur ou contenu dans l'élément b, noté $a < b$, et l'élément b est dit supérieur ou contenant l'élément a, noté $b > a$, à chaque fois que l'une des relations équivalentes suivantes

$$ab = a, \qquad a \vee b = b, \qquad ab' = 0, \qquad a' \vee b = e$$

est satisfaite, les deux dernières n'ayant du sens que si et seulement si A a une unité e.

Théorème 5. La relation $<$ de la Définition 2 obéit aux règles :
(1) $a < b$ et $b < c$ implique $a < c$;
(2) $0 < a$ pour tout a et $a < e$ pour tout a quand l'anneau booléen A a une unité e ;
(3) $a < c$ et $b < d$ implique $ab < cd$, $a \vee b < c \vee d$;

(4) $bc = 0$ implique $ac = 0$ si et seulement si $a < b$.

Définition 3. Un élément non nul a d'un anneau booléen A est dit atomique s'il a l'une des propriétés équivalentes suivantes :
(1) $a > b$ implique $b = a$ ou $b = 0$;
(2) $ab = 0$ ou $ab = a$ pour tout b.

Définition 4. Une classe $\mathfrak{s}$ d'éléments atomiques est dite base atomique si tout élément non nul est la somme d'éléments de $\mathfrak{s}$.

Définition 5. Une classe $\mathfrak{s}$ d'éléments atomiques est dite système atomique complet si $b = 0$ est le seul élément tel que $ba = 0$ pour tout a dans $\mathfrak{s}$.

Théorème 6. Si a et b sont des éléments atomiques, alors $a = b$ ou $ab = 0$.

Théorème 7. Un système complet atomique dans un anneau booléen A contient tout élément atomique de A.

Théorème 8. Si A est un anneau booléen, $\mathfrak{s}$ un système complet atomique dans A, et $\mathfrak{s}(b)$ est la classe de tous les éléments atomiques a dans $\mathfrak{s}$ tels que $ab \neq 0$, alors A est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{N}$ de toutes les classes $\mathfrak{s}(b)$ selon la correspondance $b \longleftrightarrow \mathfrak{s}(b)$ en accord avec les propriétés :
(1) $\mathfrak{s}(b) = \mathfrak{s}(c)$ si et seulement si $b = c$;
(2) $\mathfrak{s}(b + c) = \mathfrak{s}(b)\Delta\mathfrak{s}(c)$;
(3) $\mathfrak{s}(bc) = \mathfrak{s}(b)\mathfrak{s}(c)$;
(4) $\mathfrak{s}(b \vee c) = \mathfrak{s}(b) \cup \mathfrak{s}(c)$. [1]

Théorème 9. Une base atomique $\mathfrak{s}$ est un système complet atomique.

Théorème 10. La représentation d'un élément b comme somme d'éléments d'un système atomique complet $\mathfrak{s}$ est unique : les sommants sont précisément les éléments de la classe $\mathfrak{s}(b), b \neq 0$.

Théorème 11. Pour qu'un anneau booléen A contienne une base atomique $\mathfrak{s}$, il est nécessaire et suffisant que A soit isomorphe à l'algèbre de toutes les sous-classes finies d'une classe finie ou infinie Σ, les éléments de $\mathfrak{s}$ étant en correspondance biunivoque avec ceux de Σ. En particulier, un tel anneau A a une unité si et seulement si les

1. Ici, comme partout dans cette note, nous utilisons les symboles $\cup$ et Δ pour désigner l'union et l'union (modulo 2), ou la différence symétrique, pour les classes ; et nous indiquons la formation de l'intersection par juxtaposition des symboles pour les classes affectées.

classes $\mathfrak{s}$ et Σ sont finies.

Théorème 12. Un anneau booléen fini avec au moins deux éléments contient une base atomique $\mathfrak{s}$ et est ainsi isomorphe à l'algèbre de toutes les sous-classes d'une classe finie Σ en correspondance biunivoque avec $\mathfrak{s}$.

Théorème 13. Un anneau booléen fini avec exactement un élément est isomorphe à l'algèbre consistant en la classe vide.

Théorème 14. Pour que le sous-anneau $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ engendré par une sous-classe non-vide $\mathfrak{s}$ d'un anneau booléen A possède une unité, il est nécessaire et suffisant que $\mathfrak{s}$ contienne des éléments $a_1, \ldots, a_n$ tels que $b < a_1 \vee \ldots \vee a_n$ pour tout élément b dans $\mathfrak{s}$. Quand cette condition est satisfaite, l'élément $a = a_1 \vee \ldots \vee a_n$ est l'unité de $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$; et $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est la classe de tous les éléments qui peuvent être construits comme des polynômes fonctions des éléments b et $a + b$, où b est dans $\mathfrak{s}$, et avec les opérations $\vee$ et . comme seules opérations. En particulier, si A a une unité e et $\mathfrak{s}$ contient e, alors $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est la classe de tous les éléments qui peuvent être construits comme des polynômes fonctions des éléments b et $b' = b + e$, où b est dans $\mathfrak{s}$, et avec les opérations $\vee$ et . comme seules opérations.

Théorème 15. Si A est un anneau booléen alors la classe $\mathfrak{U}$ de tous les sous-anneaux de A a les propriétés suivantes pour les opérations d'addition et de multiplication définies précédemment :

(1) $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \vee \mathfrak{a}$; (2) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$;
(3) $\mathfrak{a} \vee (\mathfrak{b} \vee \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}) \vee \mathfrak{c}$ (4) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$;
(5) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} \vee \mathfrak{c}) \supset \mathfrak{a}\mathfrak{b} \vee \mathfrak{a}\mathfrak{c}$; (6) $(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{c}) \supset \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}\mathfrak{c}$;
(7) $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$; (8) $\mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$;
(9) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ si et seulement si $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$;
(10) si $\mathcal{B}$ est une classe non vide de classes non vides $\mathfrak{B}$ de sous-anneaux $\mathfrak{a}$ de A et si $\mathfrak{S}$ est l'union $\sum_{\mathfrak{B} \in \mathcal{B}} \mathfrak{B}$ alors

$$S_{\mathfrak{B} \in \mathcal{B}}(S_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{a}) = S_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}} \mathfrak{a};$$

(11) si $\mathcal{B}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{S}$ ont la même signification qu'en 10, alors

$$P_{\mathfrak{B} \in \mathcal{B}}(P_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{a}) = P_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}} \mathfrak{a};$$

(12) si $\mathfrak{b}$ est n'importe quel sous-anneau de A et $\mathfrak{B}$ est n'importe quelle classe non vide de sous-anneaux $\mathfrak{a}$ de A alors

$$\mathfrak{b}(S_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{a}) \supset S_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}}(\mathfrak{b}\mathfrak{a});$$

(13) if $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{B}$ ont la même signification qu'en (12), alors :

$$P_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}}(\mathfrak{b} \vee \mathfrak{a}) \supset \mathfrak{b} \vee P_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{a}.$$

Les sous-anneaux spéciaux $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{e}$ ont les propriétés suivantes :
(14) $\mathfrak{o}\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$, $\quad \mathfrak{a} \vee \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$;
(15) $\mathfrak{e}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $\quad \mathfrak{a} \vee \mathfrak{e} = \mathfrak{e}$.

Théorème 16. Pour qu'une sous-classe non vide $\mathfrak{a}$ d'un anneau booléen A soit un idéal, il est nécessaire et suffisant que
(1) $\mathfrak{a}$ contienne $a \vee b$ avec a et b,
(2) $\mathfrak{a}$ contienne ab à chaque fois qu'elle contient a
ou, de façon équivalente, que
(1) $\mathfrak{a}$ contienne $a \vee b$ avec a et b,
(2') $\mathfrak{a}$ contienne c avec a à chaque fois que $c < a$.

Théorème 17. Si $\mathfrak{s}$ est une sous-classe arbitraire non-vide d'un anneau booléen A et si $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est la classe de tous les éléments a tels que $a < a_1 \vee \ldots \vee a_n$ pour des éléments appropriés $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathfrak{s}$ alors $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est un idéal ; et tout idéal contenant $\mathfrak{s}$ contient $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$.
L'idéal $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ peut être caractérisé alternativement comme la classe de tous les éléments a tels que $a = a_1b_1 \vee \ldots \vee a_nb_n$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont dans $\mathfrak{s}$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont dans A. Si $\mathfrak{s}$ est l'union des idéaux $\mathfrak{a}$ dans une classe donnée $\mathfrak{B}$, alors $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est la classe de tous les éléments a tels que $a = a_1 \vee \ldots \vee a_n$ où a_k est dans $\mathfrak{a}_k$ et $\mathfrak{a}_k$ est dans $\mathfrak{B}$ pour $k = 1, \ldots, n$.

Théorème 18. Dans un anneau booléen A, les sous-anneaux obtenus comme sommes ou produits d'idéaux sont eux-mêmes des idéaux ; en d'autres mots, la classe $\mathfrak{I}$ de tous les idéaux dans A est un sous-système du système $\mathfrak{U}$ selon les opérations non restreintes d'addition et de multiplication. Les propriétés de ces opérations qui sont respectées dans $\mathfrak{U}$ sont aussi respectées dans $\mathfrak{I}$, avec la correction que les propriétés (5), (6), et (12) du théorème (15) doivent être remplacées respectivement par les propriétés correspondantes :
(5) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} \vee \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \vee \mathfrak{a}\mathfrak{c}$; $\qquad$ (6)$(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}\mathfrak{c}$;
(12) si $\mathfrak{b}$ est un idéal et $\mathfrak{B}$ est une classe non vide d'idéaux $\mathfrak{a}$, alors

$$\mathfrak{b}S_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a} = S_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{b}\mathfrak{a}$$

L'idéal $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux, est la classe des éléments c où $c = ab$, a dans $\mathfrak{a}$ et b dans $\mathfrak{b}$. L'idéal $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ du Théorème 17 est le produit de tous les idéaux contenant $\mathfrak{s}$; et dans le cas particulier où $\mathfrak{s}$ est une union de classes d'idéaux, $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est la somme des idéaux de cette classe.

Définition 6. Deux éléments a et b dans un anneau booléen sont dit orthogonaux si $ab = 0$; et deux sous-classes non vides d'un anneau booléen sont dites orthogonales si tout élément de l'une est orthogonal à tout élément de l'autre.

THÉORÈME 19. Si $\mathfrak{s}$ est n'importe quelle sous-classe non vide d'un anneau booléen A, alors la classe $\mathfrak{s}'$ de tous les éléments orthogonaux à chaque élément de $\mathfrak{s}$ est un idéal dans A qui est orthogonal à $\mathfrak{s}$ et qui contient toute sous-classe de A orthogonale à $\mathfrak{s}$. Deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0$.

DÉFINITION 7. L'idéal $\mathfrak{s}'$ associé à une sous-classe arbitraire non vide $\mathfrak{s}$ d'un anneau booléen A de la façon indiquée dans le théorème 19 est appelé le complémentaire orthogonal, ou plus brièvement l'ortho-complémentaire de $\mathfrak{s}$; et l'opération consistant à former l'idéal $\mathfrak{s}'$ est appelée la complémentation orthogonale, ou plus brièvement l'ortho-complémentation. L'ortho-complémentaire de $\mathfrak{s}'$ est noté $\mathfrak{s}''$, celui de $\mathfrak{s}''$ est noté $\mathfrak{s}'''$; et plus généralement, le symbole $\mathfrak{s}^{(\mathfrak{n})}$ est défini récursivement pour $n \geq 1$ par les relations $\mathfrak{s}^{(1)} = s', \mathfrak{s}^{(\mathfrak{n}+1)} = (\mathfrak{s}^{(\mathfrak{n})})'$.

THÉORÈME 20. L'opération d'ortho-complémentation a les propriétés générales suivantes :
(1) $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{t}$ implique $\mathfrak{s}' \supset \mathfrak{t}'$;
(2) $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{a}(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{s}''$, où $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est l'idéal engendré par $\mathfrak{s}$;
(3) $\mathfrak{s}^{(m)} = \mathfrak{s}^{(n)}$ quand m et n sont congrus (mod 2), $\mathfrak{s}^{(m)}\mathfrak{s}^{(n)} = 0$ quand m et n ne sont pas congrus (mod 2) ; en particulier, $\mathfrak{s}''' = \mathfrak{s}'$.

THÉORÈME 21. Dans la classe $\mathfrak{I}$ de tous les idéaux dans un anneau booléen A, l'opération d'ortho-complémentation a les propriétés spécifiques suivantes :
(1) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}''$; (2) $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = \mathfrak{o}$; (3) $\mathfrak{o}' = \mathfrak{e}, \mathfrak{e}' = \mathfrak{o}$;
(4) l'ortho-complémentaire d'une somme est égal au produit des ortho-complémentaires de ses sommants ; en particulier, $(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b})' = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$;
(5) l'ortho-complémentaire d'un produit contient la somme des ortho-complémentaires de ses termes ; en particulier, $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})' \supset \mathfrak{a}' \vee \mathfrak{b}'$.

THÉORÈME 22. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux dans un anneau booléen A, l'ortho-complémentaire $\mathfrak{c}$ de l'idéal $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ est le sous-anneau $\mathfrak{b}$ satisfaisant la relation $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}$.

DÉFINITION 8. Dans un anneau booléen A, un idéal est dit être :
(1) principal si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(a)$ pour un élément a ;
(2) semi-principal si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(a)$ ou $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'(a)$ pour un élément a ;
(3) simple si $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{a}' = \mathfrak{e}$; (4) normal si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}''$.
Les classes des idéaux principal, semi-principal, simple et normal sont notées par les lettres $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^*, \mathfrak{S}$ et $\mathfrak{N}$ respectivement.

THÉORÈME 23. Les classes définies dans la Définition 8 satisfont les relations d'inclusion suivantes : (1) $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}^* \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{I}$
(2) $\mathfrak{P}$ contient $\mathfrak{o}$; (3) $\mathfrak{P}^*$ contient $\mathfrak{e}$.

Théorème 24. La relation $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{S}$ implique la relation $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{N}$; en particulier, si l'idéal $\mathfrak{a}$ n'est pas simple, l'idéal $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{a}'$ n'est pas normal. Par conséquent, la relation $\mathfrak{I} = \mathfrak{N}$ implique la relation $\mathfrak{I} = \mathfrak{S}$.

Théorème 25. La relation $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^*$ implique la relation $\mathfrak{P} = \mathfrak{S}$ et par conséquent également la relation $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{S}$. En fait, les assertions suivantes concernant un anneau booléen A sont équivalentes :
(1) $\mathfrak{P} = \mathfrak{S}$; (2) $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^*$;
(3) il existe un idéal $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont dans $\mathfrak{P}$;
(4) l'anneau booléen A a une unité e[2].

Théorème 26. Pour qu'un idéal $\mathfrak{a}$ dans un anneau booléen A soit simple, il est nécessaire et suffisant que le produit $\mathfrak{a}\mathfrak{a}(a)$ soit un idéal principal pour tout élément a dans A.

Théorème 27. Les assertions suivantes concernant un idéal $\mathfrak{a}$ dans un anneau booléen A sont équivalentes :
(1) $\mathfrak{a}$ est un idéal normal ;
(2) $\mathfrak{a}$ est l'ortho-complémentaire d'un idéal dans A ;
(3) $\mathfrak{a}$ est le produit d'idéaux semi-principaux.
En général, si $\mathfrak{a}$ est un idéal arbitraire, alors $\mathfrak{a}''$ est le produit de tous les diviseurs idéaux semi-principaux de $\mathfrak{a}$; et, en particulier, un idéal normal est le produit de tous ses diviseurs idéaux semi-principaux. Dans le cas d'un anneau booléen avec unité, le groupe de mots "idéal principal" doit être remplacé par "idéal semi-principal" dans les assertions précédentes.

Théorème 28. La relation dyadique C définie entre les éléments de la classe $\mathfrak{I}$ de tous les idéaux dans un anneau booléen A en posant $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ si $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$, est une relation de congruence dans le système algébrique constitué de la classe $\mathfrak{I}$ et des opérations d'addition non restreinte et de multiplication finie. Chaque classe d'éléments mutuellement congruents dans $\mathfrak{I}$ contient un et seulement un idéal normal comme élément, au sens suivant : si $\mathfrak{a}$ est n'importe quel idéal, alors $\mathfrak{a}''$ est un idéal normal tel que $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}''$; et, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux normaux tels que $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Le système algébrique $\mathfrak{I}^C$ consistant en la classe $\mathfrak{I}$ avec la congruence C comme relation fondamentale d'égalité et les opérations d'addition finie et de multiplication finie est une algèbre booléenne avec unité conformément au Théorème 3.

Définition 9. Si $\mathfrak{B}$ est une classe non-vide d'idéaux $\mathfrak{a}$, l'idéal $(S_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a})''$ est appelé la somme normalisée des idéaux $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{B}$ et est notée $S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}$; la somme normalisée d'idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ est notée par $\mathfrak{a}\nabla\mathfrak{b}$. L'opération consistant à calculer la somme nor-

2. Pourquoi ce e n'est-il pas gothique dans l'article original ?

malisée est appelée l'addition normalisée.

THÉORÈME 29. La somme normalisée et le produit d'idéaux normaux sont des idéaux normaux ; mais une somme finie d'idéaux normaux n'est pas nécessairement normale. La somme normalisée d'idéaux arbitraires est l'idéal normal le plus petit contenant tous les sommants. Dans la classe $\mathfrak{N}$ de tous les idéaux normaux, les opérations d'addition normalisée et de multiplication ont les propriétés suivantes :
(1) si $\mathcal{B}$ est une classe non vide de sous-classes non vides $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{N}$, alors

$$S''_{\mathfrak{B}\in\mathcal{B}}(S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}) = S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{C}}\mathfrak{a}$$

où $\mathfrak{C}$ est l'union $\sum\limits_{\mathfrak{B}\in\mathcal{B}}\mathfrak{B}$;
(2) Si $\mathcal{B}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ ont la même signification qu'en (1), alors

$$P_{\mathfrak{B}\in\mathcal{B}}(P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}) = P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{C}}\mathfrak{a};$$

(3) si $\mathfrak{b}$ est n'importe quel idéal normal et $\mathfrak{B}$ est n'importe quelle sous-classe non vide de $\mathfrak{N}$, alors

$$\mathfrak{b}(S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}) = S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{b}\mathfrak{a};$$

(4) si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{B}$ ont la même signification qu'en (3), alors

$$P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}(\mathfrak{b}\nabla\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}\nabla P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a};$$

(5) si $\mathfrak{B}$ est une sous-classe non vide de $\mathfrak{N}$, alors

$$(S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a})' = P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}';$$

(6) si $\mathfrak{B}$ a la même signification qu'en (5), alors

$$(P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a})' = S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}'.$$

Sous les opérations finies ∇ et . seuls, le système $\mathfrak{N}$ est une algèbre booléenne isomorphe au système $\mathfrak{I}^C$ du Théorème 28 en vertu de la correspondance $a \longleftrightarrow a''$. Cette algèbre a la propriété que ses idéaux normaux sont tous principaux.

THÉORÈME 30. La classe $\mathfrak{S}$ de tous les idéaux simples dans un anneau booléen A est un sous-anneau booléen, avec $\mathfrak{e}$ comme unité, des algèbres booléennes $\mathfrak{I}^C$ et $\mathfrak{N}$ des Théorèmes 28 et 29 respectivement. L'application des opérations d'addition finie, d'addition normalisée finie, de multiplication finie, et d'ortho-complémentation aux idéaux simples donne des idéaux simples ; en particulier, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux simples, $\mathfrak{a}\nabla\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$.

THÉORÈME 31. La classe $\mathfrak{P}$ de tous les idéaux principaux d'un anneau booléen A est un sous-anneau booléen de $\mathfrak{N}$ et un idéal dans $\mathfrak{S}$; elle est isomorphe à l'anneau

booléen A en accord avec les relations suivantes :
(1) $\mathfrak{a}(a) = \mathfrak{a}(b)$ si et seulement si $a = b$;
(2) $\mathfrak{a}(a+b) = \mathfrak{a}(a) + \mathfrak{a}(b) = \mathfrak{a}(a)\mathfrak{a}'(b) \vee \mathfrak{a}'(a)\mathfrak{a}(b)$;
(3) $\mathfrak{a}(a \vee b) = \mathfrak{a}(a) \vee \mathfrak{a}(b)$; (4) $\mathfrak{a}(ab) = \mathfrak{a}(a)\mathfrak{a}(b)$.
Si l'anneau booléen A a une unité e, alors $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{a}(a') = \mathfrak{a}'(a)$.

Théorème 32. La classe $\mathfrak{P}^*$ de tous les idéaux semi-principaux dans un anneau booléen A est un sous-anneau de $\mathfrak{S}$, avec $\mathfrak{e}$ comme unités, isolmorphe à l'anneau booléen B du Théorème 1 ; $\mathfrak{P}$ et A sont des idéaux dans $\mathfrak{P}^*$ et B respectivement. Les opérations $\vee$, ., + et ' dans le système $\mathfrak{S}$ s'appliquent aux éléments de $\mathfrak{P}^*$ à la manière indiquée par les règles suivantes :
(1_1) $\mathfrak{a}(a) \vee \mathfrak{a}(b) = \mathfrak{a}(a \vee b)$; (1_2) $\mathfrak{a}(a) \vee \mathfrak{a}'(b) = \mathfrak{a}'(b + ab)$
(1_3) $\mathfrak{a}'(a) \vee \mathfrak{a}'(b) = \mathfrak{a}'(ab)$;
(2_1) $\mathfrak{a}(a)\mathfrak{a}(b) = \mathfrak{a}(ab)$; (2_2) $\mathfrak{a}(a)\mathfrak{a}'(b) = \mathfrak{a}(a + ab)$
(2_3) $\mathfrak{a}'(a)\mathfrak{a}'(b) = \mathfrak{a}'(a \vee b)$;
(3_1) $\mathfrak{a}(a) + \mathfrak{a}(b) = \mathfrak{a}(a+b)$; (3_2) $\mathfrak{a}(a) + \mathfrak{a}'(b) = \mathfrak{a}'(a+b)$
(3_3) $\mathfrak{a}'(a) + \mathfrak{a}'(b) = \mathfrak{a}(a+b)$;
(4_1) $\mathfrak{a}'(a)$ est dans $\mathfrak{P}^*$; (4_2) $(\mathfrak{a}'(a))' = \mathfrak{a}(a)$
Dans le cas où $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}^*$, $\mathfrak{P}$ n'est pas un idéal normal dans $\mathfrak{P}^*$.

Théorème 33. Les assertions suivantes concernant un idéal $\mathfrak{a}$ dans un anneau booléen A sont équivalentes : $\mathfrak{a}$ est sans diviseur, $\mathfrak{a}$ est premier, $\mathfrak{a}$ est primaire.

Théorème 34. Si les éléments d'un anneau booléen A sont distribués selon deux classes non vides disjointes $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, alors pour que $\mathfrak{a}$ soit un idéal premier dans A, l'ensemble suivant de conditions est nécessaire et suffisant :
(1) $a \in \mathfrak{a}$ et $b \in \mathfrak{a}$ implique $a \vee b \in \mathfrak{a}$;
(2) $a \in \mathfrak{a}$ et $b \in A$ implique $ab \in \mathfrak{a}$;
(3) $a \in \mathfrak{b}$ et $b \in \mathfrak{b}$ implique $ab \in \mathfrak{b}$.

Théorème 35. Dans le Théorème 34, la condition (2) peut être remplacée par la condition
(2') $a \in \mathfrak{b}$ et $b \in A$ implique $a \vee b \in \mathfrak{b}$.

Théorème 36. Si un anneau booléen A a une unité, la condition (3) de l'ensemble (1), (2'), (3) du Théorème 35 peut être remplacée par
(3') $a \in \mathfrak{b}$ implique $a' \in \mathfrak{a}$.
L'idéal premier $\mathfrak{a}$ contient un des éléments a et a', mais pas les deux.

Théorème 37. L'anneau booléen B du Théorème 1 contient A comme idéal premier lorsque A n'a pas d'unité ; et le système $\mathfrak{P}$ est un idéal premier dans $\mathfrak{P}^*$ quand

$\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}^*$.

Théorème 38. Dans un anneau booléen, les classes $\mathfrak{E}, \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{P}^*$ satisfont la relation d'inclusion $\mathfrak{E}\mathfrak{N} \subset \mathfrak{P}^*$. Plus précisément, un idéal $\mathfrak{p}$ et à la fois premier et normal si et seulement si $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}'(a)$ où a est un élément atomique ; et un idéal premier $\mathfrak{p}$ ne peut être normal si et seulement si $\mathfrak{p}' = \mathfrak{o}$.

Théorème 39. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier dans un anneau booléen A et si $\mathfrak{a}$ est un idéal arbitraire alors
(1) les relations $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}, \mathfrak{a}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}, \mathfrak{a} \vee \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ sont équivalentes ;
(2) les relations $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}, \mathfrak{a}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}, \mathfrak{a} \vee \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}$ sont équivalentes ;
(3) un et un seulement de ces deux ensembles de relations équivalentes est valide. Au cas où $\mathfrak{p}$ est normal, les relations $\mathfrak{a}\mathfrak{p}' = \mathfrak{o}$ et $\mathfrak{a}\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'$, où $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{o}$, sont respectivement équivalentes aux relations dans (1) et (2) respectivement.

Théorème 40. If $\mathfrak{p}$ est un diviseur idéal premier du produit idéal $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ dans un anneau booléen A, alors $\mathfrak{p}$ est un diviseur d'au moins l'un des facteurs $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$; en d'autres termes, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ implique $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b}$.

Théorème 41. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier dans un anneau booléen A et si $\mathfrak{a}$ est un idéal arbitraire, alors au moins l'une des relations $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}, \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}$ est valide ; si $\mathfrak{a}$ est simple, alors seulement l'une de ces deux relations est valide.

Proposition fondamentale de l'arithmétique des idéaux. Dans un anneau booléen A, tout idéal autre que $\mathfrak{e}$ est le produit de tous ses idéaux diviseurs premiers.

Proposition fondamentale d'existence. Dans un anneau booléen A contenant au moins deux éléments, il existe au moins un idéal premier.

Théorème 42. Si un système algébrique B est homomorphe à un anneau booléen A par rapport à la paire d'opérations $+$ et . ou par rapport à la paire d'opérations $\vee$ et ., alors B est homomorphe à A par rapport aux trois opérations $+$, $\vee$ et . ; et B est un anneau booléen. Si le système algébrique B est homomorphe à un anneau booléen A avec unité par rapport à la paire d'opérations $+$ et ., par rapport à la paire d'opérations $\vee$ et $'$, ou par rapport à la paire d'opérations $\vee$ et ., alors B est homomorphe à A par rapport à toutes les 4 opérations $+$, $\vee$, . et $'$; et B est un anneau booléen avec unité. L'homomorphisme $A \to B$ envoie l'élément zéro de A sur l'élément zéro de B, et l'élément unité de A, s'il existe, sur l'élément unité de B.

Théorème 43. Pour qu'un anneau booléen B soit homomorphe à un anneau booléen A, il est nécessaire et suffisant que B soit isomorphe à un anneau quotient $A/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$

est un idéal dans A ; en particulier, l'homomorphisme $A \to B$ détermine $\mathfrak{a}$ comme la classe de tous les éléments dans A qui ont l'élément zéro dans B comme image.

Théorème 44. Les seules congruences dans un anneau booléen A sont les congruences modulaires. Pour que $a \equiv b$ $(mod\ \mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal dans A, il est nécessaire et suffisant que $a + b$ appartienne à $\mathfrak{a}$, ou qu'il existe des éléments c et d dans $\mathfrak{a}$ pour lesuels $a \vee c = b \vee d$.

Théorème 45. Si A_1 et A_2 sont des anneaux booléens, si $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ sont les classes de tous les sous-anneaux de A_1 et de A_2 respectivement, et si l'homomorphisme $A_1 \to A_2$ détermine l'idéal $\mathfrak{a}_1$ dans A, alors l'homomorphisme en question induit un homomorphisme $\mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{U}_2$ selon l'opération d'addition non restreinte. En particulier, les correspondances $A_1 \to A_2, \mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{U}_2$ ont les propriétés suivantes :
(1) si $\mathfrak{b}_1$ est un sous-anneau de A_1, les images de ses éléments par les homomorphismes $A_1 \to A_2$ constituent un sous-anneau $\mathfrak{b}_2$ de A_2 lui correspondant suivant l'homomorphisme $\mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{U}_2$;
(2) si $\mathfrak{b}_1$ est le sous-anneau engendré par une sous-classe non vide $\mathfrak{s}_1$ de A_1, alors son image $\mathfrak{b}_2$ par les homomorphismes $A_1 \to A_2$ et $\mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{U}_2$ est le sous-anneau engendré par la classe $\mathfrak{s}_2$ de toutes les images des éléments de $\mathfrak{s}_1$;
(3) si $\mathfrak{b}_2$ est un sous-anneau de A_2, la classe $\mathfrak{b}_1$ de tous les éléments de A_1 d'images dans $\mathfrak{b}_2$ est un sous-anneau de A_1 avec $\mathfrak{b}_2$ comme image par les homomorphismes $A_1 \to A_2$ et $\mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{U}_2$;
(4) si $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{c}_1$ sont des sous-anneaux de A_1 d'images respectives $\mathfrak{b}_2$ et $\mathfrak{c}_2$ dans A_2, alors les relations $\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{c}_1 \vee \mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{c}_2$ sont équivalentes.

Théorème 46. Si A_1 et A_2 sont des anneaux booléens, et si $\mathfrak{I}_1$ et $\mathfrak{I}_2$ sont les classes de tous les idéaux dans A_1 et dans A_2 respectivement, et si l'homomorphisme $A_1 \to A_2$ détermine l'idéal $\mathfrak{a}_1$ dans A_1, alors l'homomorphisme indiqué induit un homomorphisme $\mathfrak{I}_1 \to \mathfrak{I}_2$ par rapport aux opérations de l'addition non restreinte et de la multiplication finie. En particulier, les correspondances $A_1 \to A_2$ et $\mathfrak{I}_1 \to \mathfrak{I}_2$ ont les propriétés (1)-(4) du théorème 45 avec le terme "sous-anneau" partout remplacé par le terme "idéal".

Théorème 47. Si A_1 et A_2 sont des anneaux booléens, l'homomorphisme $A_1 \to A_2$ envoie tout idéal principal (semi-principal, simple) dans A_1 sur un idéal principal (semi-principal, simple) dans A_2 ; mais il peut aussi envoyer un idéal normal dans A_1 dans un idéal non-normal dans A_2.

Théorème 48. Si A_1 et A_2 sont des anneaux booléens, et si $\mathfrak{a}_1$ est l'idéal déterminé dans A_1 par l'homomorphisme $A_1 \to A_2$, alors l'homomorphisme indiqué envoie un idéal premier $\mathfrak{p}_1$ dans A_1 sur un idéal $\mathfrak{p}_2$ dans A_2 qui est premier ou qui coïncide avec $\mathfrak{e}_2$ selon que $\mathfrak{p}_1$ contient $\mathfrak{a}_1$ ou non. Si $\mathfrak{p}_2$ est un idéal premier dans A_2, la classe $\mathfrak{p}_1$ de tous les éléments dans A_1 avec des images dans $\mathfrak{p}_2$ est un idéal premier dans A_1.

Théorème 49. Pour qu'un idéal $\mathfrak{p}$ dans un anneau booléen A soit premier, il est nécessaire et suffisant que $A/\mathfrak{p}$ soit un anneau booléen à deux éléments.

Théorème 50. La somme directe $S_{\alpha \in \mathrm{A}} A_\alpha$ des anneaux booléens A_α où α parcourt la classe A est un anneau booléen. Son élément zéro est la fonction 0 qui pour tout α prend la valeur $0(\alpha)$ l'élément zéro de A_α. Elle a une unité si et seulement si tout A_α a une unité ; si A_α a une unité e_α pour tout α, alors la fonction e qui pour chaque α a la valeur $e(\alpha) = e_\alpha$ est l'unité de la somme directe.

Théorème 51. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal simple dans un anneau booléen A, alors $A \longleftrightarrow (A/\mathfrak{a}) \vee (A/\mathfrak{a}'), \mathfrak{a} \longleftrightarrow A/\mathfrak{a}', \mathfrak{a}' \longleftrightarrow A/\mathfrak{a}$. Inversement, si A, A_1, et A_2 sont des anneaux booléens tels que $A \longleftrightarrow A_1 \vee A_2$, alors il existe un idéal simple $\mathfrak{a}$ dans A tel que $A_1 \longleftrightarrow A/\mathfrak{a}, A_2 \longleftrightarrow A/\mathfrak{a}'$.

Théorème 52. Un anneau booléen A est réductible si et seulement si il a plus de deux éléments.

Théorème 53. Un anneau booléen A est isomorphe à la somme directe d'anneaux booléens à deux éléments A_α, où α parcours la classe A, si et seulement si il est isomorphe à l'algèbre de toutes les sous-classes de A.

Définition 10. Si A est un anneau booléen avec éléments $a, b, c, \ldots$ qui sont des sous-classes d'une classe fixe $\mathrm{E} = E(A)$ avec éléments $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, alors A est dite être une algèbre réduite de classes quand elle a la propriété suivante : tout élément α dans E est contenu dans un élément de A et est le seul élément de E commun à tous les éléments de A le contenant.

Théorème 54. Tout algèbre de classes avec plus d'un élément est isomorphe à une algèbre réduite de classes, en vertu d'une correspondance élément à élément des classes basiques.

Définition 11. Si A et B sont des algèbres de sous-classes de classes E_A et E_B respectivement et s'il existe une correspondance biunivoque entre E_A et E_B qui induit un isomorphisme $A \longleftrightarrow B$, alors les algèbres A et B sont dites équivalentes.

Théorème 55. Si A, B, et C sont des algèbres de classes, alors la relation d'équivalence introduite dans la définition 11 a les propriétés suivantes :
(1) A est équivalente à A ;

(2) si A est équivalente à B alors B est équivalente à A ;
(3) si A est équivalente à B et B à C, alors A est équivalente à C ;
(4) si A est une algèbre réduite de classes et B est équivalente à A, alors B est une algèbre réduite de classes.

Théorème 56. Si A est une algèbre réduite de sous-classes a d'une classe E et si H est n'importe quelle sous-classe de E, alors les classes Ha constituent une algèbre réduite B de sous-classes de H homomorphe à A selon la correspondance $a \to Ha$. Cet homomorphisme est un isomorphisme si et seulement si l'intersection Ha est non vide pour tout a non vide dans A.

Théorème 57. Soit A une algèbre de sous-classes a d'une classe E ; soit $\mathfrak{a}$ un idéal arbitraire dans A ; et soit $E(\mathfrak{a})$ l'union de toutes ces sous-classes de E qui sont éléments de l'idéal $\mathfrak{a}$. Alors les relations suivantes sont valides :
(1) si $\mathfrak{B}$ est n'importe quelle classe non vide d'idéaux dans A, alors

$$\sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}} E(\mathfrak{a}) = E(S_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}), \qquad \prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}} E(\mathfrak{a}) \supset E(P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a});$$

(2) si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux dans A, alors $E(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = E(\mathfrak{a})E(\mathfrak{b})$;
(3) si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux dans A, alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ implique $E(\mathfrak{a}) \subset E(\mathfrak{b})$;
(4) si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux dans A, alors $E(\mathfrak{a}) = E(\mathfrak{b})$ implique $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$;
(5) l'idéal $\mathfrak{a}'$ consiste en ces classes de E qui appartiennent à A et qui sont contenues dans $E'(\mathfrak{a})$ et seulement elles ; et $E(\mathfrak{a}') \subset E'(\mathfrak{a})$.
La correspondance $\mathfrak{a} \to E(\mathfrak{a})$ définit un homomorphisme du système $\mathfrak{I}$ de tous les idéaux dans A (avec addition non restreinte et multiplication finie comme opérations) au système de toutes les classes $E(\mathfrak{a})$ (avec les opérations de formation d'unions arbitraires et d'intersections finies), en accord avec (1) et (2) ci-dessus. Cette correspondance a les propriétés spéciales suivantes :
(6) si $\mathfrak{a}$ est un idéal principal $\mathfrak{a}(a)$, alors $E(\mathfrak{a}(a)) = a$;
(7) si $\mathfrak{a}$ est un idéal simple, alors $E(\mathfrak{a}') = E'(\mathfrak{a})$;
(8) si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux normaux, alors $E(\mathfrak{a}) = E(\mathfrak{b})$ implique $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$;
(9) si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, alors $E'(\mathfrak{p})$ contient au plus un élément.
Si la correspondance $\mathfrak{a} \to E(\mathfrak{a})$ est restreinte aux idéaux normaux, elle est biunivoque ; si elle est restreinte aux idéaux simples, semi-principaux ou principaux, elle définit un isomorphisme et les classes correspondantes $E(\mathfrak{a})$ constituent une algèbre de classes.

Théorème 58. Soit A une algèbre de sous-classes a d'une classe E ; soit H une sous-classe arbitraire de E ; et soit $\mathfrak{a}(H)$ la classe de tous les éléments a dans A qui sont sous-classes de H. Alors $\mathfrak{a}(H)$ est un idéal dans A avec les propriétés suivantes :
(1) $\mathfrak{a}(H_1) \vee \mathfrak{a}(H_2) \subset \mathfrak{a}(H_1 \cup H_2)$;
(2) $\mathfrak{a}(H_1)\mathfrak{a}(H_2) = \mathfrak{a}(H_1 H_2)$;
(3) $H_1 \subset H_2$ implique $\mathfrak{a}(H_1) \subset \mathfrak{a}(H_2)$;

(4) $\mathfrak{a}(H)$ est premier si et seulement si H' a exactement un élément.
En connexion avec le Théorème 57, les relations suivantes sont vérifiées :
(5) $\mathfrak{a}(E(\mathfrak{b})) \supset \mathfrak{b}$; (6) $E(\mathfrak{a}(H)) \subset H$; (7) $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}(E'(\mathfrak{b}))$.

Définition 12. Une algèbre A de sous-classes d'une classe E est dite parfaite si $E(\mathfrak{a}) = E(\mathfrak{b})$ implique $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$; c'est-à-dire si l'homomorphisme du Théorème 57 est un isomorphisme.

Théorème 59. Pour qu'une algèbre A de sous-classes d'une classe E soit parfaite, il est nécessaire et suffisant que
(1) la Proposition fondamentale de l'arithmétique des idéaux soit vérifiée dans A ;
(2) $E'(\mathfrak{p})$ soit une classe à un élément à chaque fois que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier.

Théorème 60. Les assertions suivantes concernant une algèbre A de sous-classes d'une classe E sont équivalentes :
(1) $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$ implique $E(\mathfrak{a}) = E(\mathfrak{b})$;
(2) toute sous-classe à un seul élément de E est un élément de A ;
(3) $\mathfrak{a}(H_1) = \mathfrak{a}(H_2)$ implique $H_1 = H_2$;
(4) $E(\mathfrak{a}(H)) = H$ pour toute sous-classe H de E ;
(5) $E(\mathfrak{a}') = E'(\mathfrak{a})$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ dans A ;
(6) $\mathfrak{a}(H)$ est un idéal normal pour tout H ;
(7) $\mathfrak{a}(E(\mathfrak{b})) = \mathfrak{b}''$ pour tout idéal $\mathfrak{b}$ dans A ;
(8) $\mathfrak{a}(H_1)\nabla\mathfrak{a}(H_2) = \mathfrak{a}(H_1 \cup H_2)$ pour tout H_1 et H_2.
Quand ces conditions sont satisfaites, l'anneau booléen $\mathfrak{N}$ de tous les idéaux normaux dans A décrit dans le Théorème 29 est isomorphe à l'algèbre de toutes les sous-classes de E. Inversement, si l'anneau booléen $\mathfrak{N}$ de tous les idéaux normaux dans un anneau booléen abstrait B est isomorphe à l'algèbre de toutes les sous-classes d'une classe E, alors B est isomorphe à l'algèbre réduite A des sous-classes de E dans laquelle ces conditions sont satisfaites.

Théorème 61. Pour qu'un anneau booléen abstrait B soit isomorphe à une algèbre A de sous-classes d'une classe E avec la propriété (2) du Théorème 60, il est nécessaire et suffisant que B contienne un système atomique complet.

Théorème 62. Pour qu'un anneau booléen abstrait B soit isomorphe à l'algèbre A de toutes les sous-classes d'une classe E, il est nécessaire et suffisant que tout idéal normal dans B soit principal et que B contienne un système atomique complet.

Théorème 63. Dans un anneau booléen A contenant au moins deux éléments, il existe au moins un idéal premier.

Théorème 64. Si A est un anneau booléen contenant des éléments a et b tels que $ab \neq a$ ou, de façon équivalente, tel que $a < b$ est faux, alors il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ dans A qui contient b et non a ; et, si A est un anneau booléen contenant les idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ tels que $\mathfrak{b}$ n'est pas un diviseur de $\mathfrak{a}$, alors il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ dans A qui est diviseur de $\mathfrak{a}$ mais pas de $\mathfrak{b}$.

Théorème 65. Le Théorème 64 découle du Théorème 63 sans l'intervention de méthodes transfinies ou de l'hypothèse du bon ordre.

Théorème 66. Dans un anneau booléen A, tout idéal autre que $\mathfrak{e}$ est le produit de tous ses diviseurs idéaux premiers. Ce résultat découle du Théorème 64 sans l'intervention de méthodes transfinies ou de l'hypothèse du bon ordre.

Théorème 67. Soit A un anneau booléen, $\mathfrak{a}$ un idéal arbitraire dans A, $\mathfrak{F}$ la classe de tous les idéaux premiers dans A, $\mathfrak{I}$ le système algébrique de tous les idéaux dans A selon les opérations d'addition non restreinte et de multiplication finie, $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ la classe de tous les idéaux premiers qui ne sont pas des diviseurs de $\mathfrak{a}$, et $I(A)$ le système algébrique qui a les classes $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ pour éléments, et la formation d'unions non restreintes et d'intersections finies pour opérations. Alors la correspondance $\mathfrak{a} \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ détermine un isomorphisme $\mathfrak{I} \longleftrightarrow I(A)$ en accord avec les relations
(1) $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ si et seulement si $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$;
(2) si $\mathfrak{B}$ est n'importe quelle classe non vide d'idéaux, alors

$$\mathfrak{F}(S_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}} \mathfrak{F}(\mathfrak{a});$$

(3) $\mathfrak{F}(a\mathfrak{b}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{a})\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$.
Appelons $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ la classe $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}(a))$ correspondant à l'idéal principal $\mathfrak{a}(a)$ et appelons $B(A)$ le système algébrique avec les classes $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ comme éléments et avec les opérations de formation d'unions finies, différences symétriques (unions modulo 2), et intersections finies. Alors $B(A)$ est un anneau booléen concret ou une algèbre de classes isomorphe à A en vertu de la correspondance $a \to \mathfrak{F}(a)$ en accord avec les relations
(4) $\mathfrak{F}(a) = \mathfrak{F}(b)$ si et seulement si $a = b$;
(5) $\mathfrak{F}(a + b) = \mathfrak{F}(a)\Delta\mathfrak{F}(b)$;
(6) $\mathfrak{F}(a \vee b) = \mathfrak{F}(a) \subset \mathfrak{F}(b)$;
(7) $\mathfrak{F}(ab) = \mathfrak{F}(a)\mathfrak{F}(b)$;
Le système $B(A)$ est une algèbre parfaite réduite de classes.

Définition 13. L'algèbre des classes $B(A)$ associée à un anneau booléen A par le Théorème 67 est appelée la représentation parfaite de A.

Théorème 68. Utilisons les notations $A, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}(\mathfrak{a}), I(A), \mathfrak{F}(a)$ et $B(A)$ spécifiées dans le Théorème 67. Soit $\mathfrak{T}$ une sous-classe arbitraire de $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{a}(\mathfrak{T}')$ l'idéal constitué de tous les éléments a tels que $\mathfrak{F}(a) \subset \mathfrak{T}'$; $I(A, \mathfrak{T})$ le système algébrique de toutes les classes $\mathfrak{T}\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ selon les opérations de formation d'unions non restreintes et d'intersections finies ; et $B(A, \mathfrak{T})$ le système algébrique de toutes les classes $\mathfrak{T}\mathfrak{F}(a)$ selon les opérations de formation d'unions finies, différences symétriques, et intersections finies. Alors la correspondance $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{T}\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ détermine les homomorphismes $I(A) \to I(A, \mathfrak{T}), I(A, \mathfrak{a}(\mathfrak{T}')) \to I(A, \mathfrak{T})$, ce dernier est un isomorphisme si et seulement si $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}(\mathfrak{T}')) = \mathfrak{T}'$ ou de façon équivalente, $\mathfrak{T} = \mathfrak{F}'(\mathfrak{a}(T'))$. De la même manière, la correspondance $\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{T}\mathfrak{F}(a)$ détermine un homomorphisme $B(A) \to B(A, \mathfrak{T})$ et un isomorphisme $B(A, \mathfrak{T}) \longleftrightarrow B(A/\mathfrak{a}(\mathfrak{T}'))$. L'algèbre des classes $B(A, \mathfrak{T})$ est parfaite si et seulement si $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}(\mathfrak{T}')) = \mathfrak{T}'$; et, quand cette condition est satisfaite, $B(A, \mathfrak{T})$ est équivalente à $B(A/\mathfrak{a}(\mathfrak{T}'))$. Si $\mathfrak{b}$ est un idéal arbitraire, alors nous avons en particulier le résultat que $B(A/\mathfrak{b})$ est équivalent à $B(A, \mathfrak{F}'(\mathfrak{b}))$. L'idéal $\mathfrak{a}(\mathfrak{T}')$ est égal à $\mathfrak{e}$ quand $\mathfrak{T}$ est vide et égal au produit des idéaux premiers dans $\mathfrak{T}$ sinon.

Théorème 69. Si B est une algèbre de classes homomorphe à un anneau booléen A et si $\mathfrak{b}$ est l'idéal dans A déterminé par l'homomorphisme $A \to B$, alors il existe une classe $\mathfrak{T}$ d'idéaux premiers dans A reliés à $\mathfrak{b}$ à travers l'équation $\mathfrak{a}(\mathfrak{T}') = \mathfrak{b}$ telle que B est équivalente à $B(A, \mathfrak{T})$. Pour que B soit parfait, il est nécessaire et suffisant que $\mathfrak{T} = \mathfrak{F}'(\mathfrak{b})$. Les seules algèbres parfaites de classes isomorphes à A sont celles équivalentes à $B(A)$.

Théorème 70. Les propositions suivantes sont équivalentes sans utiliser des méthodes transfinis ou l'hypothèse du bon ordre :
(1) tout anneau booléen possède une algèbre de classes isomorphe ;
(2) la proposition fondamentale de l'arithmétique des idéaux est valide dans tout anneau booléen.

Une théorie générale des spectres I
M.H. Stone

La théorie mathématique des spectres traite du problème de la valeur caractéristique (Eigenwertproblem) pour les opérateurs linéaires, et fournit un traitement général unifié pour les cas typiques du problème survenant en mathématiques appliquées. Au cours des dernières années, la tendance à accentuer les aspects algébriques de la théorie spectrale est devenue de plus en plus prononcée. Cette tendance est tout aussi évidente dans les applications que dans les développements purement mathématiques, étant une caractéristique de la théorie quantique et du calcul de Heaviside. Dans la présente note, nous esquissons de nouvelles étapes dans le sens d'une "algèbre" approfondie de la théorie spectrale : nous montrerons que sans la médiation d'aucune théorie d'intégration, il est possible de définir des fonctions générales des opérateurs et d'élaborer leur calcul.

On considère un système R d'éléments $a, b, c, ...$, qui, à des fins d'illustration peuvent être interprétés comme des opérateurs, avec un sous-système P d'éléments dits "positifs". Les conditions suivantes sont exigées :

(1) en termes d'addition et de multiplication, R est un anneau commutatif, et associatif avec unité e ;

(2) pour chaque nombre naturel n, l'équation $nx = e$ a une solution dans R ;

(3) les sommes et produits d'éléments positifs sont positifs, mais a et $-a$ ne sont tous deux positifs que dans le cas où $a = 0$;

(4) le carré de tout élément est positif ;

(5) si a est donné, il existe un nombre naturel n tel que $ne + a$ est positif ;

(6) si $e + na$ est positif pour chaque nombre naturel n, alors a est positif.
Ces propriétés conduisent à la fois à un certain nombre de résultats simples : les éléments de R admettent la multiplication par les nombres rationnels ; à chaque élément a peut être assigné un nombre réel $\| a \|$ qui est sa norme ; les éléments de R peuvent être ordonnés partiellement en définissant $a < b$ si $b - a$ est positif et différent de 0. Nous exigeons en outre que :

(7) avec la distance $\| a - b \|$, le système R est un espace métrique complet.

En fait, bien sûr, nous devons nous attendre à pouvoir obtenir la satisfaction de (7) par un processus de complétion de type familier, en adjoignant de nouveaux éléments à R de manière à obtenir un système élargi R^* avec une classe élargie P^* d'éléments positifs jouissant de toutes les propriétés (1)-(7). Cela se révèle être le cas. Ce que

Source : Actes de l'Académie nationale des sciences des États-Unis d'Amérique, Vol. 26, n° 4 (15 avril 1940), p. 280-283.
Ministère des mathématiques, Université de Harvard
Communiquée le 12 mars 1940

nous pouvons maintenant établir est la chose suivante : *le système R décrit ci-dessus est algébriquement isomorphe à l'anneau de TOUTES les fonctions réelles continues sur un certain espace de Hausdorff bicompact $S(R)$, les éléments positifs correspondant précisément aux fonctions non-négatives ; et $S(R)$ est déterminé de façon unique modulo les équivalences topologiques*[1]. Puisque les fonctions réelles continues sur tout espace de Hausdorff bicompact constituent un système vérifiant les propriétés (1)-(7), il s'ensuit que *ces propriétés caractérisent en termes algébriques et ordinaux de telles classes de fonctions réelles*[1]. Pour prouver ces résultats, on combine des principes généraux d'algèbre et de topologie aux informations concernant l'existence et les propriétés des racines carrées dans le système donné R. Sans entrer dans les détails, il est intéressant de noter que la détermination de la racine carrée positive d'un élément positif $a \leq e$ est effectuée de la manière la plus efficace grâce à l'algorithme de fraction continuée utilisé pour convertir l'équation $x^2 = a$ dans la forme équivalente $(e+x)x = a+x$ et en écrivant cette dernière, d'abord dans un sens purement formel, comme $x = e - (e-a)/(e+x)$.

Il est maintenant évident que, si a est un élément quelconque de R et $F(\lambda)$ est n'importe quelle fonction réelle continue définie pour tous les réels λ, alors $F(a)$ peut être interprété de manière unique comme un élément de R : car, si f est cette fonction continue sur $S(R)$ qui représente a dans l'isomorphisme décrit ci-dessus[2] alors $F(f)$ est aussi une fonction continue sur $S(R)$ et représente donc un certain élément de R qui peut être désigné de manière appropriée par $F(a)$. Le développement d'un calcul opérationnel complet de telles fonctions d'éléments dans R peut être développé d'une manière évidente. Si F n'est pas continue, $F(f)$ ne peut généralement pas être en corrélation avec un élément de R, mais a toujours une signification comme fonction sur $S(R)$. Par conséquent, R peut être tellement élargi que $F(a)$ a un sens dans le système étendu même lorsque F n'est pas continue : par exemple, dans le traitement de fonctions bornées F, nous pouvons utiliser comme système étendu la classe de toutes les fonctions réelles bornées sur $S(R)$, pour lesquelles les propriétés (1)-(7) sont facilement vérifiées. Si l'on souhaite traiter des fonctions non bornées F, une procédure est possible mais l'extension de R employée ne peut en général pas avoir les propriétés (5) et (7).

Dans de nombreux cas, cependant, aucun élargissement de R n'est nécessaire pour mettre en place un calcul opérationnel en termes d'une large classe de fonctions discontinues F. Exigeons que, au lieu de la propriété (7), R ait la propriété
(7') si $\{a_n\}$ est une séquence d'éléments positifs avec un $a_n \geq a_{n+1}$, alors elle a une plus grande borne inférieure.

La propriété (7') implique la propriété (7) ; de plus, elle est équivalente à la propriété suivante de l'espace associé $S(R)$: chaque fonction de Baire bornée sur $S(R)$ ne diffère que sur un ensemble de première catégorie d'une fonction continue qui lui est associée de façon unique. Dans la preuve de cette équivalence, nous établissons en outre que la propriété (7') et la propriété de $S(R)$ indiquées ci-dessus sont équivalentes à la propriété suivante : $S(R)$ est l'espace booléen représentatif (3) d'une algèbre booléenne complètement additive, qui peut être réalisée au moyen des éléments idempotents de R. Revenant à l'interprétation de $F(a)$, on voit tout de suite que, quand R a la propriété (7') et quand F est une fonction de Baire bornée, $F(f)$ est une fonction de Baire bornée sur $S(R)$ déterminant une fonction continue unique et un élément correspondant unique de R, qui peut être désigné de manière appropriée par $F(a)$. On obtient ainsi un calcul opérationnel complet avec des fonctions de Baire bornées F, applicable entièrement *au sein du* système R. Il n'est pas difficile de voir que (7') est essentiellement une condition nécessaire et suffisante pour la constructibilité d'un tel calcul.

Les concepts généraux décrits ci-dessus peuvent être illustrés ou appliqués de diverses façons. Les exemples de systèmes R qui conduisent à des interprétations et résultats sont : la classe de toutes les fonctions réelles continues sur un espace topologique arbitraire[1] ; la classe de toutes les fonctions bornées mesurables au sens de Lebesgue sur un domaine général, une fonction étant considérée comme positive si elle n'est négative que sur un ensemble de mesure zéro. On peut vérifier par des considérations tout à fait élémentaires que tout anneau abélien d'opérateurs auto-adjoints bornés dans l'espace de Hilbert est un système R qui possède la propriété (7') sous une forme plus forte. La présente théorie comprend donc comme cas particulier l'analyse spectrale simultanée d'un nombre quelconque d'opérateurs auto-adjoints bornés permutables avec le développement de leur calcul opérationnel. Afin de traiter les opérateurs non bornés, il suffit d'utiliser l'une des méthodes disponibles pour réduire le cas non borné au cas borné. En interprétant cette instance d'un système R en termes physiques, nous avons un traitement de tout système de quantités physiques réelles observables simultanément telles qu'envisagées dans la théorie quantique[4]. Les systèmes formels décrits par Steen[5] comme base pour un analogue abstrait de la théorie des opérateurs auto-adjoints peuvent être mise en proche relation avec la théorie présente, comme on pourrait s'y attendre ; mais il faut noter que les considérations de Steen restent à un niveau plus formel que les nôtres, dans le sens où elles ne servent pas à identifier les systèmes considérés. Là existent des liens similaires entre la présente note et une théorie initiée par von Neumann[6] ; mais nos résultats ne s'appliquent qu'aux sous-systèmes associatifs des algèbres non associatives de von Neumann. Dans le présent schéma, nous avons eu l'occasion de faire certaines références à la théorie des algèbres booléennes. Le fait que ces références ne soient ni accidentelles ni forcées provient du fait que la théorie générale de telles algèbres telle que nous l'avons développée ailleurs[3] est un cas particulier de la théorie présente : si l'on considère les formes linéaires formelles à coefficients rationnels construites à partir d'un anneau booléen abstrait A et qu'on les traite convenablement, comme si elles représentaient des "fonctions constantes par morceaux", on obtient un système R qui peut être complété de manière à vérifier les propriétés (1)-(7) ; l'espace de Hausdorff bicompact résultant est précisément l'espace booléen attaché à A. En fait, il est plus simple de développer la théorie des algèbres booléennes indépendamment, car de nombreux aspects de la théorie générale décrite ici deviennent triviaux ou peuvent être contournés en traitant directement ce cas particulier. Enfin, nous observons que les concepts de la présente note éclairent (et introduisent même certaines simplifications techniques dans) les travaux récents de Bochner sur les intégrales additives finies[7] et ceux de Bochner et Wecken sur les fonctions quasi-périodiques[8].

Dans une deuxième note, nous discuterons du parallèle entre la théorie actuelle et certains résultats de la théorie des réseaux linéaires. En particulier, nous montrerons que les principes généraux développés ici se prolongent pour donner un traitement sans intégration du calcul opérationnel de Riesz dans un réseau linéaire[9].

1. Pour des discussions au sujet des propriétés des fonctions continues impliquées dans ce contexte, voir M. H. Stone, *Trans. Am. Math. Soc.*, **41**, 375-481 (1937), spécialement le Chapitre III ; et Čech, *Ann. Math.* (2), **38**, 823-844 (1937).
2. Le domaine de cette fonction f est le spectre de a.
3. Voir M. H. Stone, loc. cit., specialement Chapitre I, et un travail précédent cité là.
4. P. A. M. Dirac, Principes de la mécanique quantique, 1931.
5. S. W. P. Steen, *Proc. Lond. Math. Soc* (2) **41** 361-392 (1936) ; **43**, 529-543 (1937) ; **44**, 398-411 (1938) ; **45**, 562-578 (1939). Les deux derniers articles traitent de systèmes non-commutatifs liés de façon proche à ceux cités dans la référence afférente 6.
6. J. von Neumann, Matematicheskii Sbornik, **1** (43) 415-484 (1936).
7. S. Bochner, Ann. Math. (2) **40**, 769-799 (1939).
8. S. Bochner, loc. cit. ; F. J. Wecken, Math. Zeit., **45**, 377-404 (1939).
9. F. Riesz, Ann. Math. (2) **41**, 174-206 (1940).

Une théorie générale des spectres II
M. H. Stone

Dans la présente note, nous discuterons de la théorie des groupes abéliens ordonnés par un treillis et de sa relation avec une communication antérieure[2]. En particulier, nous dérivons le traitement sans intégration du calcul opérationnel de Riesz dans un réseau linéaire[3], traitement qui avait été précédemment promis.

Nous désignons par 1-groupe tout système L d'éléments a, b, c, ... satisfaisant la condition composée

(1') L est un système avec deux opérations binaires, $+$ et $\times$, qui

- (i) est un groupe abélien par rapport à $+$;
- (ii) satisfait aux lois commutative et associative par rapport à $\times$;
- (iii) satisfait à la loi de distributivité $a+(b\times c) = (a+b)\times(a+c)$ de $+$ par rapport à $\times$;
- (iv) satisfait à la loi d'idempotence $a \times a = a$.

La condition sur L est équivalente à l'exigence que L soit un groupe abélien ordonné par un réseau : en définissant que $a \leq b$ si et seulement si $a \times b = a$, on peut facilement vérifier que $a \times b$ est la plus grande limite inférieure (ou rencontre de réseau) de a et b. Par conséquent, la terminologie habituelle de la théorie des réseaux peut être appliquée à L sans plus de commentaire : par exemple, nous dirons qu'a est un élément positif ou strictement positif selon que $a \geq 0$ ou $a > 0$. Les parties séparées de (1') ressemblent étroitement aux postulats des anneaux commutatifs. En effet, en omettant (iv) et en remplaçant (iii) par la loi distributive $a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c)$, nous obtenons les postulats en question. De plus, en conservant (iv) et en remplaçant (iii) de la même manière, on obtient les postulats des anneaux booléens. Ainsi les 1-groupes diffèrent principalement des anneaux par une sorte d'inversion de la loi distributive. Par conséquent les extensions, homomorphismes et représentations pour les 1-groupes peuvent être obtenus par des arguments pas très différents de ceux utilisés dans la théorie des anneaux.

Sur un 1-groupe L, nous imposons une partie ou la totalité d'une série de conditions similaires à celles supposés en (I) pour les anneaux. Ce sont :
(2') pour tout a et tout entier naturel n, l'équation $nx = a$ a une solution dans L ;
(5') pour un élément e, chaque a détermine un nombre naturel associé n tel que $ne+a$ est positif ;
(5") pour un élément e, les relations $a \geq 0$, $e \times a = 0$ sont équivalentes à la relation $a = 0$;

Source : Actes de l'Académie nationale des sciences des États-Unis d'Amérique, Vol. 27, 1941 83 Page 2, Communiquée le 11 décembre 1940

(6') si b est positif et si $b + na$ est positif pour tout entier naturel n, alors a est positif ;
(7) en termes de la distance de $\| a - b \|$ (définie sur la base de (2'), (5') et (6') comme la plus grande borne inférieure des nombres rationnels λ tels que $|a - b| < \lambda e$), L est un espace métrique complet ;
(7') si $\{a_n\}$ est une séquence d'éléments positifs tels que $a_n \geq a_{n+1}$, alors elle a une plus grande borne inférieure.
En (5') et en (5"), l'élément spécial e doit être strictement positif ; et tout e satisfaisant (5') satisfait également (5"). Un 1-groupe avec la propriété (7') est dit complet. Un 1-groupe complet satisfait nécessairement la propriété (6') ; et un 1-groupe complet satisfaisant (2') et (5') satisfait également (7). Pour qu'un 1-groupe satisfasse (2'), (5'), (6') et (7), il est nécessaire et suffisant que L soit un treillis de Banach contenant un élément spécial e tel que les relations $\| a \| \leq 1$ et $\| a \| \leq e$ sont équivalentes.

Tout 1-groupe L peut être étendu à un 1-groupe L^* (composé des "fractions formelles" a/n) qui a la propriété (2') et aussi l'une des propriétés (5'), (5"), (6') possédée par L. De même tout 1-groupe avec les propriétés (2'), (5'), (6') peut être étendu (par complétion métrique) à un 1-groupe satisfaisant (2'), (5'), (6' et (7). Ainsi, tout 1-groupe L complet satisfaisant (5') peut être étendu à un 1-groupe L^* satisfaisant (2'), (5'), (6') et (7) ; et nous verrons qu'en conséquence, L^* a aussi la propriété (7').

Les homomorphismes d'un 1-groupe sont étudiés au moyen de ses 1-sous-groupes normaux, que nous désignons ici par le terme 1-idéaux puisque leur rôle est analogue à celui des idéaux de la théorie des anneaux. Une sous-classe non vide $\mathfrak{a}$ d' un 1-groupe L est ainsi dite être un 1-idéal si et seulement si, à chaque fois que $a_1, ..., a_p$ sont dans $\mathfrak{a}$ et $|b| \leq |a_1| + ... + |a_p|$, alors b est également dans $\mathfrak{a}$. Un 1-idéal est dit premier si $|a_1| \times |a_2| \in \mathfrak{a}$ implique $a_1 \in \mathfrak{a}$ ou $a_2 \in \mathfrak{a}$; un 1-idéal $\mathfrak{a}$ est premier si et seulement si le 1-groupe-quotient $L/\mathfrak{a}$ est simplement ordonné. Associé à une sous-classe non vide arbitraire $\mathfrak{a}$ d'un 1-groupe, on a $\mathfrak{a}^*$ le plus petit 1-idéal contenant $\mathfrak{a}$, et le 1-idéal $\mathfrak{a}'$ de tous les éléments b tels que $|b| \times |a| = 0$ pour chaque a dans $\mathfrak{a}$; pour eux, les relations $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{a}'^* = \mathfrak{a}^{*\prime} = \mathfrak{a}'$ sont facilement vérifiées. De plus, $\mathfrak{a}^*$ est facilement identifiée comme la classe de tous les éléments b tels que $|b| \leq |a_1| + \ldots + |a_p|$ pour certains éléments $a_1, ..., a_p$ dans $\mathfrak{a}$. Dans un 1-groupe complet, les 1-idéaux $\mathfrak{a}^*$ et $\mathfrak{a}'$ sont des 1-groupes complets.

L'analyse des 1-groupes complets peut être facilement réduite à l' étude des 1-groupes complets satisfaisant (5'), comme nous allons le montrer maintenant. Si e est n'importe quel élément strictement positif dans un 1-groupe complet L, alors L est la somme directe des 1-idéaux $\{e\}'$ et $\{e\}''$ et le 1-idéal $\{e\}''$ est essentiellement déterminé par le 1-idéal $\{e\}^*$: car, si a est n'importe quel élément positif dans L, alors $a' = \inf\{a - (ne \times a)\} \in \{e\}', a'' = a - a' = \sup\{ne \times a\} \in \{e\}''$, et $ne \times a \in \{e\}^*$. Nous avons donc une application homomorphe $L \to L/\{e\}' = \{e\}''$ *qui conserve les plus petite borne supérieure et plus grande borne inérieure (pour les séquences).* Non seulement les 1-groupes $\{e\}''$ et $\{e\}^*$ sont tous deux complets, mais ils satisfont aussi les conditions respectives (5") et (5') avec e comme élément spécial requis dans chaque cas. Si e est maintenant autorisé à parcourir la classe de tous les éléments strictement positifs dans L (ou simplement une classe d'éléments e_α tels que $\alpha \neq \beta$ implique $e_\alpha \times e_\beta = 0$ tandis que $e_\alpha \times |a| = 0$ pour tout α implique $a = 0$), alors aucun élément a autre que 0 a pour image l'élément nul de $\{e\}''$ par *tout* homomorphisme $L \to \{e\}''$. En appliquant le principe de McCoy et Montgomery[5], et en observant que la somme directe des 1-groupes complets satisfaisant (5") est un 1-groupe du même genre, on obtient le :

Théorème 1. *Un l-groupe complet peut se projeter de façon isomorphe, avec conservation des plus grande borne inférieure et plus petite borne supérieure (pour les séquences), en tant que l-sous-groupe dans une somme directe de l-groupes complets satisfaisant (5") - et donc comme un l-sous-groupe dans un l-groupe complet satisfaisant (5").*

Bien sûr, dans un 1-groupe complet L satisfaisant (5"), nous avons $L = \{e\}''$ pour l'élément spécial e de (5") et est donc laissé pour l'étude le 1-groupe complet $\{e\}^*$, qui satisfait (5').

En déplaçant notre attention vers le cas d' un 1-groupe L avec les propriétés (2'), (5'), (6') et (7), nous déduisons pour lui une représentation en théorie des fonctions due à Kakutani[6] ; cette représentation est analogue à la représentation pour les anneaux donnée en (I). Un argument appliqué par Krull[7] dans le cas des anneaux commutatifs nous permet de construire un 1-idéal maximal en omettant e. Ce 1-idéal est nécessairement métriquement fermé et premier ; et le 1-groupe-quotient simplement ordonné $L/\mathfrak{a}$ est facilement identifiable avec le 1-groupe de nombres réels (avec leur ordre naturel). En particulier, si a est un élément arbitraire dans L, le 1-idéal $\{\| a \| e - |a|\}^*$ ne peut pas contenir e ; et nous pouvons donc déterminer $\mathfrak{a}$ pour qu'il contienne $\| a \| e - |a|$. L'application $L \to L/\mathfrak{a}$ envoie alors $|a|$ sur le nombre réel $\| a \|$. En appliquant le principe de McCoy et Montgomery, conjointement avec des compléments topologiques d'abord formulés en termes explicites par Kakutani[8], nous obtenons le :

Théorème 2. *(Théorème de Kakutani). Un l-groupe L satisfaisant (2'), (5'), (6') et (7) est isomorphe au l-groupe de TOUTES les fonctions réelles continues sur un espace de Hausdorff bicompact déterminé de façon unique $S(L)$; les éléments positifs de L sont représentés précisément par ces fonctions qui n'ont pas de valeurs négatives et l'élément e par la fonction constante 1.*

De (I) nous avons immédiatement le

Corollaire. *Pour que L soit complet, il est nécessaire et suffisant que $S(L)$ soit un* *espace booléen qui est associé à une algèbre booléenne complètement additive.*

Ainsi, dans tout 1-groupe complet satisfaisant (2') et (5'), nous pouvons mettre en place un calcul opérationnel de la manière indiquée dans notre note précédente (I), ce qui permet d'obtenir, sans recours à l' intégration, des résultats similaires à ceux de Riesz.

Rappelant maintenant que tout 1-groupe complet satisfaisant (5') peut être projeté dans un 1-groupe L^* satisfaisant (2'), (5'), (6') et (7), on peut à la fois représenter L isomorphiquement comme un 1-sous-groupe L_0 du 1-groupe des fonctions continues sur $S(L^*)$. En vertu de la construction explicite de L^* en fonction de L, nous voyons que chaque fonction continue sur $S(L^*)$ peut être uniformément approximée par des combinaisons linéaires rationnelles de fonctions dans L_0. En couplant ce fait topologique[9] avec le fait que L_0 est complet, nous pouvons montrer que $S(L^*)$ est l'espace booléen représentatif d'une algèbre booléenne complètement additive, et *donc que L^* est un 1-groupe complet.* Maintenant, à tout point p de $S(L^*)$, les valeurs prises par les fonctions dans L_0 constituent un 1-sous-groupe $L_0(p)$ des nombres réels. Puisque ce 1-sous-groupe peut être discret, composé de nombres de la forme $\pm k/n$ où n est fixé et $k = 0, 1, 2, 3, ...$, nous sommes amenés à considérer l'ensemble $S_N(L)$ de tous les points p où le plus petit nombre strictement positif dans $L_0(p)$ est de la forme k/N. Nous posons $T_N(L) = S'_1(L)S'_2(L)\dots S'_{N-1}(L)S_N(L)$ [1]. Des investigations de nature topologique amènent alors :

THÉORÈME 3[10]. *Si L est un l-groupe complet satisfaisant (5'), alors il existe un espace booléen bicompact déterminé de façon unique $S(L)$, qui représente une algèbre booléenne complètement additive A, et une séquence déterminée de manière unique $\{S_N(L)\}$ d'ensembles fermés dans $S(L)$, où $S_M(L)S_N(L) = S_P(L)$ avec P le p.g.c.d. de M et N et où les ensembles ouverts complémentaires $S'_N(L)$ représentent les idéaux complètement additifs dans A, de telle sorte que L est isomorphe au l-groupe L_0 de toutes les fonctions réelles continues sur $S(L)$ qui ne prennent sur chaque ensemble $T_N(L)$ aucune valeur autre que $\pm k/N, k = 0, 1, 2, ..., N = 1, 2, 3, ...$; et si le point p n'appartient à aucun ensemble S_N, alors $L_0(p)$ est le l-groupe des nombres réels. Inversement, si S et S_N sont choisis arbitrairement sous réserve des conditions indiquées, alors il existe un l-groupe complet L satisfaisant (5') et les relations spécifiques $S(L) = S, S_N(L) = S_N$ pour $N = 1, 2, 3, ...$*

Nous ne formulerons pas les théorèmes décrivant les représentations pour les 1-groupes complets satisfaisant (5") et pour les 1-groupes complets sans restrictions, car les détails sont assez compliqués. Cependant, nous pouvons facilement voir de façon générale quelles sont les représentations possibles. Dans le traitement d'un 1-groupe complet L satisfaisant (5"), nous appliquons d'abord le théorème 3 pour obtenir une

1. pas de prime pour $S_N(L)$, erreur ?

représentation de $\{e\}^*$, où e est l'élément spécial donné en (5"). Nous utilisons ensuite cette représentation pour fournir des représentants pour les éléments qui sont dans $L = \{e\}''$ mais pas dans $\{e\}^*$. En raison de remarques précédentes, il est aisément vérifiable que chacun de ces éléments a une fonction représentative unique F vérifiant les propriétés suivantes :

(α) F est finie et continue sauf aux points d'un ensemble associé fermé dense nulle part ;

(β) si n est un nombre naturel quelconque, il existe un voisinage de cet ensemble exceptionnel associé de telle sorte que F ne prend sur lui aucune valeur comprise entre $-n$ et n ;

(γ) sur chaque ensemble $T_N(\{e\}^*)$, la fonction F ne suppose aucune des valeurs finies autres que celles de la forme $\pm k/N$.

Dans le calcul des sommes et des jointures de treillis de telles fonctions, on doit évidemment négliger les ensembles denses nulle part. Avec cette réserve, il n'est pas difficile de montrer que l'agrégation combinée de toutes ces fonctions continues et de toutes les fonctions (non bornées) vérifiant les propriétés (α) et (β) ci-dessus est en fait un 1-groupe complet satisfaisant (5") ; et que L peut y être projeté de manière isomorphe sous la forme d'un 1-sous-groupe L_0. Clairement, L_0 doit satisfaire la condition (γ) mais *n'est pas en général caractérisé ainsi.* En combinant ce résultat de façon judicieuse avec le théorème 1, nous arrivons finalement à une représentation en théorie des fonctions d'un 1-groupe complet arbitraire.

Enfin, nous remarquons que le parallèle étroit entre la représentation par anneaux fournie en (I) et la représentation par 1-groupes fournie par le Théorème de Kakutani s'étend même aux arguments de preuves. Si R est n'importe quel anneau avec les propriétés requises en (I), nous pouvons le traiter également comme un 1-groupe satisfaisant (2'), (5'), (6') et (7), en vertu de la définition $a \times b = 1/2(a+b) - 1/2\sqrt{(a-b)^2}$. Une sous-classe non vide *fermée* de R est un idéal si et seulement si elle est un 1-idéal. Par conséquent, si les 1-idéaux premiers $\mathfrak{a}$ utilisés ci-dessus pour prouver le théorème de Kakutani sont interprétés pour R, ils se révèlent être des idéaux fermés sans diviseur ; et les homomorphismes associés $R \to R/\mathfrak{a}$ envoient R sur le corps des nombres réels. Inversement, la technique d'une discussion directe de R donne également une preuve du théorème de Kakutani. Ainsi, exceptée une construction préliminaire des racines carrées dans R, les arguments utilisés pour établir les représentations des anneaux et des 1-groupes sont essentiellement identiques.

1. Pour la théorie générale des treillis et sa terminologie technique, nous nous référons à Garrett Birkhoff, *Lattice Theory*, New York, 1940.
2. M. H. Stone, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **26**, 280-283 (1940). Ce document sera cité ici comme (I).
3. F. Riesz, *Ann. Math.* (2), **41**, 174-206 (1940).
4. Riesz a discuté longuement des systèmes $\mathfrak{a}^*$ et $\mathfrak{a}'$ dans la réf. 3, ci-dessus.
5. Voir N. H. McCoy et Deane Montgomery, *Duke Math. Jour.*, **3**, 455-459 (1937).

6. Voir S. Kakutani, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16**, 63-67 (1940). La preuve esquissée ici diffère de celle qui m'a été communiquée oralement par le Dr. Kakutani en octobre dernier ; elle implique quelques simplifications techniques, si je comprends correctement la situation. Voir également le dernier paragraphe de ce document.

7. Voir W. Krull, *Math. Annalen*, **101**, 729-744 (1929), en particulier la page 732.

8. Voir Kakutani, réf. 6, ci-dessus.

9. Voir M. H. Stone, *Trans. Am. Math. Soc.*, **41**, 375-481 (1937), en particulier le théorème 82 dont la preuve provient essentiellement de la théorie des treillis.

10. Je comprends que J. v. Neumann a également obtenu des résultats en contact étroit avec ceux énoncés dans le théorème 3 et ceux esquissés dans le paragraphe suivant, en particulier en ce qui concerne le "dédoublement" des 1-groupes discrets $L_0(p)$ et du calcul modulo les ensembles nulle part denses que l'on trouve au paragraphe suivant. La nature précise des résultats de v. Neumann et dans quelle mesure leurs preuves sont reliées aux observations faites en (I) me sont tous inconnus.

Présentation topologique
du calcul propositionnel intuitionniste
Jean Drabbe

I. Introduction

La présentation élémentaire usuelle du calcul propositionnel classique par l'intermédiaire des tables de vérité a fait très tôt l'objet de généralisations permettant un nombre de valeurs de vérité supérieur à 2 (voir, par exemple, E. Post "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", Amer. Journal of Math. 43 (1921), p. 163-185).

Notons qu'il résulte immédiatement du théorème de représentation de M. Stone (1934) pour les algèbres de Boole que si l'on utilise les éléments d'une algèbre de Boole (de cardinal ≥ 2) B, $\vee$, $\wedge$, ', $\rightarrow$ (où $a \rightarrow b$ est défini par $a' \vee b$) comme valeurs de vérité, en interprétant :

- le "vrai" par le maximun de B, $\vee$, $\wedge$, $'$, $\rightarrow$,
- la disjonction par $\vee$,
- la conjonction par $\wedge$,
- la négation par ' (complément booléen),
- l'implication par $\rightarrow$,

on retrouve exactement les tautologies classiques.

Cette remarque sera utilisée plus 1oin.

Nous allons montrer que la présentation et l'étude élémentaires du calcul propositionnel intuitionniste peuvent être réalisées de manière très simple en utilisant les ouverts de la droite réelle (avec la topologie usuelle) comme valeurs de vérité en admettant l'ouvert impropre $\mathbb{R}$ comme *valeur désignée* (valeur "vraie").

Cette présentation résulte essentiellement de travaux de A. Tarski, "*Der Aussagenkalkül und die Topologie*", Fund. Math. 31 (1938), p. 103-134 et de J. McKinsey - A. Tarski "*On closed Elements in closure Algebras*", Annals of Math, 47 (1946), p. 122-162.

Une introduction (très détaillée) à la logique intuitionniste peut être trouvée dans le récent ouvrage de M. Dummett "*Elements of intuitionisn*" Oxford Univ. Press (1977).

II. Notations - Terminologie

Désignons par $\mathcal{T}$ l'ensemble des ouverts de la droite réelle.

Pour $A \subset \mathbb{R}$, posons :
$-A = \mathbb{R} \backslash A$,

$\text{int}(A)$ = intérieur de A,
$A^{\perp}$=int$(-A)$.

Nous dirons que A ($\in \mathcal{T}$) est un *ouvert régulier* ssi $A^{\perp\perp} = A$.

L'ensemble Rég des ouverts réguliers peut être érigé en algèbre de Boole (complète) Rég, $\vee$, $\wedge$, ', $\to$ en posant :

$A \vee B = (A \cup B)^{\perp\perp}$
$A \wedge B = A \cap B$
$A' = A^{\perp\perp}$
$A \to B = (A^{\perp} \cup B)^{\perp\perp}$.

Ce résultat est essentiellement une conséquence des propriétés :
Si $A, B \in \mathcal{T}$, alors :

(i) $A \subset A^{\perp\perp}$
(ii) $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$
(iii) $A \subset B \implies A^{\perp\perp} \subset B^{\perp\perp}$
(iv) $(A \cap B)^{\perp\perp} = A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp}$.

(voir, par exemple, P. Halmos "*Lectures on Boolean Algebras*", Van Nostrand, 1963).

III. Tables de vérité topologiques pour la logique intuitionniste

Ensemble des valeurs de vérité : $\mathcal{T}$

Valeur désignée : $\mathbb{R}$

p	$\vee$	q	p	$\wedge$	q
A	$A \cup B$	B	A	$A \cap B$	B
	$\sim$	p	p	$\implies$	q
	$int(-A)$	A	A	$int(-A \cup B)$	B

Notons que les tables de vérité de $\vee$ et $\wedge$ sont naturelles car la réunion et l'intersection de deux ouverts sont encore des ouverts. Comme il n'est pas nécessairement vrai que si A et B sont des ouverts, $-A$ et $-A \cup B$ sont encore des ouverts, la "correction" "int" a été apportée à la situation classique pour définir les tables de vérité de $\sim$ et $\implies$.

Nous appellerons "*tautologie intuitionniste*" toute formule dont la valeur de vérité est $\mathbb{R}$, quelles que soient les valeurs de vérité attribuées à ses variables propositionnelles.

Exemples

i) $(p \wedge q) \implies p$ est une tautologie intuitionniste car pour $A, B \in \mathcal{T}$, $\text{int}(-(A \cap B) \cup A) = \mathbb{R}$;

ii) $\sim\sim p \implies p$ n'est pas une tautologie intuitionniste car $\sim\sim p \implies p$ a la valeur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ lorsque p reçoit la valeur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$;

iii) On vérifie très facilement que
$p \vee \sim p$
$(\sim p \implies \sim q) \implies (q \implies p)$
ne sont pas des tautologies intuitionnistes ;

iv) *toute tautologie intuitionniste est une tautologie classique* (à une traduction triviale près, les tables de vérité intuitionnistes restreintes aux cas où les variables prennent leurs valeurs dans $\{\varnothing, \mathbb{R}\}$ sont les tables de vérité classiques.

IV. La structure $\mathcal{T}, \vee, \wedge, ', \rightarrow$

Les tables de vérité intuitionnistes fournissent une motivation naturelle nous permettant d'ériger $\mathcal{T}$ en structure $\mathcal{T}, \vee, \wedge, ', \rightarrow$ en posant :
$A \vee B = A \cup B,$
$A \wedge B = A \cap B,$
$A' = A^{\perp},$
$A \rightarrow B = \operatorname{int}(-A \cup B).$

Ceci va nous permettre de donner une démonstration simple du théorème de Glivenko.

Théorème de Glivenko

Si φ est une tautologie classique, alors $\sim\sim \varphi$ est une tautologie intuitionniste.

Notons que la réciproque est vraie mais triviale en vertu de la propriété (iv) ci-dessus.

V. Démonstratton du théorème de Glivenko

(a) En vertu des propriétés (i) à (iv) ci-dessus, pour tout ouvert A, $A^{\perp\perp}$ est un ouvert régulier.

Soit $\perp\perp$ l'application de $\mathcal{T}$ dans Rég définie par

$$A \longmapsto A^{\perp\perp}$$

Il est aisé de vérifier (en utilisant les propriétés (i) à (iv) précédentes que $\perp\perp$ est un morphisme de $\mathcal{T}, \vee, \wedge, ', \rightarrow$ dans Rég, $\vee, \wedge, ', \rightarrow$.

(b) soit $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ une formule du calcul propositionnel intuitionniste. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont dans $\mathcal{T}$, nous notons $\varphi_{\mathcal{T}}(A_1, \ldots, A_n)$ la valeur topologique de φ pour la valuation topologique qui donne à p_i la valeur A_i, $\varphi_{\text{Rég}}(A_1^{\perp\perp}, \ldots, A_n^{\perp\perp})$ l'ouvert régulier, valeur booléenne de φ pour la valuation booléenne qui donne à p_i la valeur $A_i^{\perp\perp}$.

En vertu de (a), on a :

$$(\varphi_{\mathcal{T}}(A_1, \ldots, A_n))^{\perp\perp} = \varphi_{\text{Rég}}(A_1^{\perp\perp}, \ldots, A_n^{\perp\perp})$$

Il en résulte que si φ est une tautologie classique, alors

$$(\sim\sim \varphi)_{\mathcal{T}}(A_1, \ldots, A_n) = \mathbb{R} \qquad \text{pour tout } A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$$

et, par conséquent, $\sim\sim\varphi$ est une tautologie intuitionniste.
c.q.f.d.

On montre aisément en utilisent le théorème de Glivenko et des considérations topologiques élémentaires que si $\varphi \iff \psi$ est une tautologte classique, alors

$$\sim\sim\varphi \iff \sim\sim\psi$$

est une tautologie intuitionniste.

VI. Indépendance des connecteurs $\vee, \wedge, \sim, \implies$ en logique propositionnelle intuitionniste

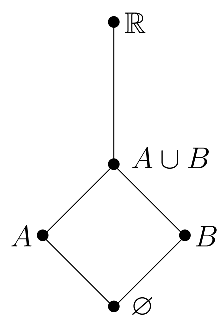
Il est bien connu que chacun des connecteurs $\vee, \wedge, \sim, \implies$ de la logique intuitionniste est indépendant des trois autres.

Nous allons établir, à titre d'illustration, l'indépendance de $\vee$ par rapport à $\wedge, \sim, \implies$ en utilisant une méthode topologique.

Posons $\quad A = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}} (2z, 2z+1)$

$$B = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}} (2z+1, 2z+2).$$

Trivialement, $\{\varnothing, A, B, \mathbb{R}\}$ est stable pour l'intersection. Cette partie est stable pour ' (=int-.) car $\varnothing' = \mathbb{R}, A' = B, B' = A$ et $\mathbb{R}' = \varnothing$.



La table suivante donne les valeurs de $\to$ pour les arguments dans $\{\varnothing, A, B, A\cup B, \mathbb{R}\}$.

$\{\varnothing, A, B, \mathbb{R}\}$ est donc stable pour $\to$.

$\to$	$\varnothing$	A	B	$A\cup B$	$\mathbb{R}$
$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
A	B	$\mathbb{R}$	B	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
B	A	A	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$A\cup B$	$\varnothing$	A	B	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\varnothing$	A	B	$A\cup B$	$\mathbb{R}$

Notons que l'on a toujours :

$$X \to Y = \mathbb{R} \quad \text{ssi} \quad X \subset Y.$$

$p \vee q$ ne peut donc être équivalente à une formule ne faisant intervenir que $\wedge, \sim, \to$ (donner à p la valeur A et à q la valeur B).

VII. Remarque

Les définitions données dans le paragraphe 3 peuvent être adaptées naturellement à tout espace topologique E, ce qui permet d'introduire la notion de E-tautologie.

Si $\mathcal{E}$ est 1a classe de tous les espaces topologiques, on a :

$$\bigcap_{E \in \mathcal{E}} \{\varphi \mid \varphi \text{ est une E}-tautologie\} = \text{ l'ensemble des tautologies intuitionnistes.}$$

Ce résultat est établi dans l'article de McKinsey, Tarski mentionné plus haut. Cette "propriété universelle" de la topologie réelle se retrouve notamment pour les rationnels munis de la topologie induite (par celle des réels) et donc pour tous les espaces dénombrables métrisables sans points isolés (théorème de Sierpinski).

VIII. Variante d'un résultat de K. Gödel

Il est trivial que si E est un espace topologique à 1 élément, alors l'ensemble des E-tautologies est l'ensemble des tautologies classiques.

Nous allons nantrer qu'on ne peut espérer une situation aussi simple pour le calcul propositionnel intuitionniste ; de manière précise :

Si E est un espace topologique ne contenant qu'un nombre fini d'ouverts, alors l'ensemble des E-tautologies est distinct de l'ensemble des tautologies intuitionnistes.

Démonstration :

Supposons que E contienne exactement n ouverts.

(a) Il est aisé de vérifier que

$$\bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} p_i \iff p_j$$

est une E-tautologie.

(b) Nous montrons que la formule considérée en (a) n'est pas une tautologie intuitionniste. Afin d'éviter des notations trop compliquées, supposons $n = 5$; la généralisation sera immédiate et triviale.

Définissons les ouverts (réels) A_1 à A_4 par :

$$A_1 = \bigcup_{n\in\omega}\left(-\frac{1}{4n}, -\frac{1}{4n+1}\right) \cup \bigcup_{n\in\omega}\left(\frac{1}{4n+1}, \frac{1}{4n}\right)$$

$$\text{(en posant } -\frac{1}{0} = -\infty, \frac{1}{0} = \infty\text{)},$$

$$A_2 = \bigcup_{n\in\omega}\left(-\frac{1}{4n+1}, -\frac{1}{4n+2}\right) \cup \bigcup_{n\in\omega}\left(\frac{1}{4n+2}, \frac{1}{4n+1}\right)$$

$$A_3 = \bigcup_{n\in\omega}\left(-\frac{1}{4n+2}, -\frac{1}{4n+3}\right) \cup \bigcup_{n\in\omega}\left(\frac{1}{4n+3}, \frac{1}{4n+2}\right)$$

$$A_4 = \bigcup_{n\in\omega}\left(-\frac{1}{4n+3}, -\frac{1}{4n+4}\right) \cup \bigcup_{n\in\omega}\left(\frac{1}{4n+4}, \frac{1}{4n+3}\right)$$

Posons $B_1 = \mathbb{R}$,
$B_2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$,
$B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$,
$B_4 = A_1 \cup A_2$,
$B_5 = A_1$,
$B_6 = \varnothing$,

Si l'on attribue à p_i la valeur B_i, la formule considérée en (a) reçoit une valeur distincte de $\mathbb{R}$ car pour $i < j$, $0 \notin \operatorname{int}(-B_i \cup B_j)$ (aucun ouvert comprenant 0 n'est contenu dans $-B_i \cup B_j$).

Noter cependant que le calcul propositiomnel intuitionniste est décidable (voir, par exemple l'ouvrage de Dummett mentionné plus haut).

Un extrait de l'article d'Emil L. Post : Une théorie générale des propositions élémentaires

Systèmes de vérité m-valués.

11. Le système généralisé $(\sim, \vee)$. - Nous avons vu que la généralisation des tables de vérité, au moins par rapport aux systèmes complets, est incluse dans le développement des postulats. Nous montrons maintenant que ce dernier est plus général en présentant une nouvelle classe de systèmes, distincts des systèmes à 2 valeurs de la logique symbolique, qui peuvent être engendrés par un ensemble complètement fermé de postulats.

Dans ces systèmes, au lieu des deux valeurs de vérité $+$, $-$, on a m valeurs de vérité distinctes $t_1, t_2, \ldots, t_m$, où m est n'importe quel entier positif. Une fonction d'ordre n aura m^n configurations dans sa table de vérité, c'est-à-dire qu'il y aura m^{m^n} tables de vérité d'ordre n. En appelant système complet un système qui a toutes les tables possibles, nous montrons maintenant que les deux tables ci-dessous engendrent un système complet.

p	$\sim_m p$
t_1	t_2
t_2	t_3
$\ldots$	$\ldots$
t_m	t_1

p, q	$p \vee_m q$	
$t_1 t_1$	t_1	
$\ldots$	$\ldots$	
$t_{i_1} t_{j_1}$	t_{i_1}	$i_1 \leq j_1$
$\ldots$	$\ldots$	
$t_{i_2} t_{j_2}$	t_{j_2}	$i_2 \geq j_2$
$\ldots$	$\ldots$	
$t_m t_n$	t_m	

Nous voyons que $\sim_m p$, la généralisation de $\sim p$ permute les valeurs de vérité de façon cyclique, alors que $p \vee_m q$, la généralisation de $p \vee q$ a la plus grande des deux valeurs de vérité [1].

Pour construire une fonction pour toute table du premier ordre, qui sont au nombre de m^m, notons que

$$'t_1(p). = .p \vee \sim_m p. \vee_m \sim_m^2 p : \vee_m \ldots \sim_m^{m-1} p \quad Df,$$

où $\sim^2 p. = . \sim\sim p \quad Df$, etc., a toutes ses valeurs de vérité t_1. Alors

$$\tau_{m_1}(p). = . \sim_m^{m-1} (\sim_m t_1(p). \vee_m .p) : \vee_m . \sim_m^{m_1} p) \quad Df$$

American Journal of Mathematics, vol. 43, n°3, juillet 1921, p.180 à 182

1. La plus grande valeur de vérité a le plus petit indice.

a toutes les valeurs t_m exceptée la première qui est t_{m_1}. Toute table du premier ordre

p	$f(p)$
t_1	t_{m_1}
t_2	t_{m_2}
$\ldots$	$\ldots$
t_m	t_{m_m}

peut alors être construite par la fonction

$$\tau_{m_1}(p). \vee_m .\tau_{m_2}(\sim_m^{m-1} p) : \vee_m.\tau_{m_3}(\sim_m^{m-2} p) : . \vee_m \ldots \tau_{m_m}(\sim_m p).$$

Construisons maintenant une fonction pour la table

p	$\overline{\sim}_m\, p$
t_1	t_m
t_2	t_{m-1}
$\ldots$	$\ldots$
t_m	t_1

et définissons $p._m q. = . \overline{\sim}_m\ (\overline{\sim}_m\ p. \vee . \overline{\sim}_m\ q)\quad Df$ qui est la généralisation de $p.q$ et qui a la plus basse des deux valeurs de vérité de ses arguments. Nous pouvons maintenant construire une table dont toutes les valeurs sont les t_m excepté pour une configuration $t_{m_1}, t_{m_2}, \ldots, t_{m_n}$ quand elle vaut $t_{m_{m_1 m_2 \ldots m_n}} = t_\mu$ par la fonction

$$\tau_\mu(\sim_m^{m-m_1+1} p_1)._m\tau_\mu(\sim_m^{m-m_2+1} p_2)._m \ldots \tau_\mu(\sim_m^{m-m_n+1} p_n),$$

et ainsi n'importe quelle table en construisant une telle fonction pour toute configuration et en “sommant” par $\vee_m$.

12. Classification de fonctions - Analogie de l'espace de dimension m

La généralisation de la classification des fonctions en positive, négative et mixte est permise par le théorème suivant :

Théorème. *Une fonction contient au moins une fonction pour toute table de vérité dont les valeurs sont contenues parmi les valeurs de la table donnée.*

Soient $t_{m_1} \ldots t_{m_\mu}$, les valeurs de vérité qui apparaissent dans la table d'une fonction donnée $f(p1, p_2, \ldots p_n)$. Alors nous pouvons sélectionner μ configurations qui ont respectivement ces valeurs. Construisons des fonctions $\phi_i(p)$ telles que quand p a la valeur t_{m_j} de l'une de ces configurations, $\phi_i(p)$ a la valeur de p_i dans cette configuration. Il est alors facile de voir que $f(\phi_1(p), \ldots, \phi_n(p))$ a la valeur t_{m_j} à chaque fois que p a la valeur t_{m_j}. Si alors $\psi(q_1, q_2, \ldots, q_l)$ a une table dont les valeurs sont parmi les t_{m_j}, $f(\phi_1(\psi), \ldots, \phi_n(\psi))$ sera une fonction contenue dans la fonction donnée avec cette table.

Nous sommes alors amenés à une classification des fonctions au moyen de leurs tables de vérité de telle manière que l'ensemble des tables contenues dans une fonction donnée est la même pour toutes les fonctions dans une classe donnée. Nous avons alors m classes de fonctions à une seule valeur de vérité, $[m(m-1)]/2!$ avec deux valeurs de vérité, $[m(m-1)\ldots(m-\mu+1)/\mu$ avec μ valeurs de vérité, ..., une classe avec toutes les m valeurs de vérité. Nous avons ainsi $2^m - 1$ classes de fonctions qui lorsque $m = 2$ se réduisent aux trois classes de fonctions positives, négatives et mixtes.

Ces formules suggèrent une analogie qui, si elle est bien fondée, est d'un grand intérêt. Dans ce but, remplaçons l'ensemble des fonctions ayant un ensemble donné de μ valeurs de vérité par toutes les fonctions dont les valeurs sont parmi ces μ valeurs. Si alors nous comparons les fonctions de notre système complet à un espace à m dimensions [2], les m classes de fonctions à une seule valeur de vérité correspondront aux m axes de coordonnées, les $[m(m-1)]/2!$ classes de fonctions avec pas plus de deux valeurs de vérité aux $[m(m-1)]/2!$ plans de coordonnées, etc., de telle façon qu'excepté en l'absence d'origine, toutes les propriétés de détermination et d'intersection dans les configurations de coordonnées passeront. Si alors nous appelons notre système "espace de vérité à m dimensions", nous observons la différence suivante, qui est qu'alors qu'intuitivement, l'espace de points de la dimension la plus grande est 3, l'espace propositionnel intuitif de plus grande dimension est de dimension 2. Mais de la même façon que nous pouvons interpréter les espaces géométriques de plus grandes dimensions en utilisant d'autres éléments que les points, nous interprèterons plus tard les espaces de plus grandes dimensions de notre logique en prenant un autre élément que la proposition.

2. ou bien on peut prendre la table de vérité comme élément auquel cas le système est peut-être plus lisse que précédemment.

Les frissons de l'abstraction
Paul R. Halmos

Ma femme et moi avons récemment été invités à une fête, à laquelle ont assisté quatre autres couples, soit un total de dix personnes. Certains de ces dix connaissaient certains des autres, et pour certains, ce n'était pas le cas, certains ont été polis et d'autres non. En conséquence, un certain nombre de poignées de mains ont été échangées de manière imprévisible, sous réserve seulement de deux conditions évidentes : personne ne s'est serré la main et aucun mari n'a secoué la main de sa femme. Quand tout était fini, je suis devenu curieux et j'ai fait le tour de la fête demandant à chaque personne : "Combien de mains avez-vous serrées ?...". "Et vous ?...". "Et vous ?". "Quelles réponses aurais-je pu recevoir ?" Peut-être que certaines personnes auraient pu dire "Aucune", et d'autres auraient pu me donner n'importe quel nombre entre 1 et 8 inclus... C'est vrai, non ? Étant donné que les "auto"-poignées de main et les poignées de main du conjoint étaient exclues, 8 est le nombre maximum de mains que n'importe qui parmi les 10 a pu secouer.

J'ai demandé à neuf personnes (tout le monde, y compris ma propre femme), et chaque réponse a été l'un des neuf chiffres de 0 à 8 inclus. Ça m'intéressait de noter les réponses, et je déclare par la présente que les neuf personnes différentes m'ont donné neuf réponses différentes ; l'un(e) a dit 0, quelqu'un a dit 1, et ainsi de suite, et, enfin, quelqu'un a dit 8. Quand ça a été fini, ma curiosité était satisfaite : je connaissais toutes les réponses. Le lendemain matin, j'ai raconté l'histoire à mes collègues de bureau, exactement comme je l'ai racontée maintenant, et je les ai défiés de me dire, sur la base des informations juste fournies, de me dire combien de mains ma femme avait serrées.

Je mentionne ce problème non pas parce que c'est ce que je veux principalement dire (mais je chuchote entre parenthèses que c'est un problème légitime et de bonne foi, et que mes collègues auraient pu le résoudre), mais parce qu'il illustre, en quelque sorte, l'un des principes mathématiques de base dont je veux discuter. Voici une autre question, qui mène à un autre principe mathématique de base : existe-t-il un nombre qui a la propriété que quand on le multiplie par lui-même cinq fois, le résultat est le même que si on lui ajoute 2 ? Quiconque n'a pas réussi à rester complètement innocent par rapport à l'algèbre du lycée reconnaîtra la question comme une manière non symbolique de demander si l'équation $x^5 = x + 2$ a des solutions.

Nombres, phonèmes et espèces

Voici encore une question : qu'y a-t-il de commun entre le concept biologique d'espèce, le concept linguistique de phonème, et le concept mathématique de nombre ?

Je vais passer aux questions dans l'ordre inverse, mais avant de faire cela, j'aimerais décrire le leitmotiv de toute la discussion.

Qu'est-ce qu'un trou noir ? Je ne sais pas, mais j'en ai une vague idée de temps en temps lorsque je lis un article informel dans un journal ou un magazine. Cela semble être quelque chose de très très lourd - si lourd que toute chose qui entre un jour dans son domaine d'attraction gravitationnelle ne peut alors plus jamais lui échapper, pas même la lumière, et, par conséquent, c'est quelque chose que nous ne pouvons jamais percevoir avec aucun de nos sens - quelque chose que nous ne pouvons jamais voir, entendre, sentir, goûter ou sentir. Un trou noir a une influence mesurable sur une partie du monde que nous pouvons percevoir, mais il est lui-même une abstraction. Ce que j'ai dit est probablement faux, mais je pense que même ma notion vague et erronée d'un trou noir mérite d'être connue - quand je l'ai appris, mon âme a grandi, cela m'a enrichi. J'ai eu cette vision dont je n'avais jamais rêvé auparavant, mon imagination était stimulée d'une manière nouvelle.

Toutes les parties de l'effort intellectuel humain ont leurs abstractions : l'économie l'utilité du brouillard, le "ça" du psychologue, la molécule du chimiste, l'espèce du biologiste, le phonème du linguiste, et, bien sûr, le nombre du mathématicien - tout cela est abstractions, et chacune de ces abstractions est une partie séminale du champ auquel elle appartient. Quand j'ai demandé cependant ce qu'espèce, phonème et nombre ont en commun, je ne voulais pas seulement recevoir la réponse superficielle que ce sont toutes des abstractions. La question demande plus que cela.

Un dictionnaire pourrait définir un phonème d'une langue comme "la plus petite unité de parole qui distingue un mot d'un autre". C'est trop rapide, trop superficiel, trop simpliste, mais c'est le début d'une définition. Un exemple aidera à clarifier le problème. Si je remplace b par m dans "*bat*", j'obtiens un autre mot anglais, "*mat*", cela signifie quelque chose de complètement différent ; c'est pourquoi b et m appartiennent à deux phonèmes anglais différents.

Considérez, d'autre part, les mots "*stone*" et "*tone*". Est-ce que tout le monde réaliser que le t sonne différemment dans ces mots ? Dans "*tone*", il est aspiré, et dans "*stone*" ce n'est pas le cas. Par aspiré, le linguiste veut dire que si je tiens un bout de papier à deux ou trois pouces de mes lèvres et que je dis "*tone*", le papier se déplacera, mais si je dis "*stone*", ce ne sera pas le cas. Il y a des langues (je crois que l'hindi est l'une d'entre elles) dans lesquelles le remplacement d'un t non aspiré par un t aspiré peut changer le sens (juste comme le remplacement de b par m change le sens de "*bat*"). En anglais, cependant, bien que les phonéticiens et leurs machines puissent faire la distinction entre les deux t, il n'y a pas de contexte dans lequel le remplacement de l'un par l'autre change le sens. Si une personne qui n'est pas un locuteur natif de l'anglais utilise un t sans inspiration où il ne devrait pas, nous sentons qu'il y a quelque chose de légèrement décalé, qu'il a un accent étranger dans un certain sens, mais nous n'avons aucune difficulté à le comprendre. En ce qui concerne l'anglais, les deux t concernés sont "iso-sémantiques". Ce mot n'existe pas, je l'ai inventé - mais tout le monde peut probablement deviner ce qu'il signifierait s'il existait : il signifie que le remplacement d'un mot par l'autre préserve le sens.

Qu'est-ce donc qu'un phonème ? Ou, mieux demandé, quel est le phonème d'un son ? *Réponse* : la collection de tous les sons qui sont iso-sémantiques avec lui. Puisque b et m ne sont pas iso-sémantiques, b n'appartient pas au phonème de m, mais le t dans "*tone*" appartient au phonème du t dans "*stone*".

Une analyse similaire de la notion d'espèce est possible, mais je ne m'y consacrerai pas maintenant. Un dictionnaire pourrait définir une espèce comme "un ensemble d'organismes capables de métissage", mais avant de pouvoir discuter de l'analogue pertinent de "iso-sémantique", nous aurions besoin de trier les sexes, et cette digression, bien que peut-être intéressante, prendrait trop de temps.

Le concept de nombre est plus proche et, au moins dans les cercles mathématiques, très bien connu. Nous utilisons tous des mots comme "*cinq*" chaque jour, mais beaucoup de gens se demandent ce que c'est que "*cinq*" ? Et, d'ailleurs, ne devraient-ils pas avoir honte d'eux-mêmes ? Nous n'utiliserions pas des mots tels que "$grand - père$", ou "*taxe*", ou "*tondeuse* à *gazon*" sans pouvoir les définir, i.e. sans, pour être précis, pouvoir dire à un enfant de dix ans exactement ce qu'est un grand-père, ou une taxe, ou une tondeuse à gazon, mais le défi est de lui dire exactement ce qu'est un nombre. Je ne veux pas dire ce que fait un nombre, ou comment un nombre peut être utilisé - je veux dire vraiment ce qu'il *est*.

D'accord : qu'est-ce que "5" ? Nous ne le savons peut-être pas, mais nous savons que si c'est la réponse à "Combien de doigts y a-t-il sur votre main droite ?", alors c'est aussi la réponse à "Combien de joueurs y a-t-il dans une équipe de basket-ball ?". En d'autres termes, alors que nous ne savons pas ce qu'est un "nombre", nous savons quand deux ensembles d'objets (que ce soit des doigts, ou quoi que ce soit) sont "équipotents". Ils sont tels que nous pouvons établir un correspondance entre eux (par exemple, en désignant chaque basketteur sur l'équipe avec un doigt différent) qui est une correspondance individuelle telle qu'à chaque objet dans chaque ensemble correspond un objet unique dans l'autre ensemble.

Qu'est-ce donc qu'un nombre ? Ou, mieux demandé, quel est le nombre d'objets d'un ensemble ?
Réponse : la collection de tous les ensembles équipotents à ce nombre.

Abstraction et attitude : relations d'équivalence et extensionnalisme

Ceci est une définition abstraite, c'est une définition effrayante, c'est une ingénieuse définition. Elle est due à Bertrand Russell, et cela m'amène maintenant à commenter deux choses : primo, une abstraction, un concept mathématique de base, qui comprend la façon dont les espèces, les phonèmes, les nombres et de nombreux autres concepts dans de nombreuses parties de la vie sont pensés du mieux qu'il est possible, et secundo, une attitude, une position philosophique, que certains mathématiciens embrassent, et qui contribue grandement à la clarté et à la précision des mathématiques. Le nom du concept est "relation d'équivalence", et il est bien connu et le nom de l'attitude est "extensionnalisme" et, bien que cette attitude ne soit pas rare, le mot qui lui est associé, pour autant que je sache, est quelque chose que j'utilise depuis peu de temps en privé, mais personne d'autre n'en a jamais entendu parler.

Une relation d'équivalence est une relation qui a trois propriétés en commun avec les relations d'être iso-sémantique et équi-nomère, à savoir qu'elle est réflexive, symétrique et transitive. Le remplacement d'un énoncé par lui-même (qui n'est, bien sûr, pas un remplacement du tout) conserve sûrement du sens, et chaque ensemble a une correspondance individuelle avec lui-même - c'est ce que signifie "réflexif". Officiellement : une relation est réflexive lorsqque chaque objet dans son domaine est en relation à lui-même. Ainsi, par exemple, la paternité n'est pas réflexive - personne ne peut être son propre père - et si la fraternité entre, disons, les hommes est ou n'est pas selon un petit débat au sujet de la façon dont vous voulez utiliser les mots. Suis-je mon propre frère ?

Dire qu'une relation est "symétrique" signifie que les rôles de deux objets en relation peuvent toujours être inversés. Exemple : le son initial dans "*pit*" est iso-sémantique avec le son initial dans "*pendule*", puis, inversement, le son initial dans "*pendule*" est iso-sémantique avec le son initial dans "*pit*". De même : les membres d'une équipe de basket peuvent être mis en relation bi-univoque avec les doigts de ma main droite, puis, vice versa, il y a autant de doigts dans ma main droite que de joueurs dans une équipe de basket-ball. Voici quelques contre-exemples : la paternité n'est pas symétrique (mon père est en relation avec moi, mais je ne suis pas en relation avec lui), et la tendresse n'est pas symétrique - même s'il arrive souvent que quelqu'un que j'aime m'aime, ce n'est pas garanti, et une seule exception réfute l'universalité de la propriété.

La "transitivité" est un concept tout aussi simple, mais il faut un peu plus de temps pour le dire. Si trois sons sont iso-sémantiques dans l'ordre, c'est-à-dire que le premier et le second sont iso-sémantiques, et le deuxième et le troisième le sont, alors il s'ensuit que le premier et le troisième le sont aussi.

Un contre-exemple bien connu est l'amitié : il n'est pas toujours vrai que si Tom est l'ami de Dick et si Dick est l'ami de Harry, alors Tom est l'ami de Harry.

Voilà donc ce qu'est une relation d'équivalence : une relation réflexive, symétrique et transitive. Et chaque fois que nous rencontrons une relation d'équivalence, les objets auxquels elle s'applique peuvent être divisés en ce qu'on appelle des classes d'équivalence et, en utilisant ce vocabulaire, je peux maintenant dire qu'un phonème est une classe d'équivalence de la relation être iso-sémantique, et qu'un nombre est une classe d'équivalence de la relation être égal.

C'est l'un de mes principaux points, et quand je l'ai appris, j'ai senti que j'avais gagné un aperçu passionnant - c'est ce que je veux dire par un frisson d'abstraction. La notion de relation d'équivalence est l'une des composantes de base sur lesquelles la pensée de tous les mathématiciens est construite. C'est simple, c'est général, c'est largement applicable, et c'est 100% explicite et précis. Et, de plus, cela n'a rien à voir avec des colonnes de nombres ou des triangles ou des ordinateurs électroniques ou quoi que ce soit d'autre dont on pense parfois que cela constitue la pensée mathématique - c'est de la pensée abstraite pure.

Maintenant, à propos de "l'extensionnalisme" - là je ne suis pas sûr de pouvoir expliquer ce que je ressens. En une courte phrase, ce que j'essaie de dire, c'est que pour un mathématicien - en tout cas, pour moi - un concept EST son extension. Prenons, par exemple, le chiffre 5. Qu'est-ce que c'est ? Pas "Que fait-il ?", "Comment peut-il être utilisé ?", Ou "Comment le distinguer des autres ?", mais "Qu'est-ce que C'EST ?". Les mathématiciens posent généralement de telles questions : leur insistance sur les définitions et leur insistance sur la précision totale dans la définitions et la cohérence complète dans leur utilisation est l'un des signes distinctifs caractéristiques de leur art. L'"extension" d'une propriété (un ancien terme provenant du domaine de la philosophie) est la classe de tous les objets qui possèdent cette propriété. Ainsi, l'extension du "bleu" est la classe de toutes les choses bleues - le ciel, le Danube, les livres, les cravates, peu importe - tout ce qui est bleu. L'extension de "5" est la classe de toutes les équipes de quintuples - équipes de basket-ball, les doigts d'une main, peu importe. Un lexicologue prudent pourrait être prêt à aller aussi loin avec le mathématicien : très bien, il pourrait dire, 5 est la propriété commune à tous les quintuples. Le mathématicien rigoureux considérerait qu'il charrie, cependant. Qu'est-ce au juste qu'une "propriété", demanderait-il. Et comment osons-nous parler de "la" propriété commune de l'ensemble de tous quintuples - comment savons-nous qu'il n'y en a qu'un ? Non, monsieur !, il dirait : tout ce que je veux vraiment savoir sur la "cinquitude", c'est que je suis prêt à l'affirmer des doigts de ma main droite, et, à partir de là, de tout autre ensemble que je peux mettre en correspondance un à un avec ces doigts. En d'autres termes, il dirait, je connais l'extension de la cinquitude et c'est tout ce que j'en sais. La seule façon courageuse de définir 5, est donc de suivre le principe selon lequel un concept EST son extension et, en tant qu'extensionnaliste religieusement observateur, je *définis* donc 5 comme étant la classe d'équivalence d'équipotence à laquelle appartient le jeu de doigts de ma main droite.

Il y a quelque chose de froid et d'interdit, quelque chose d'impersonnel et d'effrayant, à propos de cette définition, on pourrait penser que, même si elle est intellectuellement, défendable, il manque en quelque sorte l'essence du concept en cours de définition. Cela me rappelle la définition classique, et tout aussi insatisfaisante d'un homme comme un “bipède sans plumes”. Quand je l'ai entendu pour la première fois, je m'y suis opposé. Je pensais sûrement que l'humanité, c'est plus que ça. Qu'en est-il de l'âme, de l'humour, de l'art, de la culture, la technologie, la guerre, l'amitié, la maternité - qu'en est-il de tous ces caractères “essentiels”, les caractéristiques de l'humanité - une définition de sang-froid comme “bipède sans plumes” ne les rate-t-elle pas tous, et ainsi rate son but ? Après de nombreuses années pendant lesquelles je me suis accoutumé à l'idée, je ne ressens plus ce malaise en présence d'une définition par extension. S'il est effectivement vrai (je répète : *s'il* est effectivement vrai, je n'affirme pas que ça le soit) que l'humanité est co-extensive avec la classe des bipèdes sans plumes, alors l'humanité est la classe des bipèdes sans plumes. Et, de la même façon, puisque la “cinquitude” est co-extensive avec la classe de tous les quintuples, j'embrasse joyeusement la définition selon laquelle 5 *est* cette classe.

Rêveurs et preuves non constructives

Il est temps que je me tourne vers la deuxième des trois questions que j'ai posées, afin de décrire une seconde croyance et un comportement mathématiques de base très différents. Existe-t-il, ai-je demandé, un nombre qui multiplié par lui-même 5 fois donne le même résultat qu'en lui ajoutant 2 ? Il y a des personnes, tant chez les rêveurs que chez les personnes au grand sens pratique, qui répondraient à cette question par oui seulement si elles pouvaient produire explicitement un numéro avec la propriété décrite, ou, à tout le moins, dans le pire des cas, si elles pouvaient explicitement décrire un algorithme, une procédure de calcul, qui produirait un tel nombre. Ainsi, par exemple, si je change le nombre 2 du problème en 240, et si j'observe que $3^5 = 243$, qui est égal à $3 + 240$, alors, je pense que nous serions tous d'accord pour dire qu'il a été répondu à la question modifiée par l'affirmative.

Il existe cependant une autre façon de répondre à ces questions, la méthode des preuves non-constructives, dont je donnerai un modeste exemple. Imaginez que j'ai un ordinateur ultra-efficace mais pas spécialement intelligent, programmé pour me dire instantanément lequel est le plus grand de x^5 ou $x + 2$, chaque fois que je lui pose la question pour un nombre entier particulier x, mais qui ne connaît que les nombres entiers. D'accord, je dis à l'ordinateur, allons-y : $x = 0$. Il dit : $x + 2$ est supérieur à x^5. Je dis : $x = 1$. Il dit : $x + 2$ est plus grand. Je dis : $x = 2$. Il dit : x est plus grand. Je dis : Hourra ! - le jeu est terminé, et la réponse est oui. C'est vrai, non ? Si je m'imagine me déplacer le long de la ligne, balayant tous les nombres à partir de 0, et si je sais que quelque part (disons, quand $x = 1$), $x + 2$ est le plus grand de x^5 et $x + 2$, et qu'un peu plus tard (lorsque $x = 2$) x^5 est le plus grand, alors, par une propriété intuitivement évidente et rigoureusement prouvable, je peux être assuré que quelque part entre les deux, x^5 et $x+2$ seront exactement égaux.

Qu'est-ce que je sais maintenant que je ne savais pas avant ? Est-ce que je connais un nombre x tel que $x^5 = x + 2$? Non, non. Tout ce que je sais, mais je le sais avec certitude, c'est que même si je ne suis pas (pas encore !) capable d'en construire un, un tel nombre existe.

Je viens de donner, comme je l'ai promis, un modeste exemple de non-constructivité d'une preuve d'existence. J'appelle cela un exemple “modeste”, car, en fait, avec un peu de difficultés, il peut être converti en un algorithme concret qui produira un nombre du type souhaité aussi précisément que voulu : au profit du lecteur qui meurt de curiosité, je fournis une réponse arrondie à cinq décimales, qui est 1,26717.

Les véritables preuves d'existence non constructives, du genre de celles qui ne peuvent pas être converties en une procédure de calcul, sont parfois une source de débats animés dans la communauté mathématique. Ce sont des démonstrations impressionnantes de l'ingéniosité humaine et de la profondeur de la pensée mathématique. Parfois, par exemple, afin de prouver qu'un certain ensemble (comme l'ensemble des points sur la droite numérique) contient au moins un objet d'un type particulier (tel qu'un nombre x pour lequel $x^5 = x + 2$), un mathématicien pourrait utiliser une méthode “stochastique”. C'est un concept compliqué dont les détails de la description nous mèneraient trop loin, mais en termes qualitatifs, cela signifie quelque chose comme ça. Concevoir un jeu de hasard, un jeu de dés, disons, dont les résultats possibles sont les objets de l'ensemble considéré ; utiliser les propriétés souhaitées pour les objets particuliers dont on cherche à prouver l'existence, et calculer la probabilité que le jeu de hasard produira l'un de ces objets. Si cette probabilité se révèle être un nombre positif (en d'autres termes, pas 0), alors nous pouvons être sûrs que l'ensemble des objets souhaités ne sera pas vide - des objets comme ça doivent exister - même si la méthode de la preuve ne donne même pas un espoir de ce côté du paradis de ne jamais en exposer concrètement un.

La méthode stochastique est un exemple beaucoup plus juste d'une approche non constructive d'existence plutôt que la “modeste” preuve basée sur la continuité. Beaucoup de preuves d'existence non constructives utilisent une certaine notion de “taille” d'un ensemble (comme la probabilité ou la dimension, ou même un nombre cardinal), et atteignent leur but en prouvant que la taille de l'ensemble des objets dont l'existence n'est pas connue est suffisamment grande pour garantir que cet ensemble n'est pas vide !

Le principe des tiroirs

La toute première question que j'ai posée (Vous rappelez-vous ? Il s'agissait de la question concernant les nombres de poignées de mains.) peut être utilisée pour illustrer un troisième principe de pensée de base de mathématiques passionnantes, pures et abstraites, le soi-disant principe des tiroirs, ou principe du trou de pigeon, mais je pense que je vais céder à ma tendance congénitale au sadisme mathématique, et laisser cette question en suspens comme un défi pour vous, je vais utiliser une autre question pour expliquer le principe des tiroirs.

Supposons qu'un certain nombre d'entre nous soyons ensemble dans une pièce, 100 d'entre nous, disons, et que nous formions temporairement une petite société à nous. Dans cette société fermée, il existe un certain nombre de relations de connaissances : certains d'entre nous en connaissent d'autres. Je ne sais pas lesquels d'entre nous connaissent quels autres, mais je suis sûr d'une chose : je parie qu'au moins deux d'entre nous ont le même nombre de connaissances.

Le croyez-vous ? Voyons voir si je peux vous fournir un argument convaincant. Supposons que quelqu'un demande, à chacun de nous, moi-même inclus, "Avec combien d'autres personnes de cette société fermée êtes-vous en relation ?". Nous pourrions tous lui répondre "un nombre entre 0 et 100". Non, attendez une minute. Si nous sommes exactement 100, alors personne d'entre nous ne connaît 100 autres personnes ; le plus grand nombre ne peut pas dépasser 99. Pour autant que 0 est concerné, ça va, il pourrait bien y avoir des ermites parmi nous, mais ce n'est pas probable, et, en tout état de cause, je peux facilement régler ce cas. S'il y a deux ermites ou plus, alors j'ai déjà gagné mon pari : deux ermites ont le même nombre de connaissances. S'il n'y a qu'un ermite, alors ostracisons-le, ne le comptons pas, allons jusqu'à prétendre qu'il n'est pas là. Je dois encore prouver que parmi les 99 restants, nous sommes deux avec le même nombre de connaissances, et je vais le faire, mais parce que 100 est plus facile à dire que 99, je suppose que même si le seul ermite possible n'est pas compté, nous sommes encore 100.

Alors, quels chiffres possibles chacun des 100 d'entre nous donnera-t-il au questionneur ? Réponse : tout nombre compris entre 1 et 99 inclus. Qu'est-ce que je parie ? Réponse : que deux d'entre nous donneront le même numéro à celui qui pose la question. En effet : comment pourrions-nous échouer ? Il n'y a que 99 chiffres à lui dire et nous sommes 100 à dire : il doit y avoir au moins une répétition.

N'est-ce pas joli ? Je pense que ça l'est et, soit dit en passant, c'est une application du principe des tiroirs impressionnante mais enfantine de facilité. Le principe dit que si nous avons un certain nombre de pigeonniers, et s'il y a plus de lettres que de pigeonniers, alors au moins un pigeonnier contiendra plus d'une lettre. Ce principe d'une simplicité enfantine est encore un autre élément de base des mathématiques que l'on utilise encore et encore, parfois dans des contextes très sophistiqués, et c'est la colonne vertébrale de toutes les mathématiques dites finies ou combinatoires.

Notez que les trois principes de base que j'ai décrits jusqu'à présent sont de trois sortes différentes. La "relation d'équivalence" est un concept ; la preuve d'"existence non constructive" est une technique (et une attitude) ; et le principe des tiroirs est un théorème, un fait (avec, bien sûr, des millions d'applications et des cas spéciaux très différents). Je pourrais vous présenter, et pour plus de clarté, je suis sûr que j'aurais dû le faire, d'autres exemples des domaines d'application des trois principes de base déjà mentionnés, et, du même coup, j'aurais pu et dû donner d'autres principes, qui sont utilisés dans d'autres problèmes. Tout comme l'exhaustivité dans une discussion comme celle-ci est impossible en quelques pages, mais je pourrais peut-être rendre davantage justice à la fois au sujet et au lecteur en mentionnant au moins ce qui aurait pu être dit d'autre.

Ainsi, par exemple, est-il évident que le cadran d'une horloge est, en fait, une image d'une relation d'équivalence ? (Je pense à la relation entre deux nombres qui tient lorsque l'un est obtenu de l'autre en lui ajoutant 12, ou, d'ailleurs, n'importe quel multiple de 12, de sorte que 13 heures est représenté par la même aiguille que 1 heure.). Ou bien est-il évident que l'arrondi vers le bas (autorisé par l'Internal Revenue Service lorsque nous calculons notre impôt sur le revenu) définit une relation d'équivalence ? (En ce sens, une taxe de 317,23 $ équivaut à 317,00 $; plus généralement, deux taxes calculées sont équivalentes si vous ignorez les centimes, à nombre d'euros égal, n'importe quel nombre de centimes, compris entre 1 et 99, les rend égaux.)

Quant aux exemples de preuves d'existence non constructives : beaucoup d'entre elles dépendent de la fameuse loi (pour certains infâme) du tiers exclu. Voulons-nous prouver qu'une certaine construction mathématique "existe" ? Très bien, supposons qu'il n'y a pas de nombre, ou triangle, ou autre, qui réponde à la définition avec laquelle nous sommes en train de travailler ; nous allons supposer cette hypothèse (d'existence), et, si nous sommes chanceux, nous aboutirons alors à une contradiction. Conclusion : la non-existence est intenable, et au moins une instance de l'objet doit effectivement exister. Ce genre de preuve d'existence non constructive rend les gens qui n'y croient pas plus en colère que tout le reste.

Existe-t-il des nombres normaux ?

D'autres exemples de preuves non constructives peuvent être faites dans la théorie des soi-disant "nombres transcendants" (il y a, au sens de la théorie des ensembles de Cantor, "plus" de nombres transcendants que de nombres non transcendants donc il doit y en avoir au moins un), et dans la théorie des nombres “normaux” (la “longueur” de l’ensemble des des nombres normaux, ou, en d’autres termes, la “probabilité” qu’un nombre soit normal, n’est pas nulle, et donc il doit y avoir au moins un tel nombre).

La dernière chose que j’ai mentionnée est suffisamment intéressante pour que je sois fortement tenté d’entrer dans un petit détail technique. Je promets que ça ne durera pas longtemps.

Dans cette discussion, les “nombres” que je veux considérer sont les fractions propres - les nombres positifs qui n’ont pas de partie entière, tels que

.5000000....
.3333000....
.3333333....
.142857142857....
.12345678901234567890....

Quand on regarde la forme décimale d’un tel nombre, on peut se demander à quelle fréquence le chiffre 8 se présente dans cette forme, comme tendance moyenne à long terme ? La réponse pour les trois premiers nombres ci-dessus est “jamais” - 8 n’est tout simplement pas dans la loi. La réponse pour le quatrième chiffre après la virgule est “à fréquence un sixième”. Ce n’est pas clair ? Il y a exactement un 8 dans chaque groupe de six chiffres ; parmi le premier million de chiffres, le nombre de 8 est d’environ un sixième, et si nous remplaçons “millions” par de plus en plus, l’approximation d’un sixième devient de plus en plus presque parfaite. Pour le dernier nombre de la liste, le la réponse est “un dixième” ; le raisonnement est le même que ci-dessus.

Il y a dix chiffres à notre disposition, et nous pourrions considérer qu’un nombre est “juste” si chacun d’eux est traité de la même manière que tous les autres - en d’autres termes, si chacun des dix chiffres se produisent dans ce nombre exactement un dixième du temps, à long terme en moyenne. En ce sens, seul le cinquième des cinq nombres de ma liste d’exemples est juste.

Il existe cependant une notion d’équité plus sophistiquée, selon laquelle aucun des nombres de ma liste n’est juste. Pour illustrer ce que je veux dire, permettez-moi de poser cette question. Étant donné un nombre (sous forme décimale, sans partie entière), à quelle fréquence est-ce que les chiffres 5 et 7 y apparaissent, côte à côte, dans cet ordre (dans le même sens d’en moyenne à long terme que précémment) ? La réponse est “jamais” dans tous mes exemples, sauf pour le quatrième, et dans ce cas, c’est “un sixième”. Pour voir ce que je veux dire, parcourez les chiffres, comptez tous les “blocs” de longueur deux, et gardez une trace de la proportion d’entre eux qui sont “57”.

Quelle devrait être la réponse si nous voulons considérer le nombre comme juste, juste non seulement selon chaque chiffre individuel, mais aussi selon chaque paire imaginable ? La réponse dépend du nombre de paires possibles - et la réponse est 100. C'est clair ? Bien sûr : il suffit de les compter, à partir de 00, 01, 02,. . . , 09, 10,. . . , à 97,98, 99. C'est cent, et, par conséquent, la seule façon dont un nombre peut être "juste par paire" est qu'il contienne chaque paire possible un centième du temps (dans la moyenne à long terme).

Pouvons-nous écrire un nombre qui soit juste pour chaque chiffre ainsi que pour chaque paire de chiffres ? Bien sûr, nous pourrions, avec du papier, un crayon et un peu de temps, mais dès que la tâche serait terminée, je serais prêt avec une nouvelle question à poser. La nouvelle question porterait sur des triplets, comme 293. Je refuserais maintenant de qualifier un nombre de l'adjectif juste à moins qu'il ne traite équitablement chaque chiffre (avec une fréquence un sur dix), chaque paire (avec une fréquence de un sur cent), et chaque triplet (avec une fréquence - sûrement que la réponse est devinable - de un sur mille). Et une fois que le schéma est clair, je peux le continuer : dans mon avidité infinie pour la justice, je vais exiger un nombre absolument juste, ce que je veux dire, c'est que c'est un nombre dans lequel tous les blocs de toutes longueurs se produisent avec la "bonne" fréquence (un sur dix, ou cent, ou mille, ou dix mille, etc., pour les suites de chiffres célibataires, doubles, triples, quadruples, etc.). Le nom technique et mathématique habituel n'est pas "absolument juste" mais "normal", et maintenant nous avons une question, une vraie, dure et juteuse question mathématique. Toutes ces conditions, infiniment nombreuses, peuvent-elles être satisfaites simultanément ? En d'autres termes : existe-t-il des nombres normaux ?

Question à laquelle je ne pense pas que la plupart des gens peuvent répondre, sauf s'ils sont professionnels membres cotisants du syndicat des mathématiciens. Mais la mathématicienne qui n'a pas peur des preuves d'existence non constructives, et qui a une petite quantité de formation en théorie moderne des probabilités, peut naviguer à travers cette question. Tout ce qu'elle doit faire est de considérer le processus de choix d'un nombre au hasard, pour par exemple lancer une flèche au hasard sur le segment de la droite numérique qui se trouve entre 0 et 1, calculer la probabilité que le nombre que la flèche frappe soit normal, et observer que la réponse n'est pas 0. Le calcul n'est pas trivial, c'est là que la technique mathématique est vraiment nécessaire. La probabilité de rendement n'est pas seulement différente de 0, mais elle en est aussi différente qu'elle pourrait l'être : elle est égale à 1. Dans d'autres mots : il est presque certain qu'un nombre choisi au hasard sera normal, ce qui garantit certainement que les nombres normaux existent.

Le nombre de ce que j'ai appelé les "principes mathématiques de base" est étonnamment petit. Personne ne les a jamais répertoriés, et ce serait une chose risquée et controversée que de le faire, mais la plupart des mathématiciens conviennent que les mathématiques sont une unité - tout est lié, avec tous les sujets entrelacés, et tous les concepts applicables partout - le nombre de briques nécessaires pour construire un édifice si merveilleusement compact ne peut pas être très grand.

C'est un commentaire général ; je voudrais en faire un de plus. J'ai parlé des frissons de l'abstraction et, en particulier, des frissons des mathématiques, que les gens considèrent en effet comme très abstraites. Serait-ce une contradiction si je disais maintenant que les mathématiques sont une science expérimentale ? Je pense que les mathématiques sont abstraites, et je pense que les mathématiques sont une science expérimentale, et je ne pense pas que ces deux croyances se contredisent.

Résoudre un problème mathématique n'est pas un acte déductif, c'est l'acte de deviner, de faires des essais et des erreurs, des expériences. Pour résoudre le problème des poignées de main, par exemple, pour cinq couples, nous pourrions faire bien pire que tout simplement, devine. Devinez, par exemple, que la réponse est 7, puis essayez et voyez ce qui, le cas échéant, est faux dans cette supposition. Une autre procédure, plus digne qui mérite plus d'être appelée une expérience, c'est de faire varier les conditions et d'essayer de résoudre certains cas qui, nous l'espérons, rendent le problème plus facile. Qu'arrive-t-il, par exemple, aux poignées de mains si on pose la question pour seulement quatre couples ? ou trois ? ou deux ? ou même un seul ?

Les abstractions sont des faits

Voilà le genre de chemin qu'un mathématicien au travail parcourt typiquement - son attitude n'est pas celle de la création mais celle de la découverte. La réponse est là quelque part, et nous n'avons aucun contrôle sur ce qu'elle est - tout ce que nous essayons de faire, c'est de la trouver. Les concepts, les techniques et les théorèmes sont abstraits, mais notre apprentissage à leur sujet procède de la même manière que notre apprentissage sur le point d'ébullition d'un produit chimique et l'accélération d'un corps qui tombe. Les abstractions sont des *faits*, des faits extérieurs à nous, des faits que nous n'inventons pas mais qui sont là pour nous si nous pouvons les trouver.

Certains lecteurs reconnaîtront, bien sûr, que la position que j'ai ainsi "prouvée" est celle d'un platonisme inflexible, mais ils ne retiendront pas, je l'espère, cela contre moi. Mes convictions (veuillez ne pas les appeler des préjugés) ont mis longtemps à grandir et je détesterais devoir les abandonner. Je suis convaincu que les mathématiques sont infinies dans leur étendue et leurs applications, mais présentent une unité dans leur manière conceptuelle de regarder les choses et les décrire ; les faits des mathématiques sont là qui attendent que nous les devinions, expérimentions et finalement tombions dessus ; les concepts, les techniques, et les faits sont abstraits, et, dans leur grande abstraction, ils sont l'un des plus passionnants phénomènes de l'univers.

PS : La réponse au problème des poignées de mains est 4.

Paul R. Halmos est professeur émérite de mathématiques de l'Université de l'Indiana, et Rédacteur en chef du “American Mathematical Monthly”. Il a obtenu son doctorat à l'Université de l'Illinois et a occupé des postes dans l'Illinois, à Syracuse, à Chicago, au Michigan, à Hawaï et Santa Barbara. Il a publié de nombreux livres et près de 100 articles et a été l'éditeur de nombreuses revues et de plusieurs séries de livres. L'*Association mathématique américaine* lui a décerné le prix Chauvenet et (deux fois) le prix Lester Ford pour ses exposés mathématiques. Ses principaux intérêts mathématiques sont la théorie de la mesure et la théorie ergodique, la logique algébrique et la théorie des opérateurs sur l'espace de Hilbert.

Deux extraits du Que sais-je ? La logique de Jean Largeault

Gödel[1] a montré qu'il n'y a pas de matrice à un nombre fini de valeurs de vérité où seules les formules prouvables de la logique propositionnelle intuitionniste H seraient vraies (prendraient la valeur 1). À cette fin il se donne une $M = \{1, ...n\}$, élément désigné 1, avec une valuation S_n ainsi définie :

$p \vee q = min(p, q)$; $p \wedge q = max(p, q)$; $p \rightarrow q$ vaut 1 si $p \geq q$, et vaut q si $p < q$; $p \leftrightarrow q$ vaut 1 si $p = q$, et max(p, q) sinon ; $\neg p$ vaut n si $p \neq n$, et vaut 1 si $p = n$.

Une disjonction $F_r =$, pour $1 \leq i < j \leq r$, c'est-à-dire :

$$(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee (p_1 \leftrightarrow p_3) \ldots \vee (p_1 \leftrightarrow p_r) \vee (p_2 \leftrightarrow p_3) \ldots \vee (p_2 \leftrightarrow p_r) \ldots \vee (p_{r-1} \leftrightarrow p_r)$$

est satisfaite si r est supérieur au nombre n des valeurs de vérité (alors pour au moins une paire $i, j, p_i = p_j$). F_{n+1} et les F_r avec un indice $r \geq n+1$ sont satisfaits, non pas les F_r avec $r \leq n$. Attendu que la réalisation S_n satisfait les axiomes de H et que les règles conservent cette propriété, aucune des disjonctions F_r n'est démontrable dans H. Il y a une infinité de matrices intermédiaires (une infinité de *logiques intermédiaires*) entre le système classique et H.

D'autre part, S_n ne réalise pas le tiers-exclus puisque pour $p \neq n$, $p \vee \neg p = min(p, n) > 1$ si $p \neq 1$. La logique intuitionniste, sans tiers-exclus, n'a pas *une* tierce valeur.

IV. La logique dans l'intuitionnisme

De l'intuitionnisme on ne retient souvent que le rejet du tiers-exclus, et la faute en incombe à Brouwer lui-même. La logique intuitionniste, malgré son intérêt mathématique (interprétation en termes de treillis des ouverts d'un espace topologique, interprétation des opérateurs intuitionnistes dans un univers de *topos*), et son affinement de la logique classique, n'est ni l'essentiel ni le plus fort de l'intuitionnisme.

Si une affirmation générale est permise, les constructivistes sont parmi ceux qui veulent que les mathématiques aient un sens. Dans ces contextes, *sens* veut dire *existence* : une expression a un sens s'il y correspond une réalité. Les constructivistes conçoivent ce sens ou cette réalité de diverses manières selon les écoles : tantôt un acte d'intuition éventuellement doué de pouvoir créateur (Brouwer, Poincaré) ou une connaissance directe portant sur des objets abstraits ou concrets (Weyl, Poincaré), tantôt des objets supposés immédiatement donnés, les entiers naturels (Kronecker, Bishop) ou bien munis d'algorithmes (école russe). À la différence des idéalistes et des

1. 1932, Collected Works, L, p. 222-225

formalistes, les constructivistes refusent d'identifier existence et non-contradiction : la logique ne contribue pas à un apport ontologique aux mathématiques.

Avec l'éloignement du temps, les idées de Brouwer ont paru désuètes aux penseurs d'avant-garde, qui estiment qu'une logique des mathématiques doit se fonder sur une théorie de la signification d'énoncés. La recherche d'une *théorie de la signification* aura rempli le siècle. Les versés ces sujets de haut niveau savent que la signification était fondamentale pour Frege, pour Bertrand Russell pour les néopositivistes, pour Wittgenstein et ses épigones, pour les épigones des néopositivistes, pour les épigones des épigones. L'énigme de la nature et de la fonction du sens n'en finit point d'occuper les professionnels de la philosophie verbale.

Les spécialistes de ce domaine posent en axiome que la signification est définie par les conditions de vérité : on a saisi le sens d'une phrase quand on sait si elle est vraie ou fausse, et en quelles circonstances elle est soit l'un soit l'autre. Les conditions de vérité classiques ne sont pas effectives, car elles ne permettent pas de savoir si elles sont réalisées ou non. Connaître à quelle condition une universelle (tous les x ont la propriété P) ou une existentielle (il existe un x qui a la propriété P) serait vraie ne fournit pas automatiquement de moyen de déterminer si elle l'est, pour peu que le parcours de valeurs de x soit infini (penser aux conjectures d'arithmétique non résolues). En de pareils cas, on ignore si les conditions de vérité sont réalisées ou non, la signification échappe à notre intelligence : elle n'existerait pour nous que si nous étions omniscients. Au contraire, convenir que p est vrai si on a une preuve de p replace la signification à portée de nos facultés intellectuelles, puisque, en principe, on sait reconnaître une démonstration quand on en a une. Aux conditions de vérité classiques l'*antiréalisme* substitue des conditions d'*affirmabilité*.

Dans les années 1925 s'était répandue à Vienne l'opinion que le sens d'un théorème réside dans sa démonstration. Ce slogan se retourne car il est aussi légitime de considérer que le sens (l'idée, la finalité, la raison) d'une démonstration réside dans l'énoncé du théorème. En tout cas l'accord de ce pseudo-axiome avec l'esprit de l'intuitionnisme historique est douteux : substituer des vérifications à la vérité est plutôt conforme à l'idéologie pragmatiste. "Les vérités qui se font" (W. James) sont utiles à la volonté. Cela va dans une direction opposée à l'attitude de désintéressement où Brouwer voyait un idéal. Des vérités qui procèdent d'une intelligence travaillant dans le cadre du principe d'individuation sont illusoires.

Pour descendre à un point de vue plus terre à terre, le fondateur conçoit la pensée abstraite et le langage comme deux ordres interdépendants. Puisqu'il attribue un rôle primordial à une pensée intuitive *sans langage*, il *ne peut pas* avoir de théorie de la signification d'énoncés. Il disait que les démonstrations sont des constructions introspectives, sans préciser quoi entendre par une construction : un processus, un résultat de processus, une réflexion sur un processus ? Brouwer admettait, à ce titre, des schémas dynamiques qui ne sont pas forcément des algorithmes d'engendrement (des suites de nombres non prédéterminées par une loi ou un principe génératif, à la différence de $\sqrt{2}$ ou de π), ce qui sort du constructivisme strict.

Détacher la logique intuitionniste des exemples et contre-exemples qui l'ont façonnée, la présenter comme un système baladeur qu'on choisirait de préférence à d'autres (par sympathie vérificationiste ou par haine du platonisme), risque d'être un contre-sens. De toute façon, ce tableau est inexact : parmi les systèmes non classiques, la logique intuitionniste occupe une place à part à cause de sa connexion étroite avec une conception originale et cohérente des mathématiques. Cette connexion est l'une des causes de son *intérêt*. Rien n'empêche, par changement de contexte, de considérer que la logique intuitionniste dépend d'une *philosophie du langage* ou d'une théorie de la signification (*enveloppe* serait moins inacceptable que *dépend*). L'honnêteté exigerait d'avertir qu'on en prend à sa guise avec la vérité historique. Dans l'intention du fondateur et de Heyting, la logique intuitionniste dépend d'une *philosophie des mathématiques*. Le problème auquel répond cette logique est de savoir comment une information finie peut permettre d'énoncer des propositions sur des objets infinis. On doute que les occurrences de la vie quotidienne nous placent devant ce genre de problème. Hilbert croyait qu'on atteint l'infini indirectement, par le moyen des signes (*Sur l'infini*, 1925). Brouwer était d'un autre avis : nous avons l'intuition d'un infini en devenir, présent dans l'itération du passage de l'unité à la deux-ité. La logique intuitionniste est la codification de formes de raisonnement sur des objets potentiellement infinis, autant que le contenu de ces raisonnements a déjà été éprouvé. (L'expérience introspective est la seule garantie de leur correction.

V. La critique intuitionniste du tiers exclu

Le non-contradictoire n'est pas le vrai. La logique intuitionniste inclut la critique du tiers-exclus, dont les raisons passent souvent inaperçues. Brouwer tenait à convaincre le monde mathématique que vérité et non-contradiction ne coïncident pas (la non-contradiction de la mathématique formelle n'entraîne pas sa vérité). Par expérience de pensée, il avait découvert la possibilité de systèmes incomplets, et de systèmes consistants non corrects. Dire que des théories peuvent être non contradictoires et non vraies [2] revient à dire que la correction n'y est pas réalisée. Là-dessus Brouwer anticipait les découvertes des logiciens qui, au cours des années 1930, ont exhibé des phénomènes d'incomplétude, et confirmé la possibilité de systèmes consistants non corrects.

2. 1929, *Recueil Vrin*, XVIII, etc.

Dans un système correct, ce qui est démontrable ($D : \vdash$) est vrai (V) et par conséquent $D \subset V$, tandis que les formules réfutables (R), c'est-à-dire les q telles que $\vdash \neg q$ sont fausses (autrement dit, $V \cap R = \Lambda$). Par suite $R \cap D = \Lambda$, ce qui est une définition de la consistance. Un système correct est donc consistant, mais *un système consistant peut ne pas être correct*, éventualité indiquée par Gödel, qui, *exactement comme Brouwer*, soutient que dès l'arithmétique, la non-contradiction n'assure pas la vérité [3]. En conséquence le programme de Hilbert est insuffisant, que les démonstrations de consistance aboutissent ou non.

Gödel imagine un énoncé $\exists x F(x)$ formellement dérivable, dont la négation $\forall x \neg F(x)$ serait contentuellement vraie. Les nombres naturels qui vérifient F ne sont pas nommables, ils sont *idéaux*. Les conceptualisations du formalisme débordent la sphère du constructif. Pourvu que toutes les inférences contentuelles soient représentables dans le formalisme, et si les conceptualisations et les moyens d'inférence du formalisme ont été convenablement restreints, l'énoncé dont la négation est vraie contentuellement cesse d'être formellement dérivable : le désaccord entre la théorie formelle et la réalité constructive s'évanouit, mais (dernier alinéa) à partir du moment où une théorie formelle est incomplète, on peut lui ajouter un énoncé contentuellement faux choisi parmi les propositions indécidables, sans en détruire la consistance.

> *Selon la doctrine formaliste, aux propositions douées de sens de la mathématique on ajoute des pseudo-assertions transfinies. qui en elles-mêmes sont dépourvues de sens [i.e. n'ont pas d'objets. N.d.T.], mais qui servent seulement à arrondir le système, exactement comme en géométrie on arrondit un système en introduisant des points à l'infini [exemple d'objet idéal]. Cette doctrine présuppose que, si on adjoint au système S des propositions douées de sens, le système T des propositions et axiomes transfinis, et que si on prouve un théorème de S moyennant un détour par les théorèmes de T [en langage hilbertien : si on ajoute les propositions idéales aux propositions réelles], le théorème obtenu est aussi contentuellement vrai, et donc que par l'adjonction des axiomes transfinis aucun théorème contentuellement faux ne devient démontrable. Cette exigence est ordinairement remplacée par celle de consistance. Or je voudrais souligner qu'on ne peut pas, sans autre cérémonie, tenir ces deux exigences pour équivalentes. Car si dans un système formel consistant A (disons celui de la mathématique classique) une proposition douée de sens p est démontrable moyennant les axiomes transfinis, il suit seulement de la consistance de A que non-p n'est pas formellement dérivable à l'intérieur du système A. Néanmoins il reste concevable qu'on pourrait voir la vérité de non-p grâce à des argumentations contentuelles (intuitionnistes) non formellement représentables dans A. En ce cas, malgré la consistance de A, une*

3. Diskussion zur Grundlegung der Mathemaök, 1931, CW, I, p. 200 et suiv.

> *proposition serait démontrable dans A dont on pourrait voir la fausseté par des argumentations finitaires. Dès qu'on interprète de manière suffisamment stricte la notion de proposition douée de sens (par exemple quand on la restreint à des équations numériques finitaires), rien de ce genre ne se peut produire. Toutefois il est très possible, par exemple, qu'on puisse prouver un énoncé de la forme* $\exists x F(x)$*, où* F *est une propriété finitaire de nombres naturels (la négation de la conjecture de Goldbach est de cette forme), par les moyens transfinis de la mathématique classique, et par ailleurs affirmer grâce à des argumentations contentuelles, que tous les nombres ont la propriété non-*F *: en fait, et c'est là-dessus que j'insiste, cela reste possible même quand on a démontré la consistance du système formel de la mathématique classique, Car d'aucun système formel ne se peut affirmer avec certitude que toutes les argumentations contentuelles y sont représentables.*
>
> *Sous l'hypothèse de la consistance de la mathématique classique, on peut même donner des exemples de propositions (celles du type Goldbach ou Fermat) qui, quoique vraies contentuellement, sont indémontrables dans le système formel de la mathématique classique. Par conséquent si on ajoute aux axiomes de la mathématique classique la négation d'une de ces propositions, on obtient un système consistant dans lequel une proposition contentuellement fausse est démontrable."*

Gödel a donc décrit une partie des raisons qu'avait Brouver de rejeter le tiers-exclus plus clairement que Brouwer lui-même. Pour que l'incomplétude et la possibilité de systèmes consistants non corrects gardent un sens, il faut maintenir une différence entre une réalité mathématique et sa description théorique ou formelle. Les propriétés qu'on vient de mentionner sont des propriétés des formalismes considérés par rapport à une réalité extérieure aux formalismes. Si la théorie est la réalité, il n'en peut être question. En général on admet une dualité entre l'expérience et ce dont on a l'expérience (réalisme *naïf*). Au contraire, les idéalistes identifient réalité et expérience. "La réalité est l'expérience" (Bosanquet). Brouwer aussi les identifie, mais selon lui la dualité ne disparaît pas, elle est située ailleurs, dans la différence entre expérience introspective (actes de pensée) et théorie logique (représentation linguistique) : l'expérience introspective est la réalité ; la théorie formelle, une expression.

S'ensuit que le rôle de la logique dans les mathématiques intuitionnistes est *nul*. Entendons par logique un ensemble de règles pour la direction des raisonnements (la théorie des modèles, l'étude des propriétés générales de systèmes d'axiomes, etc., sont hors de cause). La logique agit dans les mathématiques classiques, puisqu'il y a des théorèmes qu'on ne sait pas prouver par des moyens constructifs.

Cela jette du jour sur la critique brouwerienne du tiers-exclus. Nier ou accepter le tiers n'est pas une affaire de choix d'une logique. La question n'est pas de savoir si telle logique est plus idoine qu'une autre. *Aucune ne l'est.*

Le rejet du tiers-exclus est lié d'une part à cette conception négative du rôle de la logique dans les mathématiques, d'autre part à la question de savoir s'il existe toujours une correspondance entre une réalité sémantique (contentuelle) et une description formelle. Cela peut se traduire en termes de logique en disant qu'il y a des propositions ni démontrées ni réfutées constructivement, évidence que Brouwer obligea de reconnaître à force de contre-exemples. Répugnant à se servir des notions des logiciens (complétude, correction, etc.), il ne pouvait guère s'exprimer autrement. Il n'argumente ni pour ni contre la bivalence : comment croire que changer de logique créerait des intuitions là où il n'y en a pas ? Il voulait montrer que quand on prend pour base une conception de ce qui vaut comme fait mathématique (à savoir des actes de pensée constructifs), on doit constater que le principe du tiers exclu ne déduit pas de *faits*, ou que ces faits ne sont pas constructifs. “L'intuitionnisme recherche en quelle mesure les principes logiques sont susceptibles de faire fonction de moyens de passage sûrs entre constructions mathématiques... Pour le tiers-exclus il apparaît qu'il n'y a pas en général de réalité mathématique qui correspond à ses énonciations ni aux inférences reposant sur lui” [4].

Dans l'absolu les autres lois de l'inférence et *la logique dans son ensemble ne sont pas en meilleure posture* parce qu'elles ne peuvent pas tenir lieu d'intuition. Brouwer a concentré sa critique sur le tiers-exclus dont le cas est *typique*. Il contestait la conception classique de la connaissance “objective”, c'est-à-dire détachable de l'expérience vivante d'un sujet de pensée. De son point de vue la logique intuitionniste, image plus fidèle de déductions intuitivement justifiées, jouit d'une petite supériorité ; pour le fond elle n'a pas plus de pertinence que la logique classique, car elle *n'est pas* davantage *la réalité mathématique*, elle est juste une application des mathématiques à leur langage d'accompagnement, une *mathématique du second ordre* : “Les vérités sont souvent véhiculées par des mots ou des complexes de mots... La logique met le sujet en mesure de déduire, de systèmes de complexes de mots qui transportent des vérités, d'autres complexes de mots qui en général transportent des vérités eux aussi... Cela ne signifie nullement que ces nouveaux complexes de mots transportent des vérités avant que ces vérités aient été objet d'expérience, ni que ces vérités puissent toujours être objet d'expérience. Autrement dit. la logique n'est pas un instrument à quoi on se puisse fier pour découvrir des vérités, et elle ne peut pas déduire des vérités qui ne seraient pas tout aussi accessibles par quelque autre moyen qu'elle” [5]. Des énoncés qui ne seraient prouvables que par des raisonnements sans contenu mathématique, moyennant le tiers-exclus ou la loi de réciprocité, ne sont pas admis comme vrais.

4. 1929, *Recueil Vrin*, XVII p. 266.
5. 1948, *Recueil Vrin*, XXIV, p. 433.

Libre à M. Dummett de reconstituer la critique du tiers-exclus à partir de l'analyse du langage. Il voit l'heure à son clocher : rien à redire sinon que l'essentiel de ce que voulait suggérer Brouver est perdu. Subsiste l'idée d'autonomie de la connaissance, qui se rattache à l'empirisme britannique du XVIII^e siècle. Qu'à cela ne tienne, la philosophie analytique est un paradigme réducteur universel équipollent à la scolastique de l'époque de Galilée ; elle fournit réponse à toute question que l'on se peut poser. Ne devrait-on point envier aux philosophes la possession d'un aussi bel instrument ?

Le mathématicien

John von Neumann

Parler de la nature du travail intellectuel est une tâche difficile dans tous les domaines, même dans les domaines qui ne sont pas si éloignés de la zone centrale de l'effort intellectuel que les humains ont en commun, zone centrale dont font partie les mathématiques. Une discussion sur la nature de tout effort intellectuel est difficile en soi, plus difficile que le simple exercice de cette effort intellectuel particulier. Il est plus difficile de comprendre le mécanisme d'un avion, et les théories des forces qui le soulèvent et qui le propulsent, que de simplement monter dans l'avion pour être élevé et transporté par lui ou même de le diriger. Il est exceptionnel que l'on doive être en mesure d'acquérir la compréhension d'un processus sans avoir préalablement acquis une profonde familiarité avec son fonctionnement, son utilisation, avant de l'avoir assimilé de manière instinctive et empirique.

Ainsi, toute discussion sur la nature de l'effort intellectuel dans n'importe quel domaine est difficile, à moins que l'on suppose une familiarité facile et routinière avec ce domaine. En mathématiques, ces limitations sont très sévères, si la discussion doit être maintenue sur un plan non mathématique. La discussion montrera alors nécessairement de très mauvaises caractéristiques ; les points abordés ne peuvent jamais être correctement documentés, et une certaine superficialité de la discussion devient inévitable.

Je suis très conscient de ces lacunes dans ce que je vais dire, et je vous demande à l'avance de m'en excuser. Par ailleurs, les opinions que je vais exprimer ne sont probablement pas entièrement partagées par de nombreux autres mathématiciens, vous obtiendrez ici les impressions et interprétations pas très bien formalisées d'un homme et je ne peux vous apporter que très peu d'aide pour décider si ces idées sont au point.

Malgré toutes ces difficultés, je dois cependant admettre qu'il s'agit d'une tâche intéressante et défiante que de tenter de vous parler de la nature de l'effort intellectuel en mathématiques. J'espère seulement que je n'échouerai pas trop.

Le fait le plus caractéristique des mathématiques est, à mon avis, leur relation particulière avec les sciences naturelles, ou, plus généralement, avec toute science qui interprète l'expérience à un niveau plus élevé que le niveau purement descriptif.

Traduction d'un article de John von Neumann consultable ici http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Von$_{N}eumann_{P}art_{1}.html$

Publié dans "Les travaux de l'esprit", ed. R. B. Heywood, pp. 180-196, (© 1947 Université de Chicago Press. Réimprimé depuis les Œuvres de John von Neumann, ed. A. Taub, Vol. I, p. 1-9).

La plupart des gens, mathématiciens et autres, conviendront que les mathématiques ne sont pas une science empirique, ou du moins qu'elles sont pratiquées d'une manière qui diffère selon plusieurs points décisifs des techniques des sciences empiriques. Et pourtant, leur développement est très étroitement lié aux sciences naturelles. L'une de leurs principales branches, la géométrie, a commencé comme une science naturelle et empirique. Certaines des meilleures inspirations des mathématiques modernes (je crois, les meilleures) sont clairement issues des sciences naturelles. Les méthodes mathématiques imprègnent et dominent les divisions "théoriques" des sciences naturelles. Dans les sciences empiriques modernes, l'un de leur critère de réussite majeur est de plus en plus qu'elles soient devenues accessibles à la méthode mathématique ou aux méthodes quasi-mathématiques de la physique. En effet, le développement des sciences naturelles s'est effectué tout au long d'une chaîne ininterrompue de pseudo-métamorphoses successives, toutes pressantes vers les mathématiques, et presque identifiées avec l'idée de progrès scientifique, qui sont devenues de plus en plus évidentes. La biologie est de plus en plus imprégnée de chimie et de physique, la chimie l'est par la physique expérimentale et théorique, et la physique par les formes très mathématiques de la physique théorique.

Il y a une duplicité assez particulière dans la nature des mathématiques. Il faut réaliser cette duplicité, l'accepter et l'assimiler dans sa réflexion sur le sujet. Cette double face est la face des mathématiques, et je ne pense pas qu'une simplification, une vision unitaire de la chose soit possible sans sacrifier leur essence.

Je ne tenterai donc pas de vous présenter une version unitaire, je tenterai de décrire, du mieux que je peux, le phénomène multiple que sont les mathématiques.

Il est indéniable que certaines des meilleures inspirations en mathématiques - dans ces parties des mathématiques aussi pures que l'on puisse imaginer - sont venues des sciences naturelles. Nous mentionnerons les deux faits les plus monumentaux.

Le premier exemple est, comme il se doit, la géométrie. La géométrie était la partie principale des mathématiques anciennes. Elle est, avec plusieurs de ses ramifications, toujours l'une des principales parties des mathématiques modernes. Il ne fait aucun doute que son origine dans l'Antiquité était empirique et qu'elle a commencé en tant que discipline un peu comme la physique théorique d'aujourd'hui.

Mises à part toutes les autres preuves, le nom même de "géométrie" l'indique. Le postulat d'Euclide représente un grand pas dans l'éloignement de l'empirisme, mais il n'est pas simple de défendre la position que ce fut l'étape décisive et finale, produisant une séparation absolue. Que cette axiomatisation d'Euclide ne réponde pas sur certains points mineurs aux exigences modernes de rigueur axiomatique absolue n'est pas ce qui importe à cet égard. Ce qui est plus essentiel, c'est ceci : d'autres disciplines, qui sont sans aucun doute empiriques, comme la mécanique et la thermodynamique, sont généralement présentées dans un traitement plus ou moins axiomatique, ce qui, dans la présentation de certains auteurs, ne les différencie pas trop de la procédure d'Euclide. Le classique de la physique théorique de notre époque, les *Principia* de Newton, était, sous forme littéraire ainsi que dans l'essence de certains de ses parties les plus critiques, très similaires aux *Éléments* d'Euclide. Bien sûr, dans tous ces cas, il y a derrière la présentation axiomatique la perspicacité physique soutenant les postulats et la vérification expérimentale supportant les théorèmes. Mais on pourrait bien soutenir qu'une interprétation similaire d'Euclide est possible, en particulier du point de vue de l'antiquité, avant que la géométrie n'ait acquis sa stabilité et son autorité bimillénaires actuelles, dont l'édifice moderne de la physique théorique fait clairement défaut.

De plus, alors que la désempirisation de la géométrie a petit à petit progressé depuis Euclide, elle n'est jamais devenue tout à fait complète, même à l'époque moderne. La discussion de la géométrie non euclidienne en offre une bonne illustration. Elle offre également une illustration de l'ambivalence de la pensée mathématique. Comme la plupart des discussions ont lieu sur un plan très abstrait, elles traitent du problème purement logique de savoir si le "cinquième postulat" d'Euclide était une conséquence des autres ou non ; et le conflit formel a été clos par l'exemple purement mathématique de F. Klein, qui a montré comment un morceau d'un plan euclidien pourrait être rendu non euclidien en redéfinissant formellement certains concepts de base. Et pourtant, le stimulus empirique était là du début à la fin. La raison principale pour laquelle, de tous les postulats d'Euclide, le cinquième a été remis en question, était clairement le caractère non empirique du concept de tout le plan infini qui intervient là, et là seulement. L'idée que, au moins dans un sens significatif et malgré toutes les analyses mathématico-logiques, la décision pour ou contre Euclide peut être empirique, était certainement présent dans l'esprit du plus grand mathématicien, Gauss.

Et après que Bolyai, Lobatchevski, Riemann et Klein aient obtenu plus d'abstraction, pour ce que nous considérons aujourd'hui comme la résolution formelle de la controverse originale, l'empirisme, ou plutôt la physique, néanmoins, a eu le dernier mot. La découverte de la relativité générale nous a contraints à une révision de nos points de vue sur les relations de la géométrie dans un cadre entièrement nouveau et avec une assez nouvelle distribution des accents purement mathématiques, aussi. Finalement, ajoutons une dernière touche pour compléter l'image du contraste. Ce dernier développement a eu lieu dans la même génération qui a vu la désempirisation complète et l'abstraction de la méthode axiomatique d'Euclide entre les mains des mathématiciens tenants de l'axiomatique logique moderne. Et ces deux attitudes apparemment contradictoires sont parfaitement compatibles dans un seul esprit mathématique ; ainsi Hilbert a apporté des contributions importantes à la fois à la géométrie axiomatique et à la relativité générale.

Le deuxième exemple est le calcul ou plutôt toute l'analyse, qui en surgit. Le calcul a été la première réalisation des mathématiques modernes et il est difficile de restituer son importance. Je pense qu'il définit plus clairement que toute autre chose la création des mathématiques modernes, et le système d'analyse mathématique, qui est son développement logique, constitue toujours la plus grande avancée technique de la pensée exacte.

Les origines du calcul sont clairement empiriques. Les premières tentatives d'intégration de Kepler ont été formulées comme mesure de “dolichométrie” des fûts, c'est-à-dire de volumétrie pour des volumes avec des faces courbes. C'est de la géométrie, mais post-euclidienne, et, à l'époque en question, de la géométrie empirique non axiomatique. Kepler en était parfaitement conscient. Les efforts principaux et les principales découvertes, celles de Newton et de Leibniz, avaient une origine explicitement physique. Newton a inventé le calcul des “fluxions” essentiellement pour la mécanique en fait, les deux disciplines, le calcul et la mécanique, ont été développées par lui plus ou moins ensemble. Les premières formulations du calcul n'étaient même pas mathématiquement rigoureuses. Une formulation semi-physique inexacte était la seule disponible plus de cent cinquante ans après Newton ! Et pourtant, certains des plus importants progrès de l'analyse ont eu lieu au cours de cette période, contre ces fondements infondés et mathématiquement inexacts ! Certains des principaux esprits mathématiques de l'époque n'étaient clairement pas rigoureux, comme Euler ; mais d'autres, dans l'ensemble, l'étaient, comme Gauss ou Jacobi. Le développement était aussi confus et ambigu que possible, et sa relation à l'empirisme n'était certainement pas conforme à nos idées actuelles (ou à celles d'Euclide) d'abstraction et de rigueur. Pourtant, aucun mathématicien ne voudrait oublier cette période car elle a produit des mathématiques de toute première classe ! Et même après que le règne de la rigueur ait été essentiellement rétabli avec Cauchy, une rechute très particulière dans les méthodes semi-physiques a eu lieu avec Riemann. La personnalité elle-même du scientifique Riemann, est un exemple des plus éclairants de la double nature des mathématiques, comme l'est la controverse de Riemann et Weierstrass, mais cela m'amènerait trop loin en termes de questions techniques si j'entre dans les détails spécifiques. Depuis Weierstrass, l'analyse semble être devenue complètement abstraite, rigoureuse et non empirique. Mais même cela n'est pas tout à fait vrai. La controverse sur les “fondements” des mathématiques et de la logique, qui a eu lieu au cours des deux dernières générations, a dissipé de nombreuses illusions sur ce sujet.

Cela m'amène au troisième exemple qui est pertinent pour le diagnostic. Cet exemple, cependant, traite de la relation des mathématiques avec la philosophie ou l'épistémologie plutôt qu'avec les sciences naturelles. Il illustre de façon très frappante que le concept même de rigueur mathématique “absolue” n'est pas immuable. La variabilité du concept de rigueur montre que quelque chose d'autre que l'abstraction mathématique doit entrer dans la composition des mathématiques. En analysant la controverse sur les “fondements”, je n'ai pas réussi à me convaincre que le verdict doit être en faveur de la nature empirique de cette composante supplémentaire. Les arguments en faveur d'une telle interprétation sont assez forts, du moins dans certaines phases de la discussion. Mais je ne les considère pas comme absolument convaincants. Cependant, deux choses sont claires. Tout d'abord, ce quelque chose non mathématique, en quelque sorte lié aux sciences empiriques ou à la philosophie ou les deux, entre en ligne de compte effectivement et son caractère non empirique ne peut être maintenu si on supposait que la philosophie (ou plus précisément l'épistémologie) pouvait exister indépendamment de l'expérience. (Et cette hypothèse est seulement nécessaire mais pas en soi suffisante). Deuxièmement, l'origine empirique des mathématiques est fortement appuyée par des exemples comme nos deux exemples précédents (géométrie et calcul), indépendamment de ce que la meilleure interprétation de la controverse sur les "fondements" peut être.

En analysant la variabilité du concept de rigueur mathématique, je souhaite mettre principalement l'accent sur la controverse sur les "fondements", comme mentionné ci-dessus. Je voudrais pourtant brièvement considérer d'abord un aspect secondaire de la question. Cet aspect aussi renforce mon argument, mais je le considère comme secondaire, car il est probablement moins concluant que l'analyse de la controverse des "fondements". Je parle des changements de "style" mathématique. Il est bien connu que le style dans lequel des épreuves mathématiques sont écrites a subi des fluctuations considérables. Il vaut mieux parler de fluctuations que d'une tendance, car à certains égards, la différence entre les auteurs actuels et certains des dix-huitième ou dix-neuvième siècles est plus grande qu'entre le présent et Euclide. D'autre part, à d'autres égards il y a eu une constance remarquable. Dans les domaines où existent des différences, ce sont principalement des différences de présentation, qui peuvent être éliminées sans amener aucune nouvelle idée. Cependant, dans de nombreux cas, ces différences sont si importantes que l'on commence à douter que les auteurs qui "présentent leurs cas" de manière aussi divergente puissent présenter de telles différences de style, de goût et d'éducation, s'ils peuvent vraiment avoir les mêmes idées quant à ce qui constitue la rigueur mathématique. Enfin, dans les cas extrêmes (par exemple, dans une grande partie des travaux de l'analyse du XVIII^{e} siècle, (dont il a été question ci-dessus), les différences sont essentielles et ne peuvent être corrigées, le cas échéant, qu'à l'aide de théories nouvelles et profondes, qu'il a fallu jusqu'à cent ans pour développer. Selon nous, certains des mathématiciens qui ont travaillé de cette manière sans rigueur (ou certains de leurs contemporains, qui les ont critiqués) étaient bien conscients de leur manque de rigueur. Ou pour être plus objectif : leurs propres désirs quant à la procédure mathématique devaient être plus conformes à nos vues actuelles que leurs actions. Mais d'autres, le plus grand virtuose de l'époque, par exemple, Euler, semblent avoir agi en parfaite bonne foi et avoir été assez satisfaits de leurs propres normes.

Cependant, je ne veux pas insister davantage sur cette question. Je vais plutôt me tourner vers un cas clair, la controverse sur les "fondements des mathématiques". À la fin du XIX^e et au début du XX^e siècles, une nouvelle branche des mathématiques abstraites, la théorie des ensembles de G. Cantor a conduit à des difficultés. Autrement dit, certains raisonnements ont conduit à des contradictions ; et, bien que ces raisonnements ne soient pas dans la partie centrale et "utile" de la théorie des ensembles, et toujours facile à repérer par certains critères formels, on ne sait pas pourquoi elles devraient être considérées comme moins théoriques que les parties "réussies" de la théorie. Hormis la compréhension ex post qu'ils ont effectivement conduit au désastre, on ne savait pas clairement quelle motivation a priori, quelle philosophie cohérente de la situation, permettrait de les séparer des parties de la théorie des ensembles que l'on voulait sauver. Une étude plus approfondie du fond de l'affaire, entreprise principalement par Russell et Weyl, et conclue par Brouwer, a montré que la manière dont non seulement la théorie mais aussi la plupart des mathématiques modernes utilisaient les concepts de "validité générale" et d'"existence" était philosophiquement répréhensible. Un système de mathématiques qui était libéré de ces caractéristiques indésirables, "l'intuitionnisme", a été développé par Brouwer. Dans ce système, les difficultés et la contradiction de la théorie des ensembles ne se sont pas produites. Cependant, une bonne moitié des mathématiques modernes, dans leurs parties les plus vitales et jusqu'alors incontestées, notamment dans l'analyse, ont également été affectées par cette "purge" : elles sont devenues invalides ou devaient être justifiées par des considérations subsidiaires très compliquées. Et lors de ce dernier processus, on a généralement perdu sensiblement en généralité de la validité et en élégance de la déduction. Néanmoins, Brouwer et Weyl ont estimé nécessaire que le concept de rigueur mathématique soit révisé en fonction de ces idées.

Il est difficile de surestimer la signification de ces événements. Au cours de la troisième décennie du XX^e siècle, deux mathématiciens de première grandeur, et aussi profondément et pleinement conscients de ce que les mathématiques sont, ou d'à quoi elles servent, ou de ce dont elles parlent, que n'importe qui puisse l'être, proposent que le concept de rigueur mathématique, de ce qui constitue une preuve exacte, devrait changer ! Les développements qui ont suivi sont à noter également.

1. Seuls très peu de mathématiciens étaient disposés à accepter les nouvelles normes exigeantes pour leur propre usage quotidien. Beaucoup, cependant, ont admis que Weyl et Brouwer avaient à première vue raison, mais ils continuaient eux-mêmes à faire leurs propres mathématiques à l'ancienne mode "facile", probablement dans l'espoir que quelqu'un d'autre, à un autre moment, pourrait trouver une réponse à la critique intuitionniste et ainsi les justifier a posteriori.

2. Hilbert a avancé l'idée ingénieuse suivante pour justifier le "classique" (c.-à-d. les mathématiques pré-intuitionnistes) : même dans le système intuitionniste, il est possible de rendre compte rigoureusement du fonctionnement des mathématiques classiques, on peut décrire comment fonctionne le système classique, même si on ne peut pas justifier ses travaux. Il pourrait donc être possible de démontrer intuitive-

ment que les procédures classiques ne peuvent jamais conduire à des contradictions. Il était clair qu'une telle preuve serait très difficile, mais existaient certaines indications sur la façon dont on pourrait tenter de le faire. Si ce régime avait fonctionné, il aurait fourni une justification très remarquable des mathématiques classiques sur la base du système intuitionniste opposé lui-même ! Au moins, cette interprétation aurait été légitime dans un système de la philosophie des mathématiques que la plupart des mathématiciens étaient prêts à accepter.

3. Après environ une décennie de tentatives pour réaliser ce programme, Gödel a obtenu un résultat des plus remarquables. Ce résultat ne peut être énoncé de façon absolument précise sans plusieurs clauses et mises en garde trop techniques pour être formulées ici. Cependant, son apport essentiel était le suivant : le fait qu'un système de mathématiques ne puisse pas conduire à une contradiction, ne peut pas être démontré avec les procédures de ce systèle lui-même. La preuve de Gödel satisfait au critère le plus strict de la rigueur mathématique intuitionniste. Son influence sur le programme de Hilbert est quelque peu controversée, pour des raisons encore trop techniques pour cette occasion. Mon opinion personnelle, partagée par beaucoup d'autres, est que Gödel a montré que le programme de Hilbert est essentiellement sans espoir.

4. Le principal espoir d'une justification des mathématiques classiques au sens de Hilbert ou de Brouwer et Weyl s'étant envolé, la plupart des mathématiciens ont décidé d'utiliser ce système de toute façon. Après tout, les mathématiques classiques produisaient des résultats qui étaient à la fois élégants et utiles et, même si l'on ne pouvait plus jamais être très sûr de sa fiabilité, il repose sur des bases au moins aussi solides que, par exemple, l'existence de l'électron. Par conséquent, si l'on est disposé à accepter les sciences, on peut aussi bien accepter le système classique des mathématiques. De telles vues se sont avérées acceptables, même pour certains des protagonistes originaux du système intuitionniste. Actuellement, la controverse sur les "fondements" n'est certainement pas close, mais il semble très peu probable que le système classique soit abandonné sauf par une petite minorité.

J'ai raconté l'histoire de cette controverse de manière si détaillée, car je pense qu'elle constitue la meilleure prudence contre le fait de trop prendre la rigueur inébranlable des mathématiques pour acquise. C'est arrivé dans ma propre vie, et je reconnais facilement avec humilité que mes propres opinions concernant la vérité mathématique absolue ont changé au cours de cet épisode, et comment elles ont changé trois fois de suite ! J'espère que les trois exemples ci-dessus illustrent suffisamment bien la moitié de ma thèse qu'une grande partie de la meilleure inspiration mathématique vient de l'expérience et qu'il est à peine possible de croire à l'existence d'un concept absolu et immuable de rigueur mathématique, dissociée de toute expérience humaine. J'essaye de prendre une attitude très sourde à ce sujet. Quelles que soient les préférences philosophiques ou épistémologiques que l'on puisse avoir à cet égard, les expériences réelles de la communauté mathématique avec son sujet appuient peu l'hypothèse de l'existence d'un concept de rigueur mathématique a priori. Cependant, ma thèse a également une seconde moitié, et je vais passer à cette seconde moitié maintenant.

Il est très difficile pour un mathématicien de croire que les mathématiques sont une science empirique ou que toutes les idées mathématiques proviennent de sujets empiriques. Laissez-moi considérer d'abord la seconde moitié de la déclaration. Il existe différentes parties importantes des mathématiques modernes dont l'origine empirique est intraçable, ou, si jamais elle l'est, elle est si éloignée qu'il est clair que le sujet a subi une métamorphose complète car il a été coupé de ses racines empiriques. Le symbolisme de l'algèbre a été inventé pour un usage domestique, mathématique, mais on peut raisonnablement affirmer qu'il a de forts liens empiriques. Cependant, l'algèbre moderne et "abstraite" s'est de plus en plus développée dans de nombreuses directions qui ont très peu de connexions empiriques. On peut dire la même chose de la topologie. Et dans tous ces domaines, le critère subjectif de réussite du mathématicien, de la valeur de son effort, est très indépendant et esthétique et libre (ou presque libre) de connexions empiriques. (Je vais en dire plus à ce sujet.) Dans la théorie des ensembles, cela est encore plus clair. La "puissance" et "l'ordre" d'un ensemble infini peut être la généralisation de concepts numériques finis, mais sous leur forme infinie (en particulier la "puissance"), ils n'ont pratiquement aucun rapport avec ce monde. Si je ne voulais pas éviter les détails techniques, je pourrais documenter cela avec de nombreux exemples théoriques le problème de l'"axiome du choix", la "comparabilité" des "puissances" infinies, le "Problème du continu", etc. Les mêmes remarques s'appliquent à une grande partie de la théorie des fonctions réelles et de la théorie des ensembles de points réels. Deux exemples étranges sont donnés par la géométrie différentielle et par la théorie des groupes : ils ont certainement été conçus comme des disciplines et presque toujours cultivés dans cet esprit. Après une décennie dans un cas, et un siècle dans l'autre, ils se sont avérés très utiles en physique. Et ils se sont toujours principalement poursuivis dans le même esprit, abstrait et non appliqué.

Les exemples de toutes ces conditions et de leurs diverses combinaisons pourraient être multipliés mais je préfère plutôt passer au premier point que j'ai indiqué ci-dessus : les mathématiques sont-elles une science empirique ? Ou, plus précisément : les mathématiques sont-elles effectivement pratiquées de la même manière qu'une science empirique est pratiquée ? Ou, plus généralement : quelle est la relation normale du mathématicien avec son sujet ? Quels sont ses critères de réussite, de désirabilité ? Quelles influences, quelles considérations, contrôlent et dirigent ses efforts ? Voyons donc en quoi le mode de travail en mathématiques diffère du mode de travail en sciences naturelles. La différence entre celles-ci, d'une part, et les mathématiques, d'autre part, est continue, augmentant clairement à mesure que l'on passe des disciplines théoriques aux disciplines expérimentales puis des disciplines expérimentales aux disciplines descriptives. Comparons donc les mathématiques avec la catégorie qui se rapproche le plus des disciplines théoriques. Et choisissons là celle qui se rapproche le plus des mathématiques. J'espère que vous ne me jugerez pas trop sévèrement si je ne parviens pas à contrôler l'hybris mathématique et ajouter : parce qu'elle est la plus développée parmi toutes les sciences théoriques, c'est-à-dire la physique théorique.

Les mathématiques et la physique théorique ont en réalité beaucoup en commun. Comme je l'ai souligné auparavant, le système de géométrie d'Euclide était le prototype de la présentation axiomatique de la mécanique classique et des traitements similaires dominent la thermodynamique phénoménologique ainsi que certaines phases du système électrodynamique de Maxwell et aussi de la relativité restreinte. De plus, l'attitude selon laquelle la physique théorique n'explique pas seulement les phénomènes, mais également les classe et les corrèle, est aujourd'hui acceptée par la plupart des physiciens théoriciens. Cela signifie que le critère de réussite d'une telle théorie consiste simplement à évaluer si elle peut, par un schéma de classification et de corrélation simple et élégant, couvrir de très nombreux phénomènes qui, sans ce schéma, sembleraient compliqués, hétérogènes et si la théorie couvre même des phénomènes qui ne sont pas considérés ou même qui sont inconnus au moment de l'évolution du dispositif. (Ces deux dernières déclarations expriment, bien sûr, le pouvoir unificateur et prédictif d'une théorie.) Or, ce critère, tel qu'il est énoncé ici, est clairement dans une large mesure de nature technique. Pour cette raison il est très proche des critères mathématiques de réussite, qui, comme vous le verrez, sont presque entièrement esthétiques. Ainsi, nous comparons maintenant les mathématiques avec la science empirique qui se trouve le plus près d'elle et avec laquelle elle a, comme j'espère l'avoir montré, beaucoup en commun, qui est la physique théorique. Les différences de *modus procedendi* réel sont néanmoins importantes et basiques. Les objectifs d'une théorie physique sont principalement donnés de l'extérieur, dans la plupart des cas par les besoins de la physique expérimentale. Ils trouvent presque toujours leur origine dans la nécessité de résoudre une difficulté ; les réalisations prédictives et unificatrices viennent généralement après. Nous pouvons nous autoriser une comparaison, les avancées (prédictions et unifications) viennent pendant la quête, qui est nécessairement précédée d'une bataille contre une difficulté préexistante, généralement une contradiction apparente au sein du système existant. Une partie du travail des physiciens théoriciens est la recherche de telles obstructions, qui promettent la possibilité d'une “percée”. Comme je l'ai mentionné, ces difficultés trouvent généralement leur origine dans l'expérimentation mais parfois ce sont des contradictions entre les différentes parties du corps de la théorie elle-même. Les exemples sont bien sûr nombreux.

L'expérience de Michelson conduisant à la relativité restreinte, les difficultés de certains potentiels d'ionisation et de formation et de certaines structures spectroscopiques qui ont conduit à la mécanique quantique illustrent le premier cas ; le conflit entre la relativité restreinte et la théorie gravitationnelle newtonienne qui ont mené à la relativité générale illustrent le deuxième cas, plus rare. De toute façon, les problèmes de physique théorique sont objectivement donnés : et, alors que les critères qui régissent l'exploitation d'un succès sont, comme je l'ai indiqué plus haut, principalement esthétiques, la partie du problème, que j'ai appelée au-dessus l'origine de la "percée" finale, sont des faits difficiles et objectifs. En conséquence, le sujet de la physique théorique a presque toujours été extrêmement concentré ; à presque tous les moments, la plupart des efforts de tous les physiciens théoriciens étaient concentrés sur pas plus d'un ou deux sujets, ils étaient très fortement circonscrits et la théorie quantique des champs dans les années 1920 et au début des années 1930 et les particules élémentaires et la structure des noyaux depuis le milieu des années 30 sont des exemples de tels domaines circonscrits.

La situation en mathématiques est entièrement différente. Les mathématiques sont découpées en un grand nombre de subdivisions, très différentes les unes des autres par leur caractère, leur style, leurs objectifs, et leur influence. Elles montrent le contraire de l'extrême concentration de la physique théorique. Un bon physicien théoricien peut aujourd'hui encore avoir une connaissance pratique de plus de la moitié de son sujet. Je doute que tout mathématicien vivant ne soit en relation avec plus d'un quart des mathématiques. "Objectivement" parlant, des problèmes "importants" peuvent surgir après qu'une subdivision des mathématiques a évolué relativement loin et qu'elle s'est sérieusement embourbée devant une difficulté. Mais même alors, le mathématicien est essentiellement libre de continuer ou de quitter le domaine et de se tourner vers autre chose, alors qu'un problème en physique théorique est généralement un conflit, une contradiction, qui "doit" être résolu. Le mathématicien a une grande variété de domaines vers lesquels il peut se tourner, et il jouit d'une liberté très considérable dans ce qu'il en fait. Pour venir au point décisif : je pense qu'il est juste de dire que ses critères de sélection, et aussi ceux de son succès, sont principalement esthétiques. Je me rends compte que cette affirmation est controversée et qu'il est impossible de la "prouver", voire d'aller très loin dans sa justification, sans analyser de nombreuses instances techniques spécifiques. Cela nécessiterait à nouveau un type de discussion très technique, et ce n'est pas l'occasion de développer cela ici. Il suffira pour résumer de dire que le caractère esthétique est encore plus important que dans le cas mentionné ci-dessus de la physique théorique. On attend d'un théorème mathématique ou d'une théorie mathématique non seulement qu'il ou elle décrive et classe simplement et de manière élégante de nombreux cas particuliers a priori disparates. On attend également de l'"élégance" dans sa composition "architecturale" et structurelle. Facilité à énoncer le problème, grande difficulté à le saisir et de toutes les tentatives de s'en approcher, torsion très surprenante par laquelle l'approche, ou une partie de l'approche, devient facile, etc. De plus, si les déductions sont longues ou compliquées, il devrait y avoir un principe général simple impliqué, qui "explique" les complications et les détours, réduit l'arbitraire apparent à quelques motivations simples, etc. Ces critères sont clairement ceux de tout art créatif, et l'existence de certains motifs empiriques et bavards en arrière-plan, souvent dans un arrière-plan très éloigné et cultivé par des développements esthétiques et suivi dans une multitude de variantes labyrinthiques, tout cela est beaucoup plus proche de l'atmosphère de l'art pur et simple que de celle des sciences empiriques.

Vous remarquerez que je n'ai même pas mentionné de comparaison des mathématiques avec les sciences expérimentales ou avec les sciences descriptives. Ici les différences de méthode et d'atmosphère générale sont trop évidentes.

Je pense que c'est une relativement bonne approximation de la vérité qui est beaucoup trop compliquée pour permettre autre chose que des approximations que les idées mathématiques proviennent de données empiriques, bien que la généalogie soit parfois longue et obscure. Mais, une fois ainsi conçu, le sujet commence à vivre sa propre vie et est mieux comparable, du point de vue de la créativité régie par des motivations presque entièrement esthétiques, à autre chose et, en particulier, à une science empirique. Il existe cependant un autre point qui, je crois, doit être souligné. Lorsque la discipline mathématique voyage loin de sa source empirique, ou plus encore, lorsqu'il s'agit de deuxième et troisième générations indirectement inspirées d'idées issues de la "réalité", elle est confrontée à de très graves dangers.

Elle devient alors de plus en plus purement esthétisante, de plus en plus purement "l'art pour l'art". Cela ne doit pas être mauvais, si le champ est entouré de sujets corrélés, qui ont encore des liens plus étroits avec l'empirisme, ou si la discipline est sous l'influence d'hommes au goût exceptionnellement développé. Mais il existe un grave danger que le sujet se développera le long de la ligne de moindre résistance, que le ruisseau, si loin de sa source, se séparera en une multitude de branches insignifiantes, et que la discipline deviendra une masse désorganisée de détails et de complexités. En d'autres termes, à une grande distance de sa source empirique, ou après beaucoup de consanguinité "abstraite", un sujet mathématique est en danger de dégénérescence. Au début, le style est généralement classique ; quand il montre des signes de devenir baroque, alors le signal de danger est activé. Il serait facile de donner des exemples, de retracer des évolutions spécifiques dans le baroque et le très haut baroque, mais là encore, ce serait trop technique.

En tout état de cause, chaque fois que ce stade est atteint, le seul remède me semble être le retour rajeunissant à la source : la réinjection d'idées plus ou moins directement empiriques. Je suis convaincu que c'est une condition nécessaire pour conserver la fraîcheur et la vitalité du sujet et que cela restera également vrai à l'avenir.

Le rôle des mathématiques

John von Neumann

Je devrais vraiment parler des développements probables des mathématiques dans un futur pas trop lointain. Lors de la présentation du document précédent, j'ai beaucoup admiré et envié le professeur Spitzer qui, dans son domaine, pouvait le faire ; il pouvait parler des développements probables en astronomie à un public scientifique et universitaire général, sans trop entrer dans les détails, qui sont d'un fort attrait pour les astronomes, mais non pour le grand public. En astronomie, c'est possible.

En mathématiques, c'est très difficile. Si l'on commence à parler de la substancielle matière des mathématiques, tout particulièrement lorsqu'on spécule sur l'avenir, on pénètre très rapidement dans des sujets qui évoqueront quelque chose seulement chez les mathématiciens.

Je vais donc m'orienter différemment et parler du rôle des mathématiques dans la vie intellectuelle et dans la société.

Dès le début, il faut répondre à une question qui se pose réellement dans toutes les branches de la science et dans toutes les branches de l'érudition. Cependant, en mathématiques, vous faites face à cette question sous une forme particulièrement définie et extrême. C'est la question de l'utilité des mathématiques ; et de l'utilité de cette utilité ; de l'importance de cette utilité ; la science mathématique doit-elle être poursuivie en soi ou doit-elle être poursuivie selon son utilité pour la société. Beaucoup peut être dit à ce sujet. je pense que le mieux que l'on puisse faire à cet égard en dix minutes est de souligner à quel point il est difficile, et combien il est dangereux, de porter des jugements trop rapides à ce sujet.

Permettez-moi de vous citer une épigramme du poète allemand Schiller. Il décrit une conversation fictive entre Archimède et un disciple. Le disciple exprime au Maître son admiration pour la science et veut être initié à “cette science divine qui vient de sauver l'État”, c'est-à-dire ces techniques qui ont aidé pendant le siège de Syracuse par les Romains. Je veux dire que les mathématiques ont aidé les habitants de Syracuse lors d'un siège par l'armée romaine.

Dr. John A. von Neumann est Professeur de Mathématiques, à l'Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey.

Cet article est la traduction de l'article page 640 du Compendium consacré aux travaux de John von Neumann.
Réimpression des Œuvres de John von Neumann, ed. A. Taub, Vol. VI, p. 477-490.

Archimède fait alors un discours quelque peu étouffant dans lequel il souligne auprès de l'admirateur que la science *est* divine, mais qu'elle était divine *avant* d'aider l'État ; et qu'elle est divine, qu'elle ait ou non aidé l'État.

Maintenant, cette position est assez importante et pertinente. La science n'est probablement pas un iota plus divine parce qu'elle a aidé l'État ou la société. Cependant, si l'on souscrit à cette position, on devrait en même temps envisager la double proposition, que si la science n'est pas un iota plus divine sous prétexte qu'elle est utile à la société, peut-être qu'elle n'est pas un iota moins divine si elle lui nuit. La question n'est pas du tout triviale. Un dernier point à considérer dans cette conférence est aussi que la science n'est pas un iota moins divine, bien qu'elle n'ait absolument pas sauvé l'État, parce que Syracuse a en fait été prise par les Romains peu de temps après.

Je parlerai donc de cette question de l'utilité malgré toutes les difficultés d'évaluation dans ce contexte, de l'importance de son utilité dans la vie de tous les jours, de son utilité pour la société, sans discuter de la place des mathématiques dans la société et des effets qu'elles ont sur nous en général ; et tout particulièrement, des effets qu'elles peuvent avoir en dehors du groupe des professionnels.

Il est également très intéressant de considérer ses effets au sein du groupe des professionnels. Ces effets au sein du groupe de professionnels sont très différents de ceux qu'on pourrait penser. En ce qui concerne les effets généraux et externes, il est parfaitement clair que les mathématiques fournissent quelque chose de très important, à savoir qu'elles établissent certaines normes d'objectivité, certaines normes de vérité ; et cela est assez important qu'elles semblent donner un moyen d'établir ces normes plutôt indépendamment de tout le reste, plutôt indépendamment des émotions, plutôt indépendamment des questions morales. Il est très important de réaliser cela : des critères objectifs de vérité sont possibles, un tel but n'est pas contradictoire, n'est pas inhumain en un certain sens. Cette perspicacité n'est ni évidente ni particulièrement ancienne ; et ce prestige ou la logique per se, cette science per se, sont probablement liés au rôle de la science dans nos vies, et au rôle des mathématiques, dans leur forme la plus abstraite, dans la science.

Encore une fois, la vérité intrinsèque de ces propositions peut même être débattue, mais il est tout à fait important que ces propositions puissent être faites, que l'on puisse avoir une image précise et détaillée de leur contenu. C'est possible, car on peut former, avec l'aide des mathématiques, une image de ce à quoi un tel système devrait ressembler.

En d'autres termes, indépendamment de la question de savoir si ces normes objectives de vérité données par les mathématiques sont réellement objectives, et que ces normes soient ou non réellement vraies, on peut donner beaucoup plus de sens à ce sujet *après* avoir expérimenté directement et *in vivo* ce à quoi ressemblerait un tel système s'il existait.

Il existe un certain nombre d'exemples mathématiques auxquels nous pouvons nous référer à cet effet. Comment concrétiser ces références ? Et également : Même si l'implémentation n'est pas immédiatement couronnée de succès, quel système d'idées les mathématiques sont-elles dans lequel des propositions si extrêmes sont valables ?

On peut en dire beaucoup plus sur ce sujet et sur ce rôle des mathématiques pour établir la possibilité de normes objectives. Permettez-moi de dire tout de suite quelles sont les objections à cela. L'objection selon laquelle, même si des normes absolues pouvaient être établies par les mathématiques, elles ne pourraient pas avoir une validité absolue pour le monde entier, cela a été abondamment discuté ; et je ne pense pas que je puisse vous dire beaucoup de nouvelles choses à propos de ça. Je pense que nous avons tous été confrontés à ce problème, et nous avons tous différentes méthodes pour le gérer, que nous en soyons satisfaits ou non. Je tiens à souligner, cependant, et il s'agit d'une question plus technique, que les propositions sous-jacentes de savoir si les normes de mathématiques sont vraiment objectives, peuvent également être mises en doute. En d'autres termes, il *n'est pas* nécessairement vrai que la méthode mathématique est quelque chose d'absolu, qui est révélé d'en haut, ou qui d'une manière ou d'une autre, une fois qu'il nous est révélé, était nécessairement juste et est resté bien évident depuis lors. Pour être plus précis, c'était peut-être évident juste après que ça ait été révélé, mais ça n'est certainement pas resté évident depuis, il y a eu de très sérieuses fluctuations dans l'opinion professionnelle des mathématiciens sur ce qu'est la rigueur mathématique. Pour mentionner une chose mineure : dans ma propre expérience, qui ne s'étend que sur une trentaine d'années, cette idée a fluctué si souvent que ma conviction personnelle et sincère de ce qu'est la rigueur mathématique a changé au moins deux fois. Et cela en si peu de temps de vie d'un seul individu ! Si vous prenez toute la période, disons depuis le début du XVIII^e^ siècle, il y a eu des fluctuations encore plus sérieuses quant à ce qui constitue une preuve mathématique stricte.

Les grands analystes de la fin du XVIII^e^ siècle acceptaient comme preuves mathématiques des choses que nous n'accepterions absolument pas comme telles. C'est vrai qu'ils les ont acceptées avec un certain sentiment de culpabilité ; mais dans de nombreux cas, le sentiment de culpabilité n'était pas trop évident. Il est aussi certainement vrai qu'au XIX^e^ siècle, il y avait des désaccords de bonne foi sur la question de savoir si une preuve donnée par un très grand mathématicien, Riemann, était vraiment une preuve ou non.

D'après ma propre expérience, à deux autres reprises au début du XX^e^ siècle, des discussions de fond très sérieuses sur ce que sont les principes fondamentaux des mathématiques ont eu lieu quant à savoir si un grand chapitre des mathématiques est vraiment logiquement cohérent ou non. Et dans les années dix et vingt, une critique de ces questions a fait comprendre qu'il n'était pas du tout clair de savoir exactement ce que l'on entend par rigueur, et plus particulièrement, s'il faut se limiter à n'utiliser que les parties de mathématiques que personne n'a remises en question. Ainsi, assez remarquablement, dans une grande fraction des mathématiques, il existait en fait des divergences d'opinion ! Quelques mathématiciens ont dit qu'il n'était pas nécessaire de remettre en question une partie de ce qui est effectivement utilisé. Il y avait aussi un ensemble d'opinions, selon lequel on ne devrait pas utiliser davantage de concepts que ceux que le plus exigeant des critiques avait approuvés. Pourtant il y a eu un groupe important de mathématiciens qui a estimé que, même s'il y avait lieu de remettre en question certains domaines des mathématiques, il était bon de les utiliser. Ce groupe était tout à fait prêt à accepter quelque chose comme ceci : ces portions de mathématiques qui avaient été interrogées et qui avaient été clairement utiles, en particulier pour l'usage interne de la communauté - en d'autres termes, quand de très belles théories pouvaient être obtenues dans ces domaines - que les théories étaient après tous au moins aussi solides et probablement un peu plus solides même que les constructions de la physique théorique. Et après tout, la physique théorique allait bien ; alors pourquoi pas de tels domaines, qui avaient peut-être même servi à la physique théorique, même si ils ne correspondaient pas à 100 pour cent à l'idée que l'on avait de la rigueur mathématique, pourquoi ne seraient-ils pas des domaines légitimes en mathématiques ; et pourquoi les idées en question ne devraient-elles pas être poursuivies ? Cela peut sembler étrange, comme une dégradation des normes, mais cela a été cru par un grand groupe des gens pour qui j'ai de la sympathie, car je suis l'un d'eux.

Je ne veux pas entrer dans les détails de cette critique ; elle est liée à la très difficile question épistémologique de savoir s'il est légitime de discuter de collections d'entités dont le nombre n'est pas fini ; ou, si vous avez affaire à un collectif de concepts mathématiques qui est en nombre infini, que signifie exactement de faire une déclaration universelle à leur sujet, qu'est-ce que cela signifie exactement de dire que vous savez que quelque chose est possible au sujet d'une telle collection d'entités en nombre infini. Cela signifie-t-il que vous avez un exemple concret ? Ou bien est-ce que cela signifie que vous avez des méthodes pour montrer qu'un exemple existe ? En fait, existe-t-il un moyen d'établir l'existence d'un exemple sans le construire explicitement ? L'une des grandes surprises pour nous tous a été qu'il s'est avéré que les méthodes mathématiques généralement acceptées étaient en fait constituées d'un certain nombre d'astuces par lesquelles vous pourriez démontrer l'existence d'un exemple sans le construire. Il n'est pas facile d'imaginer comment cela peut se produire. Mais en fait, cela arrivait, et c'est une pratique mathématique normale.

Je voudrais donc dire qu'il y a ici des questions très difficiles et délicates, et on ne peut pas échapper à la conclusion selon laquelle, dans une certaine mesure, elles ressemblent à celles des fondements de la physique ; que l'on peut avoir un sentiment de plausibilité qui est assez commode, et qu'il n'est pas question d'une absolue fiabilité super-humaine qui est censée être l'un des attributs des mathématiques.

Il y a donc là un certain doute ; et pour évaluer le caractère et le rôle des mathématiques, il ne faut pas oublier que le doute existe.

Permettez-moi maintenant de parler plus en détail des fonctions des mathématiques dans notre réflexion. Il est courant que les mathématiques soient une excellente école de pensée, qu'elles vous amènent à la pensée logique, qu'après les avoir exercées, vous puissiez penser plus valablement qu'autrement. Je ne sais pas si toutes ces déclarations sont vraies, la première est probablement la moins douteuse. Cependant, je pense que cela a une très grande importance de penser à un domaine qui n'est pas si précis. Je pense que l'une des plus importantes contributions des mathématiques à notre réflexion est qu'elles ont montré une grande flexibilité dans la formation des concepts, à un degré de flexibilité qu'il est très difficile d'atteindre dans le mode de la pensée non-mathématique. On trouve parfois des situations un peu similaires en philosophie ; mais ces domaines de la philosophie emportent généralement beaucoup moins d'adhésion.

Cette grande flexibilité, à laquelle je fais allusion, implique des choses telles que celles-ci : dans la terminologie habituelle, on considère un problème, qui a beaucoup préoccupé les philosophes tel que les lois qui régissent ce domaine sont de la nature suivante : chaque événement détermine directement l'événement qui le suit immédiatement. Ceci est l'approche causale. Alternativement, ces lois peuvent être téléologiques, ce qui signifie qu'un seul événement ne détermine pas l'événement suivant, mais qu'en quelque sorte, l'ensemble du processus doit être considéré comme une unité subordonnée à une loi générale, de sorte que le tout doit être pris comme un tout. Si je dis que cela a assailli les philosophes, je minimise. Cela a joué un très grand rôle et joue toujours un très grand rôle, par exemple en biologie.

Eh bien, je ne dis pas que c'est une mauvaise question, ou une question vide de sens, mais c'est une excellente question à traiter plus subtilement, en tout cas, qu'il n'y paraît ; parce qu'une bonne dose d'expérience mathématique montre qu'à moins d'être extrêmement prudent, la question n'a pas de sens.

L'exemple classique, l'exemple exceptionnel de cela, qui, je pense, mérite beaucoup plus d'appréciation que le cas général, se situe dans un domaine entre la physique théorique et les mathématiques, mais ce sont vraiment des mathématiques, à savoir le traitement mathématique de la mécanique classique. La mécanique classique fait bien sûr partie de la physique théorique ; mais une fois que vous êtes d'accord sur les principes de la mécanique, il reste la partie purement mathématique qui consiste à exprimer ces principes dans la terminologie mathématique et à rechercher mathématiquement comment trouver des solutions, combien il y en a, etc., et aussi, comment on peut énoncer le même principe de fond sous diverses formes mathématiques, toutes équivalentes les unes aux autres, car elles énoncent la même chose, mais qui peuvent formellement sembler très différentes et donnent donc des approches techniques complètement différentes pour résoudre le problème. Ce sont alors, de manière générale, différents aspects par lesquels on peut comprendre le problème.

Maintenant, l'un des faits les plus simples sur la mécanique est qu'elle peut être exprimée par quiconque sous plusieurs formes mathématiques équivalentes. L'une d'elle est la forme newtonienne où l'état du système n'est pas seulement la position de chacune de ses parties, mais aussi la vitesse de chacune de ses parties à un instant. L'état ainsi défini détermine alors de manière unique l'accélération, et donc ensuite la position et la vitesse à l'instant suivant. Par répétition, cela peut être utilisé pour dériver l'état du système à tout instant futur, et en fait aussi à tout instant passé. En d'autres termes, c'est strictement causal ; si vous connaissez le système maintenant, cela le détermine immédiatement après, et par répétition aussi pour tous les instants futurs.

Une deuxième formulation de la mécanique utilise le principe de l'effet minimum, que je ne décrirai pas mathématiquement mais qui dit ceci : si vous considérez l'histoire complète d'un système (par système, je veux dire toute entité mécanique, donc ça peut être une planète flottant dans l'espace, simplifiée jusqu'à être considérée comme un point ; ou un système d'une planète et d'un corps central ; ou quelque chose de la complexité de tout le système solaire ; ou de la complexité d'une locomotive ; ou toute autre chose que vous choisissez), si vous considérez son histoire complète entre deux moments (ça peut être de maintenant à dans cinq minutes, ou il y a entre trois milliards d'années et maintenant ou toute autre combinaison de moments) alors l'histoire complète vous permet de calculer certaines choses, et en particulier l'intégrale de l'énergie fois le temps. Et l'histoire réelle est celle qui rend cette quantité la plus petite possible. Il s'agit d'un principe clairement *téléologique*. En effet, ici l'histoire n'est pas déterminée par quelque chose qui se passe à un moment donné, mais vous devez considérer la totalité de l'histoire pour minimiser cette valeur numérique particulière d'une intégrale étendue sur toute l'histoire.

La première approche est strictement causale et fonctionne d'un point à un autre dans le temps. La deuxième est strictement téléologique, et ne définit que l'histoire totale en vertu de certaines propriétés optimales, et non pas selon une partie de celui-ci. Pourtant, les deux sont strictement équivalentes ; l'histoire réelle pour les mouvements que vous dérivez dans un cas est précisément ce que vous trouvez dans l'autre cas ; et la question de savoir si la mécanique est causale ou téléologique (qui, en tout autre domaine serait considérée comme une question de fond importante appelant une réponse oui ou non) est un non-sens manifeste en mécanique, car il dépend uniquement de la manière dont vous choisissez d'écrire les équations. Je n'essaie pas d'être facétieux quant à l'importance de garder à l'esprit les principes téléologiques lorsqu'il s'agit de biologie ; mais je pense que l'on n'a pas commencé à comprendre le problème de leur rôle dans la biologie, jusqu'à ce qu'on se rende compte qu'en mécanique, si vous êtes juste un peu intelligent mathématiquement, votre problème disparaît et perd tout son sens. Et qu'il est parfaitement possible que si l'on comprenait un autre domaine, la même chose pourrait se produire.

C'est une idée qui n'aurait probablement jamais été obtenue sans la ruse mathématique de transformation des équations de la mécanique ; c'étaient purement des compétences mathématiques et les caractéristiques de flexibilité de la formulation mathématique et de sa reformulation, qui ont produit cette idée. Ce n'est pas de la pensée pure à un quelconque niveau abstrait, mais c'est une procédure spécifiquement mathématique.

Une autre chose que je voudrais mentionner dans ce contexte, c'est la chose suivante (je vais à nouveau mélanger la physique théorique avec les mathématiques, de la même manière que précédemment. L'exemple appartient à la physique théorique, mais le traitement technique qui produit les résultats auxquels je fais référence consiste vraiment en un certain nombre de manipulations mathématiques. Il a donc quelque chose à voir avec le rôle des mathématiques dans la compréhension, et non avec le rôle de la théorie physique dans la perspicacité, ce dernier étant assez important, mais différent du premier). Une déclaration qui est fréquemment et librement faite, en particulier avant que la matière n'ait été aussi bien analysée qu'elle ne l'est aujourd'hui, c'est qu'il y a un certain contraste entre les choses qui sont soumises à un traitement mathématique strict, et celles qui sont laissées au hasard.

Ceci est une déclaration plausible, et c'était très plausible, il y a environ 200 ans, à un moment où la théorie des probabilités a été découverte, ce qui a permis un strict traitement mathématique d'événements indéterminés et fortuits. Et encore faut-il un traitement mathématique pour réaliser que si un événement n'est pas déterminé par des lois strictes, mais laissé au hasard, jusqu'à ce que vous ayez clairement indiqué ce que vous entendez par là (et peut être clairement énoncé), il se prête tout autant à un traitement quantitatif moyen que s'il était rigoureusement défini. Bien sûr, ce qu'un traitement quantitatif vous dira ne sera pas ce qui se passera, car cela n'est pas censé être possible dans ce cas particulier, mais cela vous dira, par exemple, que si vous l'essayez un million de fois, vous obtiendrez probablement un résultat positif. Et cela vous dira aussi avec quelle précision cette probabilité sera renforcée si vous augmentez le nombre d'essais. De plus, quelles combinaisons des éventualités sont celles que vous pouvez ignorer, qui sont absurdes, malgré l'incertitude des lois générales.

La théorie des probabilités en fournit un exemple, mais encore plus frappant. Cet exemple, c'est la forme moderne de la mécanique quantique. Il s'avère que les processus impliquant des particules élémentaires, des atomes ou des particules subatomiques, en dépit de tout ce qui était connu auparavant, ne sont apparemment pas soumis à des lois comme celles de la mécanique, et certainement pas, parce que les lois de la mécanique dans leur forme causale vous disent que si vous connaissez l'état du système à un instant, vous pouvez dire exactement son état peu de temps après, et en répétant cela, vous pouvez dire à quoi il ressemblera à tout moment après. Il s'avère que pour les processus élémentaires, il ne semble pas qu'il en soit ainsi. La meilleure description que l'on peut donner aujourd'hui, qui peut ne pas être l'ultime description (cette ultime description pouvant même revenir à la forme causale, bien que la plupart des physiciens ne pensent pas que cela soit probable) mais en tout cas le mieux que l'on puisse dire aujourd'hui, c'est que vous n'avez pas une détermination complète, et que l'état du système ne détermine plus du tout ce qu'il sera immédiatement après ou plus tard. Bien sûr, un état peut maintenant être incompatible avec certaines autres hypothèses sur ce qu'il en sera du système une heure plus tard ; ou certains d'entre eux peuvent être extrêmement improbables. Mais il restera encore de nombreuses possibilités ; et on pourrait penser que c'est une idée qui ne se prête pas à une description par des moyens mathématiques précis.

Le fait est que cela a été découvert par la méthode de la physique théorique, et que cela a été depuis cristallisé, rendu précis, par des moyens mathématiques. En fait, des théories mathématiques très sophistiquées devaient être appliquées ; et les choses les plus particulières sont apparues.

Par exemple : un système, comme celui dont il est question ici, n'est pas causalement prévisible. Vous ne pouvez pas calculer à partir de son état actuel son état au moment suivant. Il y a cependant quelque chose d'autre qui est causalement prévisible, à savoir la fonction dite fonction d'onde.

L'évolution de la fonction d'onde peut être calculée d'un instant à l'autre, mais l'effet de la fonction d'onde sur la réalité observée n'est qu'une probabilité. Le fait qu'une combinaison puisse être élaborée, qu'elle puisse déchiffrer l'expérience, et même dériver de l'expérience, est quelque chose qui, encore une fois, aurait été complètement impossible si la méthode mathématique n'avait pas existé. Et à nouveau, une énorme contribution de la méthode mathématique à l'évolution de notre pensée réelle est qu'elle a rendu ces cycles logiques possibles, et qu'elle les a rendus très spécifiques. Cette méthode a permis de faire ces choses en toute fiabilité et dans une parfaite “douceur” (facilité) technique.

Une autre chose, que nous ne connaissons pas aujourd'hui autant que nous le souhaiterions, mais que nous connaissons bien, est qu'il aurait été tout à fait raisonnable de s'attendre à un cercle vicieux quand on essaie d'analyser le substrat qui produit la science, la fonction de l'intelligence humaine. L'ensemble des preuves de l'exploration dans ce domaine est que le système qui se produit dans la performance intellectuelle, en d'autres termes dans le système nerveux humain, peut être étudié avec des méthodes physiques et mathématiques. Il y a encore probablement une sorte de contradiction dans l'idée que tout le monde a qu'à un moment, un individu doit être complètement informé de l'état de son appareil nerveux à ce moment-là. Les chances sont que les limites absolues qui existent ici peuvent également être exprimées en termes mathématiques, et uniquement en termes techniques mathématiques.

Nous avons déjà vu des phénomènes de ce type. La physique théorique a déjà indiqué deux domaines du monde physique où existent des limites absolues à la connaissance. L'une est la relativité et l'autre est la théorie quantique. Ici, par les meilleures descriptions que nous pouvons donner aujourd'hui, il y a des limites absolues à ce qui est connaissable. Cependant, ces limites peuvent être exprimées très précisément mathématiquement, par des concepts qui seraient très déroutants si on tentait de les exprimer par tout autre moyen. Ainsi, tant en relativité qu'en mécanique quantique, il existera toujours des choses qui ne peuvent pas être connues ; mais vous avez une latitude considérable pour contrôler quelles sont les variables inconnaissables. En mécanique quantique, par exemple, l'assertion suivante est vraie : vous ne pouvez jamais savoir en même temps quelle est la position et quelle est la vitesse d'une particule élémentaire, mais vous pouvez vous adapter et savoir laquelle des deux vous pouvez découvrir. Toute information que vous obtenez sur l'une détériore les informations acquises sur l'autre. C'est certainement une situation d'un degré de sophistication qu'il serait complètement désespéré de développer ou de gérer par des méthodes autres que mathématiques, ou de parler de leur sens autrement que par des méthodes mathématiques ; et encore moins de faire quelque chose qui a déjà été fait, à savoir de les utiliser pour des prédictions, avec des méthodes mathématiques.

En venant à l'évolution des mathématiques, j'ai peur d'être trop précis. Mais j'aimerais faire quelques remarques générales à leur sujet. Je pense que les circonstances de leur évolution sont probablement plus instructives pour un public scientifique général que de considérer exactement ce qui s'est passé ; et encore plus que ce que tout le monde pense qu'il va se passer dans dix ans à compter d'aujourd'hui. Les circonstances de cette évolution sont très typiques et très instructives.

Encore une fois, en analysant le rôle de la science dans la vie ou dans les autres sciences, une chose est très visible. Il existe de vastes domaines des mathématiques qui ont été très utiles en pratique. Cette utilité pratique, cependant, est parfois une forme d'utilité pratique plutôt indirecte.

Par exemple, un mathématicien exprime généralement qu'une théorie est directement utile si elle peut être utilisée en physique théorique. Après quoi, il doit encore dire que les avancées en physique théorique ne sont utiles que si elles sont utiles en physique expérimentale. Après quoi, on doit dire qu'un concept en physique expérimentale est, selon des critères ordinaires, utile s'il est utile en ingénierie. Même après l'ingénierie, vous pouvez faire un pas de plus. Donc, tous ces concepts d'utilité sont assez limités, et nous entendons seulement par là que chaque science devrait avoir des applications en dehors de son propre domaine, et qu'il existe une direction dans cette séquence d'applications vers des applications pratiques en vue d'une utilisation. Cependant, si l'on ne chipote pas sur la définition de l'utilité, cela signifie par exemple que selon les normes du mathématicien, tout ce qui n'est pas mathématique est utile, alors il faut dire que de grands pans de connaissance ont été utiles. Aussi, ces très grandes zones sont vraiment directement utiles par la somme de tous ces critères. En effet, ces choses ont vraiment fait une grande différence dans le monde dans lequel nous vivons, généralement un peu après leur entrée dans un autre domaine, mais toujours de telle manière que la partie mathématique est assez vitale de façon évidente.

Maintenant, il est très intéressant que la majorité de ces choses aient été développées avec très peu d'utilité et très souvent sans aucun soupçon de devenir utiles plus tard, pour des raisons d'un tout autre caractère. C'est une situation caractéristique. Je pourrais mentionner certaines formes d'algèbre, dans le domaine des matrices et des opérateurs, qui ont été inventées à des moments où il n'y avait aucune raison matérielle de soupçonner que de vingt à cent ans plus tard, elles joueraient un rôle en mécanique quantique (non encore existante). Il en va de même pour les découvertes du domaine de la géométrie différentielle, pour laquelle il n'y avait absolument aucune raison qu'un jour, il y aurait une théorie de la relativité générale, et que la théorie de la la relativité utiliserait ce type de géométrie. Pourtant, ces choses sont tout à fait vitales.

Les exemples pourraient être multipliés.

Je dois dire, cependant, qu'il existe également des exemples du contraire. Un exemple très important est que le calcul a certainement été inventé par Newton pour un but spécifique en physique théorique.

Mais une grande partie des mathématiques qui sont devenues utiles ont été développées sans aucun désir d'être utiles, et dans une situation où personne ne pouvait savoir dans quel domaine elles deviendraient utiles ; et il n'y avait aucune indication générale qu'il en serait jamais ainsi. Dans l'ensemble, il est uniformément vrai en mathématiques qu'il y a un laps de temps entre une découverte mathématique et le moment où elle est utile ; et que ce laps de temps peut aller de trente à cent ans, dans certains cas même plus ; et que l'ensemble du système semble fonctionner sans aucune direction, sans aucune référence à l'utilité, et sans aucune volonté de faire des choses qui sont utiles. Bien sûr, il faut également considérer que cela est vrai pour l'ensemble du cours de toute science ; en d'autres termes, vous devriez considérer par quels processus une grande partie de la science est arrivée à un point où elle affecte la société dans la vie de tous les jours : la science physique vient de la mécanique, et comme les découvertes originales en mécanique, elles étaient principalement liées à l'astronomie, et n'étaient absolument pas connectées aux domaines dans lesquels se trouvent les applications aujourd'hui.

Cela est vrai pour toute la science. Les succès sont largement dus à l'oubli total de l'objectif, ou si même on voulait quelque chose en fin de compte, en refusant de chercher à propos de sujets profitables et en se fiant uniquement à l'objectif d'élégance intellectuelle ; c'est en suivant cette règle que l'on a réellement pris de l'avance à long terme, bien mieux que n'importe quel cours strictement utilitaire ne l'aurait permis.

Je pense que ce phénomène pourrait très bien être étudié en mathématiques ; et je pense que tout le monde en science est bien placé pour se satisfaire de la validité de ces points de vue. Et je pense qu'il est extrêmement instructif de regarder le rôle de la science dans la vie de tous les jours et de noter comment, dans ce domaine, le principe du laissez-faire a conduit à des résultats étranges et merveilleux.

Lettre de Gödel à von Neumann

Princeton, 20 Mars 1956

Cher M. von Neumann,

C'est avec la plus grande peine que j'ai appris votre maladie. Cette nouvelle était assez inattendue pour moi. Morgenstern m'avait un peu parlé l'été dernier de la faiblesse que vous aviez ressentie un jour, mais à ce moment-là, il ne pensait pas que c'était grave. J'ai appris que vous aviez dû subir un traitement lourd et je suis heureux que ce traitement ait eu le succès escompté et que vous alliez maintenant mieux. Je vous souhaite un rapide rétablissement et j'espère que les découvertes médicales les plus récentes pourront si possible vous amener une complète rémission.

Puisque vous vous sentez maintenant mieux, je souhaiterais m'autoriser à vous écrire à propos d'un problème mathématique, au sujet duquel votre opinion m'intéresserait beaucoup : on peut facilement construire une machine de Turing qui pour toute formule F de la logique des prédicats du premier ordre et pour tout entier n nous permet de décider s'il existe une preuve de F de longueur n (longueur = nombre de symboles). Appelons $\psi(F, n)$ le nombre d'étapes dont a besoin la machine et appelons $\varphi(n) = \max_{F} \psi(F, n)$. La question que l'on se pose est celle de la croissance de $\varphi(n)$ pour une machine optimale. On peut montrer que $\varphi(n) > kn$.

S'il y avait vraiment une machine avec $\varphi(n) \sim kn$ (ou même $\sim kn^2$), cela aurait des conséquences de la plus grande importance. En l'occurrence, cela voudrait clairement dire que malgré l'indécidabilité du Entscheidungsproblem [1], le travail mental d'un mathématicien au sujet des questions fermées [2] pourrait complètement être effectué par une machine. Après tout, il suffirait de choisir le nombre entier n suffisamment grand de telle sorte que lorsque la machine ne fournirait pas de résultat, cela n'aurait plus de sens de penser davantage au problème en question. Maintenant il me semble, pourtant, qu'il serait tout à fait possible que $\varphi(n)$ puisse grossir à ce rythme. Depuis lors, il semblerait que $\varphi(n) > kn$ soit la seule estimation que l'on puisse obtenir en généralisant une preuve de l'indécidabilité du problème de la décision et après tout, $\varphi(n) \sim kn$ (ou $\sim kn^2$) signifie simplement que le nombre d'étapes, par opposition à une méthode par essais/erreurs peut être réduit de N à $\log N$ (ou à $(\log N)^2$). Pourtant de telles réductions fortes apparaissent dans d'autres problèmes finis, par exemple dans le calcul du symbole de résidu quadratique en utilisant une application répétée de la loi de réciprocité quadratique. Il serait intéressant de savoir, par exemple, ce qu'il en est dans la situation concernant la détermination du caractère

1. problème de la décision
2. appelées questions Oui-ou-Non dans la lettre.

de primalité d'un nombre et d'estimer s'il est possible que le nombre d'étapes pour les problèmes combinatoires finis soit bien diminué par rapport au nombre d'étapes d'une recherche exhaustive.

Je ne sais pas si vous avez entendu parler du “problème de Post”, dans lequel apparaissent des degrés d'insolvabilité de problèmes de la forme $(\exists y)\varphi(y, x)$, où φ est récursive ; c'est un problème qui a été résolu et a reçu une réponse positive par un très jeune homme du nom de Richard Friedberg. La solution est très élégante. Malheureusement, Friedberg n'a pas l'intention d'étudier les mathématiques, mais plutôt la médecine (apparemment sous l'influence de son père). Peu importe, que pensez-vous des tentatives de construire les fondements de l'analyse sur une théorie de type ramifié, qui a récemment pris de l'élan ? Vous devez sûrement être au courant du fait que Paul Lorenzen a poursuivi dans cette voie vers la théorie de la mesure de Lebesgue. Pourtant, je crois que dans des parties importantes de l'analyse, on ne peut éliminer que des méthodes de preuves “non-prédictives” existent vraiment.

Je serais très heureux d'avoir de vos nouvelles personnelles. Merci de me dire s'il y a quelque chose que je puisse faire pour vous. Avec mes meilleurs vœux et salutations, ainsi qu'à votre épouse,

Sincèrement vôtre,

Kurt Gödel

PS. je vous félicite de tout cœur pour la récompense que le gouvernement américain vous a attribuée.

Extrait de *Logique modale* de Thierry Lucas, p. 599 et 600

IV. Retombées et problèmes.

1. L'élargissement des perspectives sémantiques conduit naturellement à ce qu'on appelle la sémantique des voisinages de Scott [1].

L'idée est ici de structurer l'ensemble des indices non pas en donnant une relation binaire, mais en spécifiant pour chaque indice un ensemble d'ensembles d'indices qui sont considérés comme ses voisinages. Un exemple d'opérateur obéissant naturellement à cette sémantique est l'opérateur "être en train de". Ainsi,

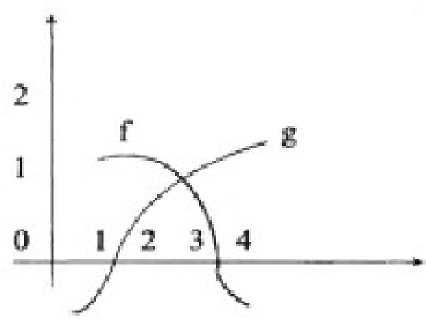
- il est en train de pleuvoir à l'instant i revient à
- il existe un intervalle de temps autour de i tel qu'il pleuve en chaque instant de cet intervalle,
  ou encore
- l'ensemble des instants où il pleut est un voisinage (au sens topologique) de i.

Dans cet esprit, on posera :

$\Box A$ vaut V en i

si $\{j \mid A \text{ vaut } V \text{ en } j\} \in \mathscr{U}(i)$, où $\mathscr{U}$ est la donnée typique [2].

Cette sémantique est plus importante qu'il n'y paraît, car elle s'avère étroitement liée à la notion de topologie de Grothendieck, fondamentale dans l'étude de la géométrie [3]. Soit par exemple l'ensemble des nombres réels avec leur topologie et leurs voisinages ouverts usuels ; une famille de sous-ouverts de l'ouvert U est un recouvrement de U si leur réunion est U tout entier. Dans le schéma suivant,



on a figuré deux fonctions, f et g, définies sur l'ouvert $(1,4)$, lequel est recouvert par les ouverts $(1,3)$ et $(2,4)$. Sur l'ouvert $(1,4)$, ni f ni g ne sont globalement positives et

1. Voir par exemple les chapitres 7. 8 et 9 de Chellas, B.F., Modal Logic : An imroduction, Cambridge, Cambridge Universicy Pres, 1980.

2. la donnée typique en logique modale correspond au vrai en logique classique.

3. Voir Goldblatt, R.I., Grothendieck topology as geometric modaliy, in Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 27 (1981), p. 495-529.

l'assertion "il existe une fonction positive" est fausse sur cet ouvert. Par contre, il peut être intéressant de noter que sur l'ouvert $(1, 3)$ il existe une fonction positive, à savoir (la restriction de) f et que sur l'ouvert $(2, 4)$, il existe aussi une fonction positive, à savoir (la restriction de) g. On dit que l'assertion "il existe une fonction positive" est *localement* vraie en $(1, 4)$. Plus généralement, la définition suivante montre que l'opérateur "est localement vrai" est bien du type que l'on a considéré ci-dessus :

A est localement vrai en U

si l'ensemble des ouverts où A est vrai forme un recouvrement de U.

Les poèmes de Richard Friedberg

The Electromagnetic Spectrum

Neither the long slow rolling of the ether
That wakens metal to its fiery dance
Nor the chaotic bustle warmth sends hither
Pricking our stuff with catapults of chance,

Nor yet those rays that strike us at the bone
And fit their steps to crystal's even stair
Nor Nature's hardest bits, that break and shower
Already at the kiss of thinnest air,

So vivid gleam, put on such various hue
Touch so the three-toned organ of our sight,
As does that single octave exquisite
Alive with emerald, crimson, and deep blue
(Yet brilliantly enrobed in dazzling white)
Whose harmonies inform our inmost view.

Le spectre électromagnétique

Ni le long roulement lent de l'éther
Qui éveille le métal à sa danse enflammée
Ni la chaleur chaotique de l'agitation n'envoie ici
Piquer nos affaires avec des catapultes de hasard,

Ni non plus ces rayons qui nous frappent à l'os
Et adaptent leurs pas à l'escalier uniforme du cristal
Ni les morceaux les plus durs de la nature, qui se cassent et se douchent
Déjà au baiser de l'air le plus mince,

Lueur si vive, mettez une teinte si variée
Touchez donc l'organe tricolore de notre vue,
Tout comme cette seule octave exquise
Vivant avec l'émeraude, le pourpre et le bleu profond
(Pourtant brillamment enrobé d'un blanc éclatant)
Dont les harmonies informent notre vue intime.

Dark or Bright
Over the weft
under the wabe,
into the sun
and starshine

Heavy or light
dark or bright,
sins like chalk
and sandstone

Wounds that weep
stains that sting,
flowing with milk
and nectar

Dark or bright
colors that bleed,
stains like blood
and chocolate

Sombres ou lumineux
Au fil de la trame
Sous l'onde,
Dans le soleil
et les étoiles

Lourds ou légers
sombres ou lumineux,
péchés comme la craie
et le grès

Des blessures qui pleurent
des taches qui piquent,
coulant avec le lait
et le nectar

Sombres ou lumineuses
des couleurs qui saignent,

Les 4 derniers vers de *Dark or bright* peuvent être lus sur une célèbre boîte de lessive, Friedberg explique que son mentor pour ce poème est donc la marque de lessive en question.

des taches comme du sang
et du chocolat.

Fermions and Bosons
Unique, and yet reprinted o'er and o'er,
Alike, yet eer alone, cannot bear
That my own twin be seated in my chair ;
Whilst they in even ranks swell more and more,
Wave upon wave, roar upon ocean roar.
Unless tight yoked in a reluctant pair,
The ether knows us not ; half spinning there,
My oddly twisted self with self's at war.

Yet, by exclusion, we mark off the space
That bears dark witness to their brilliant flight ;
We occupy, make firm, we render place
For their swift bulletins of sound and light.
We make up Nature's brick, they her cement ;
We from the nether, they from Heaven sent.

Fermions et Bosons
Unique et pourtant réimprimé à l'envi,
À l'identique, mais seul, je ne peux supporter
Que mon propre jumeau soit assis sur ma chaise ;
Alors qu'ils gonflent de plus en plus en rangs égaux,
Vague après vague, rugissement après rugissement de l'océan.
À moins que ce ne soit serrés par le joug dans une paire réticente,
L'éther ne nous connaît pas ; y tournant à moitié,
Mon moi étrangement tordu en guerre avec moi-même.

Pourtant, par cette exclusion, nous marquons l'espace
Qui supporte des témoins sombres à leur vol brillant ;
Nous occupons l'espace, le rendons ferme, et le leur rendons
Pour leurs bulletins rapides de son et de lumière.
Nous sommes les briques de la Nature, eux en sont son ciment ;
Nous les envoyés du bas, eux les envoyés du Ciel.

Ce poème a été inspiré par une question posée dans The Feynman Lectures vol. Chapitre II 20-3.

''*A rainbow looks beautiful to us. Everybody says, Ooh, a rainbow. But if we were* *blind ? [as we are] when we measure the infrared reflection coefficient of sodium chloride One day the physical review of the blind men might publish [an] article [called] The Intensity of Radiation as a Function of Angle under Certain Conditions of the Weather [with] a graph [which] contains much more detail than we apprehend when we look at a rainbow, because our eyes cannot see the exact details in the shape of the spectrum Do we have enough imagination to see in the spectral curves the same beauty we see [in] the rainbow ? I don't know.*"

traduction : "*Un arc-en-ciel nous est beau. Tout le monde dit, Ooh, un arc-en-ciel. Mais si nous étions aveugles ? [comme nous sommes] lorsque nous mesurons le coefficient de réflexion infrarouge du chlorure de sodium. Un jour, une revue scientifique de scientifiques aveugles pourrait publier [un] article "L'intensité du rayonnement en fonction de l'angle dans certaines conditions météo" [avec] un graphique [qui] contiendrait beaucoup plus de détails que nous n'en appréhendons quand nous regardons un arc-en-ciel, parce que nos yeux ne peuvent pas voir les détails exacts de la forme du spectre. Avons-nous assez d'imagination pour voir dans les courbes spectrales la même beauté que celle que nous voyons [dans] l'arc-en-ciel ? Je ne sais pas.*"

Le poème se veut être une réponse négative à la question de Feynman : il dit simplement qu'aucune autre région du spectre n'affecte les sens humains aussi profondément que le spectre visible.

Messiaen

Conférence de Kyoto

12 novembre 1985

On me demande de faire un résumé technique de mon langage musical. Ce n'est pas une chose facile. Il faudrait y passer 2 ou 3 mois, en faisant une sorte de classe pour initiés, avec exemples musicaux au Piano et à l'Orchestre. Je vais essayer de le faire en une heure, uniquement avec des mots, et, hélas ! en français. La première chose que je puis dire, c'est que je me suis toujours heurté à quatre difficultés, qui sont le malheur de ma vie, et auxquelles le temps seul a pu apporter quelques solutions. La première difficulté est que je suis un musicien rythmicien, et que les gens auxquels je m'adresse confondent le rythme avec les valeurs égales et les temps réguliers. La seconde est que je vois des couleurs intellectuellement lorsque j'entends ou que je lis de la musique, et que mes élèves comme mes auditeurs ne voient pas de couleurs du tout. La troisième est que je suis ornithologue, que j'ai noté beaucoup de chants d'oiseaux, que je les utilise constamment dans mes œuvres, et que le public des concerts est généralement composé d'habitants des villes qui n'ont jamais entendu un chant d'oiseau. La quatrième, la plus grave, et la plus terrible, est que je suis croyant, chrétien, et catholique, et que je parle de Dieu, des Mystères Divins, et des Mystères du Christ, à des gens qui n'y croient pas, ou qui connaissent mal la religion et la théologie. Si vous le permettez, je vais traiter de ces quatre difficultés, l'une après l'autre.

Le rythme

Après avoir terminé mes études traditionnelles au Conservatoire de Paris, j'ai voulu en savoir davantage sur le rythme et je l'ai étudié pratiquement tout seul. J'ai d'abord travaillé le plain-chant ou chant grégorien, et l'alternance des arsis et des thésis, c'est-à-dire des levées et des retombées, et le mélange du 2 et du 3. Ensuite, j'ai abordé la Métrique grecque, avec l'emploi des nombres premiers (par exemple le chiffre 7 dans les Épitrites ou le chiffre 11 dans le vers Aristophanien). Puis, j'ai longuement réfléchi sur les Decî-tâlas ou rythmes provinciaux de l'Inde Antique. J'ai essayé de retrouver leurs symboles cosmiques et religieux, et surtout leurs lois rythmiques. On trouve dans la Métrique grecque le rythme Crétique : longue, brève, longue - qui existe aussi dans les decî-tâlas de l'Inde sous le nom de Dhenkî, ce rythme est un "rythme non rétrogradable". Le rythme non rétrogradable est au départ de presque toutes mes recherches rythmiques. On trouve déjà des rythmes non rétrogradables dans ma première œuvre valable pour l'orgue : "La Nativité du Seigneur", écrite en 1935. Je vais essayer d'expliquer le rythme non rétrogradable par quelques images poétiques. Depuis longtemps, dans les arts décoratifs (architecture, tapisserie, vitrerie, parterres de fleurs), on use de motifs inversement symétriques, ordonnés autour d'un centre libre. Cette disposition se retrouve dans les nervures des feuilles d'arbres, dans les ailes de papillons, dans le visage et le corps humain, et même dans les vieilles formules de magie. Le ryhme non rétrogradable fait exactement la même chose. Ce sont deux groupes de durées, rétrogradés l'un par rapport à l'autre, encadrant une valeur centrale libre et commune aux deux groupes. Lisons le rythme de gauche à droite ou de droite à gauche, l'ordre de ses durées reste le même. C'est un rythme absolument fermé.

Viennent ensuite les "personnages rythmiques". On trouve dans la "Danse sacrale" du "Sacre du Printemps" de Stravinsky, le départ de cette idée : deux groupes de durées sont en présence, le premier décroît, le second ne change pas. En amplifiant un peu la chose, je vais donner des personnages rythmiques une explication qui vient des conventions théâtrales. Supposons une scène de théâtre : trois personnages sont sur le plateau - le premier agit, c'est lui qui mène la scène - le second est mû, est agi par le premier - le troisième assiste au conflit sans intervenir, il regarde et ne bouge pas. De même, trois groupes rythmiques sont en présence : le premier augmente, c'est le personnage attaquant - le deuxième diminue, c'est le personnage attaqué - le troisième ne change jamais, c'est le personnage immobile. Dans le cinquième mouvement de "Turangalîla-Symphonie" (pour Piano solo, Onde Martenot, et grand Orchestre, 1946, 1947, 1948), j'ai utilisé un développement à six personnages rythmiques. Deux augmentent, deux diminuent, deux restent immobiles. Avec cette complication que les trois premiers accomplissent les gestes des trois autres en sens inverse, en rétrogradant les durées.

Les "permutations symétriques". On sait que le nombre de permutations de plusieurs objets distincts augmente démesurément à chaque ajout d'une unité nouvelle aux objets choisis. Trois objets ont 6 permutations possibles, douze objets donnent 479 001 600 permutations. Je prends une gamme chromatique de durées allant de la triple croche à la ronde, donc de 1 à 32 triples croches, avec toutes les durées intermédiaires. Si je veux en chercher et en utiliser les permutations, leur nombre est si élevé qu'il me faudrait plusieurs années pour les écrire. Il faut donc choisir, et choisir avec le maximum de chance de dissemblance d'une permutation à l'autre. Pour y arriver, je lis ma gamme chromatique de durées dans un ordre choisi par moi. Puis, ayant écrit le résultat, je numérote de 1 à 32 la succession des durées obtenues. Ensuite, je lis cette nouvelle succession dans le même ordre que la première fois, j'écris de nouveau le résultat, et je recommence, ce qui me donne un troisième résultat, et ainsi de suite, jusqu'à ce que je retrouve textuellement la gamme chromatique de durées de départ. Cela donne un chiffre de permutations raisonnable, pas très loin du nombre de durées choisies, et aussi des permutations assez différentes pour être juxtaposées et superposées. J'ai utilisé les "permutations symétriques" pour la première fois dans "Île de feu 2" pour piano (1950), mais on les retrouve dans plusieurs de mes œuvres postérieures à 1950. L'œuvre où elles apparaissent le plus fortement, c'est "Chronochromie" pour orchestre (1959-1960). Dans les deux "strophes" de Chronochromie, on entend des "permutations symétriques" superposées 3 par 3, dont le déroulement fait chaque fois toute la strophe. Comme la succession de leurs durées est difficile à entendre, j'ai habillé ces durées de trois façons : d'abord par des chants d'oiseaux aux Bois, qui rappellent constamment l'unité de valeur (ici, la triple croche) - ensuite par des timbres d'instruments métalliques à résonance prolongée (gongs, cloches, cymbales, et tam tam) - enfin, par des races d'accords aux couleurs très différentes, confiées aux cordes.

Pour être tout à fait complet, je dois mentionner quelques autres recherches rythmiques. Dans mon "Livre d'orgue" (1951), j'ai utilisé trois cas de permutation : le mouvement rétrograde, le mouvement extrêmes au centre, le mouvement centre aux extrêmes. Encore dans mon "Livre d'orgue", j'ai utilisé des rythmes hindous traités en "personnages rythmiques". Toujours dans mon "Livre d'orgue", je me suis servi d'une gamme chromatique de 64 durées, allant de 1 à 64 triples croches, dans un ordre de permutation choisi par moi, et traitées en canon rétrograde. Dans mes "Trois petites Liturgies de la Présence Divine", pour chœur de voix de femmes, Piano solo, Onde Martenot, vibraphone, percussions, orchestre à cordes (1944), on trouvera un canon par ajout du point : toutes les durées proposantes étant augmentées de leur moitié par les durées répondantes. Enfin, j'ai écrit en 1949 "Mode de valeurs et d'intensités" pour Piano, sorte de super-série de 36 sons, 24 durées, 12 attaques, 7 intensités. L'idée de série, quittant l'univers exclusif des sons, est appliquée à d'autres paramètres. Ce sont, évidemment, les durées qui ont le plus d'importance : elles divisent le clavier en trois gammes chromatiques de durées, la première basée sur la triple croche, la deuxième basée sur la double croche, la troisième basée sur la croche. J'ai repris cet effet dans la "Chouette Hulotte" de mon "Catalogue d'oiseaux" pour piano (1956 à 1958), et dans le tableau des "Stigmates" de mon opéra "saint François d'Assise" (écrit de 1974 à 1983).

Le son-couleur

J'ai toujours aimé la couleur. Tout enfant, je faisais des décors de théâtre miniature, dont les fonds de scène étaient en cellophane colorée avec des encres de couleurs. Je plaçais ces fonds de scène contre une fenêtre, et la lumière du soleil passait à travers mes cellophanes et renvoyait des reflets colorés. Vers l'âge de 10 ans, j'ai vu pour la première fois les vitraux de la Sainte Chapelle à Paris, et ces vitraux me marquèrent pour la vie. J'aime aussi beaucoup les vitraux de la cathédrale de Bourges, leurs rouges et leurs bleus sont extraordinaires, mais rien ne peut remplacer la Sainte Chapelle qui est toute en vitres. Vers l'âge de 23 ans, Blanc-Gatti était atteint de synopsie, c'est-à-dire qu'il avait un dérèglement du nerf optique et du nerf auditif qui lui faisait voir des couleurs lorsqu'il entendait des sons. Il voyait ces couleurs par les yeux, et elles se superposaient pour lui au milieu ambiant, C'est ainsi qu'il a peint un orgue, dont les tuyaux sont entourés de cercles de couleurs : lorsque l'orgue était joué et produisait des complexes de sons, il entendait les sons, voyait l'orgue, et, en plus, des cercles de couleurs se superposaient pour lui à la vision de l'orgue : il a donc peint exactement ce qu'il voyait. Ce phénomène m'a fait beaucoup réfléchir. Et je me suis rendu compte que, moi aussi, je liais des couleurs aux sons, mais intellectuellement, pas par les yeux. En effet, depuis toujours, lorsque j'entends ou lorsque je lis de la musique (en l'entendant intérieurement), je vois dans ma tête des complexes de couleurs qui marchent et bougent avec les complexes de sons. À force d'observer ce qui se passait en moi, j'en ai déduit une loi. S'il reste à la même place, un complexe de sons situé dans le médium engendre toujours les mêmes couleurs. Si on le transporte à l'octave aiguë, les mêmes couleurs seront dégradées vers le blanc (c'est-à-dire plus claires), si on le transporte à l'octave grave, les mêmes couleurs seront rabattues par le noir (c'est-à-dire plus sombres). Si on transpose le même complexe de sons au demi-ton, au ton, à la tierce, à la quarte, etc. les couleurs correspondantes changent complètement. Il s'ensuit qu'il y a, pour chaque complexe de sons, 12 combinaisons de couleurs changeant avec chacun des 12 demi-tons, mais que la combinaison de couleurs reste la même au simple changement d'octave, avec un éclaircissement s'il s'agit d'une octave aiguë, avec un assombrissement s'il s'agit d'une octave grave.

J'ai utilisé dans mes œuvres un très grand nombre de complexes de sons qui sont en même temps des complexes de couleurs. Pour les chants d'oiseaux harmonisés, j'ai dû parfois inventer un accord différent pour chaque note de la mélodie. Je parlerai seulement ici des "modes à transpositions limitées", des "accords à renversements transposés sur une même note de basse", des "accords à résonance contractée", de "l'accord du total chromatique".

Les "modes à transpositions limitées". J'en avais catalogué sept dans ma jeunesse, mais je ne me suis servi en fait que de quatre modes : le mode 2, le mode 3, le mode 4, le mode 6. Chaque mode n'est transposable qu'un certain nombre de fois, après quoi on retombe dans les mêmes notes. C'est précisément cette limitation, cette impossibilité dans la transposition qui fait leur charme, et les apparente aux "rythmes non rétrogradables" : en effet, les "rythmes non rétrogradables" ne peuvent pas se rétrograder parce qu'ils contiennent en eux-mêmes de petites rétrogradations, et les "modes à transpositions limitées" ne peuvent pas se transposer parce qu'ils contiennent en eux-mêmes de petites transpositions. On a souvent cité mes "modes à transpositions limitées" comme des gammes. Ce ne sont pas des gammes, mais des couleurs harmoniques. Couleurs du mode 2, qui se transpose trois fois : première transposition : bleu violet - deuxième transposition : or et brun - troisième transposition : vert. Couleurs du mode 3, qui se transpose quatre fois : première transposition : orangé, or, et blanc laiteux - deuxième transposition : gris et mauve - troisième transposition : bleu et vert - quatrième transposition : orangé, rouge, avec un peu de bleu. Les modes sont des lieux colorés, des petits pays colorés, où la couleur générale reste la même tant que l'on ne change pas de mode ou de transposition. Pour les accords, il en va autrement. L'accord est une couleur en soi qui change aux 12 transpositions possibles. Dans le cas des “accords à résonance contractée”, nous aurons toujours deux couleurs : la couleur de l’accord appogiature, la couleur de l’accord réel, compliquées des sons résultants graves ramenés au médium contre les autres notes. Dans le cas des “accords du total chromatique”, il s’agit non pas d’un “cluster” mais d’un ensemble de douze sons comprenant huit sons colorés, et quatre sons supplémentaires aigus qui rentrent dans la résonance des huit premiers. Le premier “accord du total chromatique” donne : une large nappe bleu violet, avec des lunes roses, jaune pâle, et gris d’acier - les quatre notes supplémentaires l’entourent d’un cercle vert mousse clair. Le neuvième “accord du total chromatique” donne : deux zones rouges côte à côte : une grande zone rouge rubis, une zone rouge carmin plus petite - les quatre notes supplémentaires ajoutent tout autour un cercle bleu gris, clair et brillant. Le cas le plus intéressant est celui des “accords à renversements transposés sur la même note de basse”. L’accord à l’état fondamental possède une certaine couleur. Ses renversements, en groupant différemment les mêmes notes, donnent des couleurs analogues mais non semblables. Si nous transposons les renversements sur la même note de basse, nous obtenons quatre couleurs très différentes : l’état fondamental, le premier, le deuxième, et le troisième renversements. En prenant chacun des douze sons comme note de basse nous obtenons 48 couleurs différentes. Quatrième “accord à renversements transposés” sur la même note de basse : mi. Etat fondamental sur mi : bandes verticales vertes, violettes, bleu foncé - premier renversement sur mi : blanc et or - deuxième renversement sur mi : large manteau bleu saphir intense, dans les plis : des reflets violet Parme et bleu de Chartres - troisième renversement sur mi : une spirale d’or à reflets bleus et roses, sur un grand fond rouge carmin. Ces reflets irisés, ces opalescences, évoquent certains papillons dont les ailes - bleues de tous les bleus - deviennent vertes et violettes suivant les incidences de la lumière. Mieux encore, ils imitent les mouvements colorés des gemmes et des pierres précieuses : l’œil de chat, l’alexandrite, la chalcopyrite, les tourmalines, et l’opale (qui a donné son nom à l’opalescence).

Les chants d’oiseaux

Je ne suis pas seulement musicien, rythmicien, et apôtre du son couleur, je suis aussi ornithologue. Depuis l’âge de 18 ans environ, je note des chants d’oiseaux. J’ai noté des chants d’oiseaux chaque année, au moment où les oiseaux chantent, c’est-à-dire au printemps, tôt le matin (avant le lever du soleil), tard le soir (avant le coucher du soleil), et aussi dans la matinée et dans l’après-midi. J’ai fait ce travail d’abord en France, puis aux États-Unis d’Amérique, au Japon, et en Nouvelle-Calédonie. Chaque oiseau a son style, son esthétique particulière. Je parlerai d’abord des oiseaux de France (qui sont à peu près les mêmes dans toute l’Europe). On trouve en France les oiseaux des parcs et des jardins (comme la Fauvette à tête noire), les oiseaux de lisière de forêt (comme la Grive musicienne), les oiseaux des champs de blé (comme l’Alouette des champs), les oiseaux des vignes (comme la Linotte), les oiseaux des garrigues (comme le Traquet Stapazin), les oiseaux des roseaux et des étangs (comme la Rousserolle Effarvatte), les oiseaux de haute montagne (comme le Chocard des Alpes), les oiseaux des côtes marines et de l'Océan (comme le Courlis cendré). Il y a parmi tous ces oiseaux de grands et de petits chanteurs. Ceux qui ne font que des cris rythmés : les oiseaux de la montagne et de la mer. Ceux qui font des strophes plus ou moins élaborées : le Pic vert, le Pinson, le Loriot, la Chouette Hulotte. Ceux qui font de grands solos : l'Alouette des champs, la Grive musicienne, le Rossignol, la Fauvette des jardins, le Merle noir, le Rouge-gorge. L'emploi des chants d'oiseaux dans une œuvre demande beaucoup de travail. Il y a d'abord la notation. C'est une dictée musicale, prise dans la nature, avec un crayon et du papier à musique. On peut en même temps enregistrer le chant au magnétophone, et faire une autre dictée musicale d'après le magnétophone. Généralement, la notation d'après le magnétophone est plus exacte - mais plus artistique est celle faite dans la nature. Il faut noter plusieurs fois un même oiseau, et mélanger toutes les notations, pour obtenir un oiseau idéal. Il faut ensuite rendre le timbre de l'oiseau. On peut le faire par l'instrumentation : les piccolos, les flûtes, le xylophone, le piano, peuvent se rapprocher du timbre de certains oiseaux. On peut aussi rendre le timbre par l'harmonisation. C'est en inventant des accords plus ou moins chargés en sons harmoniques que l'on se rapproche le plus de l'oiseau. Plusieurs oiseaux chantent parfois ensemble, spécialement au lever du jour. Il faut les noter séparément, puis les réunir en contrepoint sur le papier. Cela ne reproduit pas les mélanges entendus, mais cela reste vraisemblable si l'on fait chanter ensemble des oiseaux du même pays et du même habitat. C'est l'attitude que j'ai adoptée dans “Réveil des oiseaux” pour piano et orchestre (1952-1953). On peut au contraire mêler des chants d'oiseaux de pays et d'habitat différents, ce qui donne des résultats mensongers par rapport à la réalité vivante, mais très intéressants musicalement. Je l'ai fait dans “Oiseaux exotiques” pour Piano, xylophone, glockenspiel, percussions, orchestre de Bois et Cuivres (1955), qui rassemble des oiseaux de l'Inde, de la Chine, de l'Amérique du Nord. Les œuvres que je viens de citer ne contiennent que des chants d'oiseaux. Dans “Catalogue d'oiseaux” pour Piano seul (écrit en 1956, 1957, 1958), je me suis intéressé aussi aux paysages dans lesquels évoluaient les oiseaux et j'ai écrit chaque pièce en l'honneur d'une province de France. Le titre de la pièce est le nom de l'oiseau type de la région choisie. Tous les oiseaux qui sont ses compagnons d'habitat chantent aussi. Et des thèmes musicaux très colorés sont consacrés aux arbres, aux fleurs, aux montagnes, aux rochers, aux rivières, à la mer, au ciel. L'œuvre entière dure presque trois heures. La forme de chaque pièce suit la marche vivante des heures du jour et de la nuit. Ce procédé formel sera repris dans ma plus grande pièce pour Piano seul : “la Fauvette des jardins”, pièce qui commence à quatre heures du matin et se termine à dix heures du soir, avec tous les chants d'oiseaux, tous les événements, et tous les éclairages d'une journée. Exécutée en concert, “la Fauvette des jardins” dure environ quarante minutes.

Tout de suite après le “Catalogue d'oiseaux” est venue la “Chronochromie” pour grand orchestre (1959-1960), dans laquelle on trouve des oiseaux de Suède, du Mexique, du Japon. Les Antistrophes rendent hommage à deux grands solistes de France : la

Grive musicienne, jouée par l'ensemble des Bois - et l'Alouette des champs, jouée par xylophone, marimba, et jeu de cloches. L'Épôde est un long contrepoint à 18 voix réelles, où chantent 18 oiseaux de France, confiés à 18 cordes solistes. Plus courtes sont les sept pièces des "Sept Haïkaï" (1962), pour Piano et orchestre. Elles sont spécialement dédiées au Japon. On y trouve quelques très beaux paysages du Japon ("le parc de Nara et les lanternes de pierre", "Miyajima et le torii dans la mer"), une allusion aux musiques traditionnelles japonaises, transposées sur le plan chrétien, avec mes couleurs harmoniques personnelles substituées aux accords du Shô : c'est la pièce intitulée "Gagaku". Enfin, tous les oiseaux japonais que j'ai notés à Karuizawa y figurent : notamment le célèbre Uguisu (Bouscarle du Japon), l'Hototoguisu (petit coucou à tête grise), le Kibitaki (gobe-mouches Narcisse), l'Oruri (gobe-mouches bleu du Japon), l'Aoji (bruant masqué du Japon), le San kô chô (gobe-mouches de Paradis du Japon), le Kuro tsugumi (Merle japonais), et aussi Hibari (Alouette des champs japonaise), Binzui (Pipit de Hodgson), Ô-yoshikiri (Rousserolle Turdoïde orientale).

Après les "Sept Haïkaï", j'ai écrit "Couleurs de la Cité céleste", pour piano et ensemble instrumental (1963), où l'on trouve l'oiseau Tui (Nouvelle-Zélande), le Benteveo (Argentine), et dix oiseaux du Brésil. Dans "Des Canyons aux étoiles" (1971-1974), pour Piano solo, cor solo, xylorimba, glockenspiel, et orchestre, on entend 52 oiseaux des États-Unis d'Amérique, et spécialement de l'Utah, et aussi quelques oiseaux d'Afrique, d'Australie, et des îles Hawaï.

La musique religieuse

Une grande partie de mes œuvres est consacrée à la méditation sur des mystères de la Foi chrétienne et catholique. Les "Méditations sur le Mystère de la Sainte Trinité" pour orgue (1969) traitent du premier et du plus grand mystère de la Foi. Les "Trois petites Liturgies de la Présence Divine" pour chœur de voix de femmes, Piano solo, Onde Martenot, vibraphone, célesta, percussions, et orchestre à cordes (1944), parlent de la Présence de Dieu : en nous (Antenne de la Conversation intérieure) - en Lui-même (Séquence du Verbe, Cantique Divin) - en toutes choses (Psalmodie de l'Ubiquité par amour). Plusieurs mystères de la vie de Jésus-Christ, Homme-Dieu, sont également évoqués. La naissance du Christ dans "la Nativité du Seigneur" pour orgue (1935), dans les "Vingt Regards sur l'Enfant Jésus" pour Piano seul (1944), sa Transfiguration dans "la Transfiguration de Notre-Seigneur Jésus-Christ" pour sept solistes instrumentaux, chœur et très grand orchestre (1965-1969), ses souffrances dans "l'Amen de l'agonie de Jésus" (troisième pièce des "Visions de l'Amen" pour deux pianos (1943), sa mort dans "la Puissance des ténèbres" du "Livre du Saint Sacrement" pour orgue (1984), sa Résurrection dans "Résurrection" des "Chants de terre et de ciel" pour soprano et piano (1938), dans "Combat de la mort et de la vie" des "Corps glorieux" pour orgue (1939), dans "l'Apparition du Christ ressuscité à Marie-Madeleine" du "Livre du Saint Sacrement" pour orgue (1984), son Ascension dans “l’Ascension” pour orchestre (1933). La Résurrection du Christ étant le gage de la nôtre, deux œuvres sont spécialement consacrées à notre propre résurrection : ce sont “les Corps glorieux” pour orgue (1939), puis “Et exspecto resurrectionem mortuorum” pour orchestre de Bois, Cuivres, cloches, gongs, tam tams (1964). Enfin, une œuvre est dédiée au Saint-Esprit : c’est la “Messe de la Pentecôte” pour orgue (1950).

Je voudrais maintenant parler de mes œuvres les plus importantes comme volume sonore : “la Transfiguration de Notre-Seigneur Jésus-Christ” (1965 à 1969), et l’opéra “saint François d’Assise” (1975 à 1983). Ces deux œuvres constituent une synthèse de toutes mes recherches sur le rythme, la couleur, les chants d’oiseaux. Elles sont aussi des actes de Foi.

“La Transfiguration de Notre-Seigneur Jésus-Christ” utilise un effectif considérable. Sept solistes instrumentaux : un Piano solo, un violoncelle solo, flûte, clarinette, xylorimba, vibraphone, marimba - chœur mixte de 100 personnes - Orchestre énorme de 109 musiciens - au total 216 exécutants. L’œuvre dure plus d’une heure et demie et se divise en deux septénaires, adoptant chacun le même déroulement : Récit évangélique - deux méditations - deuxième récit évangélique - deux méditations - Choral terminal. Les textes mis en musique sont des textes latins, tirés de l’Évangile selon saint Matthieu, des Épîtres de saint Paul, des Psaumes, du livre de la Sagesse, de la Genèse, des prières liturgiques de l’office de la fête, et de plusieurs passages de la “Somme théologique” de saint Thomas d’Aquin traitant de la Transfiguration. Deux idées parcourent l’œuvre : la lumière (parce que le Christ transfiguré était lumineux, brillant comme le soleil, et que les ressuscités participeront à cette gloire) - la filiation (parce que le Christ est à la fois homme et Dieu, que sa personne est celle du Fils de Dieu, le Fils par excellence, et aussi parce que la grâce nous rend fils adoptifs de Dieu). Plusieurs passages de la “Transfiguration” sont en rapport direct avec ce que j’appelle l’éblouissement, c’est-à-dire une sensation colorée intérieure analogue à celle que produisent sur les yeux les rosaces, les verrières, les vitraux des grandes cathédrales gothiques, quelque chose de terrible et de sacré, dont on ne comprend pas le détail, qui nous transporte dans un monde de lumière trop fort pour notre raison.
- Le premier de ces passages se situe dans la huitième pièce, au moment où la Voix qui sort de la nuée dit : “Celui-ci est mon Fils bien aimé”. La Voix est confiée au Chœur. Elle est accompagnée d’accords trillés multicolores aux cordes, dont les couleurs se meuvent à des vitesses différentes. Ce sont des “accords tournants”, joués dans deux transpositions superposées, auxquels s’ajoutent le frémissement des sons harmoniques, les trilles de triangle et de cymbale. Le mouvement est très lent, la nuance est pianissimo. Peu à peu, le crescendo et les “accords tournants” amènent une lumière accrue par la victorieuse tierce majeure.
- Le deuxième passage se situe à la fin de la neuvième pièce. Une grande combinaison rythmique superpose le rythme du chœur à trois groupes de rythmes différents utilisant des pieds grecs traités en brèves et longues de durées diverses, et des decî-tâlas de l’Inde en mouvement rétrograde. Chaque groupe de rythme a ses harmonies propres :

ce sont des “accords à résonance contractée”, des “accords tournants”, des “accords à renversements transposés”. Les petites cymbales, les cloches, les gongs, doublent les rythmes des Bois et des Cordes, les trompettes et les trombones soulignent le rythme du chœur. La sonorité est très forte, ce sont des couleurs énormes qui évoluent en masse les unes sur les autres.
- Le troisième passage est dans la douzième pièce, sur les mots latins : “Gloria in excelsis Deo !” (Gloire à Dieu dans les hauteurs !).

Le début de la phrase est donné en force, par les Bois, les Cuivres, et le Chœur. Brusquement, sur le mot “Deo”, on tombe dans un abîme de douceur, avec le chœur et les cordes pianissimo subito, faisant un grand changement de clarté, des contrepoints par les violoncelles pizzi, le piano jouant des accords en “deuxième mode à transpositions limitées”, et des “accords à renversements transposés” et “à résonance contractée”. Enfin, la sensation d’éblouissement se retrouve dans les deux chorals qui terminent chaque septénaire. Le premier choral est pianissimo, le deuxième choral est fortissimo, mais l’un et l’autre ne peuvent s’analyser que par des couleurs. Ce sont des couleurs à la fois suaves et terrifiantes, qui rejoignent cette interprétation des Psaumes s’adressant à Dieu par laquelle j’ai terminé ma “Conférence de Notre-Dame” :

“Dans Ta Musique, nous VERRONS la Musique -
Dans Ta lumière, nous ENTENDRONS la Lumière”.

“Saint François d’Assise”, opéra en trois actes et huit tableaux, m’a coûté plus de huit années de travail. J’en ai fait moi-même le poème, la musique, l’orchestration, et les projets de décors et de costumes. L’œuvre est très longue : près de cinq heures de spectacle. Son effectif est considérable. Il y a d’abord les sept rôles : l’Ange, saint François, le lépreux, Frère Léon, Frère Massée, Frère Élie, Frère Bernard. Puis un chœur mixte de 150 personnes. Composition orchestrale : les Bois par 7 - cinq claviers : xylophone, xylorimba, marimba, glockenspiel, vibraphone - les Cuivres par 4 (avec six cors) - trois Ondes Martenot - les Cordes en grand nombre - en plus des cinq claviers, cinq percussionnistes jouant une quarantaine d’instruments, dont deux jeux de cloches, un Éoliphone (machine à vent), et un Géophone (machine à terre). Chaque personnage a quatre ou cinq thèmes. Plus un thème d’oiseau qui l’accompagne dans toutes ses entrées en scène. Par exemple, la Gerygone (petite fauvette de l’île des Pins, près de la Nouvelle Calédonie) est attachée à l’Ange. La Capinera (Fauvette à tête noire), oiseau type des Carceri d’Assise, accompagne saint François. L’œuvre entière repose, non pas sur une progression dramatique, mais sur une progression intérieure : à chaque tableau, saint François reçoit un accroissement de grâce.

Au premier tableau : “la Croix”, François comprend ce qu’est la sainteté.

Au deuxième tableau : “les Laudes”, François désire la sainteté.

Au troisième tableau : “le baiser au lépreux”, lorsque François embrasse le lépreux, un double miracle se produit : le lépreux est guéri et François devient saint François.

Au quatrième tableau : “l’Ange voyageur”, l’Ange apparaît familièrement au milieu des hommes, comme un beau papillon énigmatique, et ceux-ci ne le reconnaissent pas.

Au cinquième tableau : “l’Ange musicien”, l’Ange apparaît à saint François (qui le reconnaît tout de suite), et il joue un solo de viole d’une telle suavité que saint François s’évanouit.

Au sixième tableau : “le Prêche aux oiseaux”, saint François, initié aux mystères célestes par la musique de l’Ange, comprend le langage des oiseaux et parle avec eux.

Au septième tableau : “les Stigmates”, le Christ parle à saint François, et c’est le chœur qui symbolise la voix du Christ. Une immense Croix apparaît. Cinq rayons partent de la Croix et viennent frapper saint François - celui-ci reçoit le sceau de l’approbation divine par les Stigmates : il devient ainsi conforme au Christ dont il porte les cinq plaies : aux deux mains, aux deux pieds, au côté droit.

Au huitième tableau : “la mort et la nouvelle vie”, l’Ange apparaît de nouveau à saint François et lui promet le Paradis, saint François meurt, et le chœur chante sa résurrection future.

Grâce à l’énorme composition orchestrale, mon opéra contient des milliers d’accords et de combinaisons de timbres, avec de constants changements de couleurs. Dans le sixième tableau : “le Prêche aux oiseaux”, on entend non seulement les oiseaux que j’ai notés aux Carceri : le Troglodyte, le Rouge-gorge, la Fauvette à tête noire, mais aussi les oiseaux de l’Île des Pins (près de la Nouvelle Calédonie) : Eopsaltria, Philemon, la fauvette Gerygone, le Gammier - on entend aussi beaucoup d’oiseaux d’Italie, de France, et d’Europe (dont l’Alouette des champs, le Merle noir, la Grive musicienne, le Loriot), des oiseaux du Maroc, du Japon, l’oiseau-lyre d’Australie. Au début du tableau, et dans le grand concert d’oiseaux qui précède sa conclusion, en plus des rythmes très complexes des xylos et des Bois, certains instruments solistes jouent hors tempo (au signe du Chef), pour rendre l’impression de désordre organisé que donne un ensemble de chants d’oiseaux. Il ne s’agit pas de musique aléatoire : ce sont des tempi différents qui se superposent. Couleurs, chants d’oiseaux, rythmes, sont plus abondants ici que dans toutes mes autres œuvres. Ce qui domine cependant, c’est la Foi. Tout mon opéra est un immense acte de Foi en Dieu. Il est en même temps un hommage à la sainteté incrnée par saint François. L’œuvre se résume par ces paroles de saint François mourant :

“Seigneur ! Musique et Poésie m’ont conduit vers Toi : par image, par symbole, et par défaut de Vérité. Seigneur ! Illumine-moi de ta Présence ! Délivre-moi, enivre-moi, éblouis-moi pour toujours de ton excès de Vérité...”

L’acte de Foi s’augmente de l’Espérance en la Résurrection, chantée en conclusion par le chœur :
“De la douleur, de la faiblesse, et de l’ignominie : il ressuscite de la Force, de la Gloire, de la Joie ! ! !”

Pierre Boulez - 1925-2016
Jérôme Bloch (février 2016)

“Il faut aussi rêver sa révolution, pas seulement la construire” (Pierre Boulez)

Le souvenir que je garde de Pierre Boulez, entre autres rencontres, restera surtout les quelques jours qu'il a passés à Florence, lorsque je l'avais invité pour fêter ses 80 ans, il y a dix ans. Je dirigeais alors l'Institut français de Florence et étais consul de France en Toscane. Le *Maggio Musicale Fiorentino* avait retenu avec joie l'idée d'un hommage pour son anniversaire.

Pierre avait immédiatement accepté de diriger l'Ensemble InterContemporain en Italie. Il avait insisté pour interpréter, à côté de ses œuvres, celle de ses amis compositeurs italiens (Berio, Nono...). La création mondiale de *Ali di Cantor* d'Ivan Fedele avait été donnée à cette occasion, en présence du compositeur. Bruno Mantovani, alors également jeune compositeur à la Villa Médicis, à Rome, avait fait le déplacement. La grande salle du *Teatro Comunale* de Florence avait été comble trois soirs de suite. Le public avait réservé à Pierre et Ivan un triomphe.

Je revois encore, entre les répétitions, l'émerveillement de Pierre au Musée des Offices, à *San Marco*, à *Pitti*, au *Carmine*... Il était curieux de tout. Il avait tenu à saluer les jeunes (et moins jeunes) musiciens du Conservatoire Cherubini et de la prestigieuse *Scuola di Musica* de Fiesole. Étudiants et professeurs lui avaient fait fête. Piero Farulli, altiste du *Quartetto Italiano*, et directeur de l'école de musique, était encore de ce monde.

On peut souligner avec cet exemple parmi d'autres, le rayonnement du compositeur et chef d'orchestre dans le monde. En Italie bien sûr où son ami Luciano Berio, avec *Tempo Reale* avait construit - à Florence - également un centre de création musicale, sur le modèle de l'IRCAM, mais bien sûr aussi en Allemagne, en Autriche, au Royaume-Uni, aux États-Unis et dans tous les pays où Boulez était venu composer, diriger ou enseigner. Comme le dit son ami et, entre autres, l'un des interprètes de son œuvre au piano ou à l'orchestre, Daniel Barenboim, “Pierre Boulez est avec nous, non seulement parce que sa musique continue d'être jouée, mais parce qu'il avait un rayonnement unique.” (discours en l'Eglise Saint-Sulpice, le 14 janvier 2016, lors de la cérémonie d'hommage à Pierre Boulez).

“Panacher liberté et contrainte, voilà l'enjeu qui me mobilise” (Pierre Boulez).

Transcription de cette page du web https://www.leducation-musicale.com/index.php/paroles-d-auteur/5685-pierre-boulez-1925-2016

L'homme orchestre en quatre mouvements

Le théoricien

"Agissez ! Ne reproduisez pas !" (Pierre Boulez)

Dès ses premières années de formation au Conservatoire National de Paris (auprès de Messiaen pour l'harmonie, d' Andrée Vaurabourg pour le contrepoint, et de Leibowitz pour l'initiation à la musique sérielle), Pierre Boulez conteste l'enseignement qu'il reçoit : la découverte de la seconde École de Vienne n'est vécue que comme un point de départ et le cours d'analyse d'Olivier Messiaen comme une "plate-forme de lancement des fusées à venir" (Michel Fano).

Boulez montre sa volonté d'innover dans les cours d'été de Darmstadt (1954-1967) où il enseigne l'analyse musicale et la direction d'orchestre à l'occasion du festival, à la *Musik-Akademie* de Bâle (1960-1963) puis à l'Université de Harvard (1963). Il cherche alors à "déclencher l'inquiétude". Dans *Penser la musique aujourd'hui* (1963), Boulez résume ses conceptions de la création ("donner à penser" et non expliquer les résultats).

D'autres textes développent sa pensée théorique, entre autres : *Relevés d'apprenti* en 1966, *Points de repère* en 1981 ou *Regards sur autrui - Points de repère II* en 2005. Durant près de vingt ans (1976-1995), Boulez enseigne au Collège de France (chaire Invention, technique et langage, créée pour lui). L'ouvrage *Leçons de musique - Points de repère III* (2005) rassemble ses leçons. C'est en quelque sorte son traité de composition le plus complet.

Le compositeur

"Héritier le plus rigoureux et le plus créatif de l'école de Vienne et remarquable représentant de ce grand courant formaliste qui a traversé et renouvelé tout l'art du XXe siècle (et pas seulement en musique)" (Michel Foucault, L'imagination du XIXe siècle).

Comme pour Picasso dans l'histoire de la peinture et les "périodes" du maître ("bleue", "rose"...), les historiens de la musique (on attend l'ouvrage de Laurent Bayle, en cours de rédaction, consacré à Pierre Boulez) distingueront des séquences dans l'œuvre de Pierre Boulez. On peut esquisser diverses évolutions et inflexions au cours des six décennies de création : la "table rase", la période "sérielle", la période "électronique" ou "IRCAM", la période "ouverte", la période "organique". Certaines s'enchevêtrent parfois et connaissent des résurgences.

Quelques œuvres emblématiques :

L'écriture et la réécriture de l'œuvre (à la manière d'un Jean-Sébastien Bach ou d'un Gustav Mahler) s'étendent sur soixante ans, de 1946 à 2006. Certaines œuvres sont des "*works in progress*" qui demeurent sur la table de composition durant de nombreuses années et même des décennies : *Le Visage nuptial, Le Soleil des eaux, Le Marteau sans maître, Improvisation III sur Mallarmé, Pli selon pli, Cummings ist der Dichter...*

D'autres œuvres croissent au fil des années : *Répons, Incises, Anthèmes, Dérives...* L'écriture devient organique et s'étire selon le déroulement du temps. L'œuvre reste, en partie ici, "ouverte" et évolue comme un organisme vivant en constante évolution.

Un entretien avec Gilles Macassar résume bien la technique de travail du compositeur :

"*Le champion de l'inachèvement que je suis profite aussi de cette souplesse : explorer le labyrinthe devient si fascinant qu'on n'éprouve plus le besoin d'en sortir... Je procède comme Proust rédigeant* À la Recherche du temps perdu *: jusqu'au dernier moment, je rajoute des paperolles. Sinon, ça reste comme une insatisfaction, bloquée dans un coin de la tête.*" (dans Télérama, 2005, à l'occasion des quatre-ving-ans de Boulez).

On soulignera seulement ici, de façon un peu subjective, quelques œuvres marquantes. Pour plus d'éléments, on pourra se référer à la chronologie plus complète ci-dessous.

La première *Sonate pour piano* date de 1946, la seconde de 1948. Proche de la poésie de René Char, Boulez compose *Le Visage nuptial* (1946-1951-1989) pour soprano, contralto, chœur de femmes et grand orchestre, *Le Soleil des Eaux* (1948-1958-1965) pour soprano, chœur mixte et orchestre, ainsi que *Le Marteau sans maître* (1953-1957) pour contralto et six instruments, d'après des textes du poète. On peut citer Boulez qui déclare au journal *Le Monde* en 1990 (12 juillet) : "*Comment, au-delà de l'égoïste merci, ne garderais-je pas une absolue gratitude à René Char de m'avoir alors révélé ce que je devais être ?*". Il écrit sa troisième *Sonate pour piano* en 1956-57.

Pli selon pli (1957-1962-1984-1989), inspiré par Mallarmé, est composé en 1958 (version définitive dans les années quatre-vingt-dix). *Improvisations III* sur Mallarmé datent des années 1959-1984. Les *Notations I à IV* sont réalisées en 1980 (VII en 1998) pour orchestre. Il écrit *Cummings ist der Dichter* entre 1970 et 1986. Entre 1981 et 1984, il écrit *Répons* pour six solistes, ensemble et ordinateurs (version finale au festival d'Avignon de 1988).

De 1985 date le *Dialogue de l'ombre double* pour clarinette, bande et dispositif de spatialisation. Les *Incises* pour piano sont écrites en 1994-2001. *Sur Incises* pour trois pianos, trois harpes et trois percussions-claviers (1996-1998) est créée au festival d'Edimbourg. *Dérives 2* est créée en 2006 au festival d'Aix-en-Provence.

Le chef d'orchestre

"Il était le seul chef d'orchestre réellement compositeur depuis Mahler ou Strauss qui parvenait à relier ces deux pratiques" (Philippe Manoury, *Libération*, 7 janvier 2016).

"Il faut avoir vis-à-vis de l'œuvre que l'on interprète ou que l'on compose, un respect profond devant l'existence même. Comme si c'était une question de vie ou de mort" (Pierre Boulez).

Pierre Boulez commence une carrière de chef d'orchestre grâce à sa rencontre avec Jean-Louis Barrault. Il est directeur de la musique de scène de la compagnie Renaud-Barrault de 1946 à 1956. C'est à cette occasion qu'il commence à diriger. Ainsi en 1953 il est amené à prendre la direction des "Concerts du Petit Marigny", transformés dès 1954 en "Domaine Musical" qui se spécialise dans la musique de son temps (il donne ainsi les œuvres des jeunes compositeurs d'alors comme Luciano Berio, Luigi Nono ou Jean Barraqué, et les siennes). Boulez en est le directeur jusqu'en 1967.

Il dirige les orchestres les plus prestigieux : Orchestre Philharmonique de New York, Orchestre de Cleveland, Orchestre Symphonique de Chicago, Orchestre Symphonique de la BBC, Orchestre Symphonique de Londres, Orchestre Philharmonique de Vienne, Orchestre Philharmonique de Berlin, Orchestre de Paris. Avec ces formations, il réalise des interprétations et enregistrements de référence d'œuvres de Mahler, Bruckner, Berg, Schoenberg, Webern, Stravinski, Bartók, Janacek,Wagner, Debussy ou Ravel.

Il fait jouer et grave au disque nombre d'œuvres contemporaines : Benjamin, Berio, Birtwistle, Carter, Crumb, Luis De Pablo, Ligeti, Messiaen, Manoury, Donatoni, Maderna, Nono, Pousseur, Stockhausen, Szymanowski, Varèse, Xenakis, Zappa... Il réalise en 1963 la première française de *Wozzeck* de Berg à l'Opéra de Paris, trente-huit après sa création à Berlin. Il dirige la monumentale *Tétralogie* de Wagner dans une mise en scène de Patrice Chéreau (1976). La production sera donnée cinq années de suite. Il est à l'origine de la première mondiale de l'intégralité de l'opéra *Lulu* d'Alban Berg à l'Opéra de Paris (mise en scène de Patrice Chéreau). Il dirige aussi *De la maison des morts* de Janacek au festival d'Aix-en-Provence en 2007 (mise en scène de Chéreau).

Le bâtisseur

"Ce qu'il faut, c'est mettre la subversion à l'intérieur des organismes, y compris musicaux, au lieu de la garder pour soi et d'être fier de garder les mains propres" (Pierre Boulez, *Le Monde*, 1974).

C'est en 1969 qu'à l'initiative de Georges Pompidou, Président de la République, Pierre Boulez est invité à concevoir le futur IRCAM (Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique) qui sera créé en 1974. Ses portes ouvrent en 1977 et Boulez le dirige jusqu'en 1998. En, 1975, sous l'égide du ministre de la culture, Michel Guy, il crée et préside l'Ensemble InterContemporain. Dans les années quatre-vingt, il participe au projet de nouvel Opéra place de la Bastille et de la Cité de la Musique dans le quartier de la Villette.

Enfin la nouvelle Philharmonie de Paris lui doit beaucoup. C'est Pierre Boulez qui depuis des décennies demandait aux pouvoirs publics la réalisation d'une grande salle de concerts symphoniques à Paris, à même de rivaliser avec celle de Berlin, le *Parco della Musica* de Rome, le Palais des Arts de Budapest ou d'autres ensembles de cette envergure internationale, en Europe, outre-Atlantique et ailleurs. Il n'est pas dit que la grande salle de la Philharmonie (actuelle dite "grande salle - Philharmonie 1"), qu'il n'aura pu inaugurer, pour des raisons de santé, et dont il n'aura pas eu le temps de fêter le premier anniversaire, ne porte un jour son nom.

C'est en Allemagne que Daniel Barenboim ouvrira à Berlin en 2017 une grande salle de concert portant le nom de Pierre Boulez.

Pierre Boulez - Pierrot, comme l'appelaient affectueusement et familièrement ceux qui le connaissaient bien -, va manquer au monde musical et artistique en général ainsi qu'au public, mais son œuvre immense, ses interprétations magistrales heureusement gravées pour toujours, mais aussi ses "ateliers", ses conférences, ses cours, ses nombreux écrits, son enseignement en somme resteront à jamais vivants pour les générations futures.

En guise de conclusion, pour le futur, citons encore Pierre Boulez : "La politique doit servir l'art, et non l'inverse".

Chronologie sommaire et principales œuvres (les dates peuvent varier selon les chronologies, selon que l'on évoque l'écriture de l'œuvre - échelonnée du reste sur plusieurs années voire des décennies - sa création, sa re-création ou bien sa publication) :

1925 : 26 mars : naissance à Montbrison en Haute-Loire

1942 : entrée au Conservatoire National de Musique de Paris

1945 : *12 Notations pour piano, Trois psalmodies pour piano, Variations* pour piano (main gauche)

Quatuor pour quatre ondes Martenot

1946 : directeur musicale de la compagnie Renaud-Barrault - *Première Sonate pour piano, Sonatine pour flûte et piano, Le visage nuptial*

1947 : *Symphonie concertante* (perdue)

1948 : *Deuxième Sonate pour piano, Sonate pour deux pianos*

1949 : *Livre pour quatuor à cordes* (révisé en 2011-2012)

1950 : *Le Soleil des eaux*

1951 : *Structures 1* pour deux pianos, premier livre, *Polyphonies* pour orchestre, *Deux études*, pour bande magnétique, *Oubli signal lapidé* pour douze voix

1954 : le “Domaine Musical” - *Le Marteau sans Maître*

1955 : *La Symphonie mécanique*, musique pour le film de Jean Mitry, pour bande magnétique, *L'Orestie*, musique de scène pour la trilogie d'Eschyle, pour voix et ensemble instrumental

1956-1957 : *Troisième sonate pour piano, Pli selon pli, Figures-Doubles-Prismes* pour orchestre, *Structures 2*, pour deux pianos, deuxième livre

1957 : *Don*, pour soprano et orchestre, *Improvisation II sur Mallarmé*, “Une dentelle s'abolit”, pour soprano et neuf instruments, *Le Crépuscule de Yang Koueï-Fei*, musique pour la pièce radiophonique de Louise Fauré, Strophes pour flûte

1958 : Installation en Allemagne, *Poésie pour pouvoir*, d'après Henri Michaux, pour récitant, orchestre (en trois groupes) et bande magnétique, *Improvisation I sur Mallarmé*, "Le vierge, le vivace et le bel aujourd'hui", pour soprano et orchestre

1959 : *Improvisation III sur Mallarmé*, "A la nue accablante tu", pour soprano et orchestre

1959-1960 : *Tombeau*, pour soprano et orchestre

1962 : publication de *Pli selon pli*, portrait de Mallarmé pour soprano et orchestre

1963 : écrit *Penser la musique aujourd'hui* (écrits théoriques)

1964 : *Éclat* pour orchestre

1965 : *Éclat / Multiples*

1966 : texte de Pierre Boulez dans *Le Nouvel Observateur*, et rupture avec la politique du ministre de la culture de De Gaulle : "Pourquoi je dis non à Malraux." Boulez y exprime son point de vue concernant la réorganisation de la vie musicale française proposée par Malraux. Boulez dénonce la nomination du compositeur Marcel Landowski à la direction de la musique au ministère des affaires culturelles et la volonté de séparer la musique de l'action culturelle générale. Selon lui, l'organisation de la vie musicale ne peut s'épanouir dans ses cloisonnements d'alors et sans un renouvellement complet de son administration

1967 : chef permanent de l'Orchestre de Cleveland

1968 : *Domaines*, pour clarinette solo et six groupes instrumentaux,... *Explosante/-Fixe...*, œuvre "ouverte" à la mémoire d'Igor Stravinski, pour ensemble et électronique en direct (version 1972 éditée en 1974), *Livre pour cordes*

1969 : *Pour le Dr. Calmus*, pour ensemble, *Über das, über ein verschwindelaren*

1970 : *Cummings ist des Dichter*, pour chœur et orchestre, sur des textes de E. E. Cummings

1971 : Pierre Boulez devient chef permanent de l'Orchestre de la BBC, du London *London Symphony Orchestra* de Londres et de l'Orchestre Philharmonique de New York

1972 : création de l'IRCAM - Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique

1974 : *Rituel in memoriam Bruno Maderna* pour orchestre en huit groupes

1975 : création de l'EIC - Ensemble InterContemporain

1976 : *Messagesquisse* pour violoncelle et six violoncelles, dédié à Paul Sacher

1976-1995 : professeur au Collège de France

1976-1979 : dirige le *Ring* de Richard Wagner à Bayreuth (mise en scène de Patrice Chéreau).

"Le *Ring du centenaire*, qui a été dirigé par P. Boulez et mis en scène par P. Chéreau, vient d'achever sa cinquième et dernière année d'existence. Une heure et demie d'applaudissements après que le Walhalla, une fois encore, se soit écroulé dans les flammes, et cent-un rappels. Oubliés, les huées de la première année, le départ de plusieurs musiciens, les mauvaises humeurs de l'orchestre et de certains chanteurs ; oubliés, aussi, le comité d'action pour la sauvegarde de l'œuvre de Wagner, les tracts distribués et les lettres anonymes qui réclamaient la mise à mort du chef d'orchestre et du metteur en scène." (Michel Foucault, *L'imagination du XIXe siècle*).

1977 : ouverture de l'IRCAM au Centre Pompidou à Paris

1979 : dirige la première mondiale de *Lulu* de Berg à l'Opéra de Paris

1980 : *Notations pour orchestre (I à IV ; VII* en 1998)

1981 : *Répons* pour six solistes et orchestre et dispositif électronique (version finale au festival d'Avignon de 1988)

1984 : *Dérive* pour 6 instruments, *Notations V-XII* pour orchestre

1985 : *Dialogue de l'ombre double* pour clarinette et dispositif électronique, *Mémoriale* pour ensemble

1987 : *Initiale*, pour septuor de cuivres

1988-2002 : *Dérive 2* pour onze instruments

1990 : *Dérive 2*, deuxième version pour onze instruments

1991 : *Anthèmes* pour violon seul

1994-2001 : *Incises* pour piano

1996-1998 : *Sur Incises* pour trois pianos, trois harpes et trois percussions-claviers

1997-2008 : *Anthèmes 2* pour violon et dispositif électronique

2003 : Pierre Boulez est compositeur en résidence au Festival de Lucerne

2004 : dirige *Parsifal* à Bayreuth dans la mise en scène de Christoph Schlingensief

2005 : *Une page d'éphéméride* pour piano

2006 : création de *Dérives 2* au festival d'Aix-en-Provence

2011 : Dernier concert à Paris, à la tête de l'Orchestre de Paris

2015 : le 14 janvier : ouverture de la Philharmonie de Paris dans le Parc de Villette, près de la Porte de Pantin ; de mars à juin, monumentale exposition d'hommage à Pierre Boulez pour ses 90 ans (Philharmonie de Paris) ; en juin : les 33 œuvres complètes de Pierre Boulez se retrouvent dans un coffret édité par *Deutsche Grammophon*, cette intégrale discographique est présentée par Boulez.

2016 : le 5 janvier : mort de Pierre Boulez, à 90 ans, à Baden-Baden. Le 14 janvier : premier anniversaire de la Philharmonie de Paris ; le même jour : cérémonie d'hommage à Pierre Boulez en l'église Saint-Sulpice à Paris (discours de Daniel Barenboim, de Renzo Piano et de Laurent Bayle).

Deux propos de Pierre Boulez

Boulez visionnaire : la Cité de la Musique et la future la Philharmonie de Paris

"*Étendre l'activité de la Cité de la Musique à une grande salle correspond à une nécessité urgente. Elle exigera un orchestre en résidence : l'Orchestre de Paris est exactement à même de remplir ce rôle. Il conviendra d'inventer une sorte de couloir de communication qui représenterait pour le présent, avec des techniques performantes, ce qu'est le musée pour le patrimoine. Une médiathèque-banque de données serait la contrepartie idéale de ce musée dans le couple statique-dynamique. S'ajoutant à cet ensemble, la Grande Halle serait un lieu d'accueil sur le modèle si populaire des "Proms" à Londres. Au mois d'août, Paris n'a rien à offrir, pas plus aux visiteurs qu'aux Parisiens. Le succès du festival Paris Quartier d'Été prouve que le public est* *potentiellement là. Ne serait-il pas envisageable en outre, d'établir une relation permanente entre le Musée de la musique et le Musée des sciences ? Ce dernier prendrait en charge tout ce qui concerne les rapports entre le son et la musique...*" (*Le Monde*, 25 mars 1999).

Sur la relation poème/musique à travers la rencontre avec l'œuvre de René Char : la trilogie *Le Visage nuptial, Le Soleil des eaux, Le Marteau sans maître*

"*Pourquoi le musicien cherche-t-il cette ressource extérieure, pourquoi choisit-il ce qui est infiniment plus qu'un tremplin pour son imagination, ce qui va devenir sa propre substance ? Pourquoi ce poème, ce poète ? La réponse simple autant qu'énigmatique pourrait se résumer en la parole évangélique : "Tu ne me chercherais pas si tu ne m'avais déjà trouvé...". Par trois fois, l'œuvre de René Char m'a lancé une objurgation ; par trois fois j'ai répondu à cette incitation comminatoire, de trois façons bien différentes, car le poème instinctivement choisi correspondait à la nécessité et au moment de la rencontre. Le Visage nuptial explicite la narration du poème, se modèle entièrement sur la forme, s'articule littéralement selon lui. La musique s'invente en parallèle au texte, le suit dans ses méandres, de la rencontre au renoncement. Le Soleil des eaux est bien davantage un texte de liaison qui va rassembler des idées musicales déjà constituées, mais éparses, et leur donner l'indispensable cohésion. Le Marteau sans maître s'attache à une relation plus complexe où la présence du poème n'est pas le seul facteur d'alliance. Il irrigue toute l'invention musicale, même lorsqu'il a cessé d'être là.*" (*Le Monde*, 12 juillet 1990).

Une interview de Jean-Pierre Serre
Mon premier demi-siècle au Collège de France

Jean-Pierre Serre a été Professeur au Collège de France, titulaire de la chaire d'*Algèbre et géométrie* de 1956 à 1994.

Vous avez enseigné au Collège de France de 1956 à 1994, dans la chaire d'*Algèbre et Géométrie*. Quel souvenir en gardez-vous ?

J'ai occupé cette chaire pendant 38 ans. C'est une longue période, mais il y a des précédents : si l'on en croit l'Annuaire du Collège de France, au XIX$^{\text{e}}$ siècle, la chaire de physique n'a été occupée que par deux professeurs : l'un est resté 60 ans, l'autre 40. Il est vrai qu'il n'y avait pas de retraite à cette époque et que les professeurs avaient des suppléants (auxquels ils versaient une partie de leur salaire).

Quant à mon enseignement, voici ce que j'en disais dans une interview de 1986[1] : "Enseigner au Collège est un privilège merveilleux et redoutable. Merveilleux à cause de la liberté dans le choix des sujets et du haut niveau de l'auditoire : chercheurs au CNRS, visiteurs étrangers, collègues de Paris et d'Orsay - beaucoup sont des habitués qui viennent régulièrement depuis cinq, dix ou même vingt ans. Redoutable aussi : il faut chaque année un sujet de cours nouveau, soit sur ses propres recherches (ce que je préfère), soit sur celles des autres ; comme un cours annuel dure environ vingt heures, cela fait beaucoup !"

Comment s'est passée votre leçon inaugurale ?

À mon arrivée au Collège, j'étais un jeune homme de trente ans. La leçon inaugurale m'apparaissait presque comme un oral d'examen, devant professeurs, famille, collègues mathématiciens, journalistes, etc. J'ai essayé de la préparer. Au bout d'un mois, j'avais réussi à en écrire une demi-page.

Interview par Marc Kirsch, Maître de conférences, dans La lettre du Collège de France n°18, p. 43
https://www.college-de-france.fr/media/lettre-du-college-de-france/UPL7660698939177588616$_{C}DF_{L}18_{I}nterieur.pdf$

1. M. Schmidt, Hommes de Science, 218-227, Hermann, Paris, 1990.

Arrive le jour de la leçon, un moment assez solennel. J'ai commencé par lire la demi-page en question, puis j'ai improvisé. Je ne sais plus très bien ce que j'ai dit (je me souviens seulement avoir parlé de l'Algèbre, et du rôle ancillaire qu'elle joue en Géométrie et en Théorie des Nombres). D'après le compte-rendu paru dans le journal *Combat*, j'ai passé mon temps à essuyer machinalement la table qui me séparait du public ; je ne me suis senti à l'aise que lorsque j'ai pris en main un bâton de craie et que j'ai commencé à écrire sur le tableau noir, ce vieil ami des mathématiciens.

Quelques mois plus tard, le secrétariat m'a fait remarquer que toutes les leçons inaugurales étaient rédigées et que la mienne ne l'était pas. Comme elle avait été improvisée, j'ai proposé de la recommencer dans le même style, en me remettant mentalement dans la même situation. Un beau soir, on m'a ouvert un bureau du Collège et l'on m'a prêté un magnétophone. Je me suis efforcé de recréer l'atmosphère initiale, et j'ai refait une leçon sans doute à peu près semblable à l'originale. Le lendemain, j'ai apporté le magnétophone au secrétariat ; on m'a dit que l'enregistrement était inaudible. J'ai estimé que j'avais fait tout mon possible et je m'en suis tenu là. Ma leçon inaugurale est restée la seule qui n'ait jamais été rédigée.

En règle générale, je n'écris pas mes exposés ; je ne consulte pas mes notes (et, souvent, je n'en ai pas). J'aime réfléchir devant mes auditeurs. J'ai le sentiment, lorsque j'explique des mathématiques, de parler à un ami. Devant un ami, on n'a pas envie de lire un texte. Si l'on a oublié une formule, on en donne la structure ; cela suffit. Pendant l'exposé j'ai en tête une quantité de choses qui me permettraient de parler bien plus longtemps que prévu. Je choisis suivant l'auditoire, et l'inspiration du moment.

Seule exception : le séminaire Bourbaki, où l'on doit fournir un texte suffisamment à l'avance pour qu'il puisse être distribué en séance. C'est d'ailleurs le seul séminaire qui applique une telle règle, très contraignante pour les conférenciers.

Quelle est la place de Bourbaki dans les mathématiques françaises d'aujourd'hui ?

C'est le séminaire qui est le plus intéressant. Il se réunit trois fois par an, en mars, mai et novembre. Il joue un rôle à la fois social (occasion de rencontres) et mathématique (exposé de résultats récents - souvent sous une forme plus claire que celle des auteurs) ; il couvre toutes les branches des mathématiques.

Les livres (*Topologie, Algèbre, Groupes de Lie,...*) sont encore lus, non seulement en France, mais aussi à l'étranger. Certains de ces livres sont devenus des classiques : je pense en particulier à celui sur les systèmes de racines. J'ai vu récemment (dans le *Citations Index* de l'AMS [2]) que Bourbaki venait au 6e rang (par nombre de citations) parmi les mathématiciens français (de plus, au niveau mondial, les numéros 1 et 3 sont des Français, et s'appellent tous deux Lions : un bon point pour le Collège). J'ai gardé un très bon souvenir de ma collaboration à Bourbaki, entre 1949 et 1973. Elle m'a appris beaucoup de choses, à la fois sur le fond (en me forçant à rédiger des choses que je ne connaissais pas) et sur la forme (comment écrire de façon à être compris). Elle m'a appris aussi à ne pas trop me fier aux "spécialistes".

La méthode de travail de Bourbaki est bien connue : distribution des rédactions aux différents membres et critique des textes par lecture à haute voix (ligne à ligne : c'est lent mais efficace). Les réunions (les "congrès") avaient lieu 3 fois par an. Les discussions étaient très vives, parfois même passionnées. En fin de congrès, on distribuait les rédactions à de nouveaux rédacteurs. Et l'on recommençait. Le même chapitre était souvent rédigé quatre ou cinq fois. La lenteur du processus explique que Bourbaki n'ait publié finalement qu'assez peu d'ouvrages en quarante années d'existence, depuis les années 1930-1935 jusqu'à la fin des années 1970, où la production a décliné.

En ce qui concerne les livres eux-mêmes, on peut dire qu'ils ont rempli leur mission. Les gens ont souvent cru que ces livres traitaient des sujets que Bourbaki trouvait intéressants. La réalité est différente : ses livres traitent de ce qui est utile pour faire des choses intéressantes. Prenez l'exemple de la théorie des nombres. Les publications de Bourbaki en parlent très peu. Pourtant, ses membres l'appréciaient beaucoup, mais ils jugeaient que cela ne faisait pas partie des *Éléments* : il fallait d'abord avoir compris beaucoup d'algèbre, de géométrie et d'analyse.

2. AMS : American Mathematical Society.

Par ailleurs, on a souvent imputé à Bourbaki tout ce que l'on n'aimait pas en mathématiques. On lui a reproché notamment les excès des "maths modernes" dans les programmes scolaires. Il est vrai que certains responsables de ces programmes se sont réclamés de Bourbaki. Mais Bourbaki n'y était pour rien : ses écrits étaient destinés aux mathématiciens, pas aux étudiants, encore moins aux adolescents. Notez que Bourbaki a évité de se prononcer sur ce sujet. Sa doctrine était simple : on fait ce que l'on choisit de faire, on le fait du mieux que l'on peut, mais on n'explique pas pourquoi on le fait. J'aime beaucoup ce point de vue qui privilégie le travail par rapport au discours - tant pis s'il prête parfois à des malentendus.

Comment analysez-vous l'évolution de votre discipline depuis l'époque de vos débuts ? Est-ce que l'on fait des mathématiques aujourd'hui comme on les faisait il y a cinquante ans ?

Bien sûr, on fait des mathématiques aujourd'hui comme il y a cinquante ans ! Évidemment, on comprend davantage de choses ; l'arsenal de nos méthodes a augmenté. Il y a un progrès continu (ou parfois un progrès par à-coups : certaines branches restent stagnantes pendant une décade ou deux, puis brusquement se réveillent quand quelqu'un introduit une idée nouvelle).

Si l'on voulait dater les mathématiques "modernes" (un terme bien dangereux), il faudrait sans doute remonter aux environs de 1800 avec Gauss.

Et en remontant plus loin, si vous rencontriez Euclide, qu'auriez-vous à vous dire ?

Euclide me semble être plutôt quelqu'un qui a mis en ordre les mathématiques de son époque. Il a joué un rôle analogue à celui de Bourbaki il y a cinquante ans. Ce n'est pas par hasard que Bourbaki a choisi d'intituler ses ouvrages *Éléments de mathématique* : c'est par référence aux *Eléments* d'Euclide. (Notez aussi que "Mathématique" est écrit au singulier. Bourbaki nous enseigne qu'il n'y a pas plusieurs mathématiques distinctes, mais une seule mathématique. Et il nous l'enseigne à sa façon habituelle : pas par de grands discours, mais par l'omission d'une lettre à la fin d'un mot).

Pour en revenir à Euclide, je ne pense pas qu'il ait produit des contributions réellement originales. Archimède serait un interlocuteur plus indiqué.

C'est lui le grand mathématicien de l'Antiquité. Il a fait des choses extraordinaires, aussi bien en mathématique qu'en physique.

En philosophie des sciences, il y a un courant très fort en faveur d'une pensée de la rupture. N'y a-t-il pas de ruptures en mathématiques ? On a décrit par exemple l'émergence de la probabilité comme une manière nouvelle de se représenter le monde. Quelle est sa signification en mathématiques ?

Les philosophes aiment bien parler de “rupture”. Je suppose que cela ajoute un peu de piment à leurs discours. Je ne vois rien de tel en mathématique : ni catastrophe, ni révolution. Des progrès, oui, je l'ai déjà dit ; ce n'est pas la même chose. Nous travaillons tantôt à de vieilles questions, tantôt à des questions nouvelles. Il n'y a pas de frontière entre les deux. Il y a une grande continuité entre les mathématiques d'il y a deux siècles et celles de maintenant. Le temps des mathématiciens est la “longue durée” de feu mon collègue Braudel.

Quant aux probabilités, elles sont utiles pour leurs applications à la fois mathématiques et pratiques ; d'un point de vue purement mathématique, elles constituent une branche de la théorie de la mesure. Peut-on vraiment parler à leur sujet de “manière nouvelle de se représenter le monde” ? Sûrement pas en mathématique.

Est-ce que les ordinateurs changent quelque chose à la façon de faire des mathématiques ?

On avait coutume de dire que les recherches en mathématiques étaient peu coûteuses : des crayons et du papier, et voilà nos besoins satisfaits. Aujourd'hui, il faut ajouter les ordinateurs. Cela reste peu onéreux, dans la mesure où les mathématiciens ont rarement besoin de ressources de calcul très importantes. À la différence, par exemple, de la physique des particules, dont les besoins en calcul sont à la mesure des très grands équipements nécessaires au recueil des données, les mathématiciens ne mobilisent pas de grands centres de calcul.

En pratique, l'informatique change les conditions matérielles du travail des mathématiciens : on passe beaucoup de temps devant son ordinateur.

Il a différents usages. Tout d'abord, le nombre des mathématiciens a considérablement augmenté. À mes débuts, il y a 55 ou 60 ans, le nombre des mathématiciens productifs était de quelques milliers (dans le monde entier), l'équivalent de la population d'un village. À l'heure actuelle, ce nombre est d'au moins 100 000 : une ville. Cet accroissement a des conséquences pour la manière de se contacter et de s'informer. L'ordinateur et Internet accélèrent les échanges. C'est d'autant plus précieux que les mathématiciens ne sont pas ralentis, comme d'autres, par le travail expérimental : nous pouvons communiquer et travailler très rapidement. Je prends un exemple. Un mathématicien a trouvé une démonstration mais il lui manque un lemme de nature technique. Au moyen d'un moteur de recherche - comme Google - il repère des collègues qui ont travaillé sur la question et leur envoie un e-mail. De cette manière, il a toutes les chances de trouver en quelques jours ou même en quelques heures la personne qui a effectivement démontré le lemme dont il a besoin. (Bien entendu, ceci ne concerne que des problèmes auxiliaires : des points de détail pour lesquels on désire renvoyer à des références existantes plutôt que de refaire soi-même les démonstrations. Sur des questions vraiment difficiles, mon mathématicien aurait peu de chances de trouver quelqu'un qui puisse lui venir en aide).

L'ordinateur et Internet sont donc des outils d'accélération de notre travail. Ils permettent aussi de rendre les manuscrits accessibles dans le monde entier, sans attendre leur parution dans un journal. C'est très pratique. Notez que cette accélération a aussi des inconvénients. Le courrier électronique produit des correspondances informelles que l'on conserve moins volontiers que le papier. On jette rarement des lettres alors que l'on efface ou l'on perd facilement les emails (quand on change d'ordinateur, par exemple). On a publié récemment (en version bilingue : français sur une page, et anglais sur la page d'en face) ma correspondance avec A. Grothendieck entre 1955 et 1987 ; cela n'aurait pas été possible si elle avait été électronique.

Par ailleurs, certaines démonstrations font appel à l'ordinateur pour vérifier une série de cas qu'il serait impraticable de traiter à la main. Deux cas classiques : le problème des 4 couleurs (coloriage des cartes avec seulement quatre couleurs) et le problème de Kepler (empilement des sphères dans l'espace à 3 dimensions). Cela conduit à des démonstrations qui ne sont pas réellement vérifiables ; autrement dit, ce ne sont pas de vraies “démonstrations” mais seulement des faits expérimentaux, très vraisemblables, mais que personne ne peut garantir.

Vous avez évoqué l'augmentation du nombre des mathématiciens. Quelle est aujourd'hui la situation ? Où vont les mathématiques ?

L'augmentation du nombre des mathématiciens est un fait important. On pouvait craindre que cela se fasse au détriment de la qualité. En fait, il n'y a rien eu de tel. Il y a beaucoup de très bons mathématiciens (en particulier parmi les jeunes français - un très bon augure).

Ce que je peux dire, concernant l'avenir, c'est qu'en dépit de ce grand nombre de mathématiciens, nous ne sommes pas à court de matière. Nous ne manquons pas de problèmes, alors qu'il y a un peu plus de deux siècles, à la fin du XVIII^{e}, Lagrange était pessimiste : il pensait que "la mine était tarie", qu'il n'y avait plus grand-chose à trouver. Lagrange a écrit cela juste avant que Gauss ne relance les mathématiques de manière extraordinaire, à lui tout seul. Aujourd'hui, il y a beaucoup de terrains à prospecter pour les jeunes mathématiciens (et aussi pour les moins jeunes, j'espère).

Selon un lieu commun de la philosophie des sciences, les grandes découvertes mathématiques sont le fait de mathématiciens jeunes. Est-ce votre avis ?

Je ne crois pas que le terme de "grande découverte" s'applique à moi. J'ai surtout fait des choses "utiles" (pour les autres mathématiciens). En tout cas, lorsque j'ai eu le prix Abel en 2003, la plupart des travaux qui ont été cités par le jury avaient été faits avant que je n'aie 30 ans. Mais si je m'étais arrêté à ce moment-là, on ne m'aurait sans doute pas donné ce prix : j'ai fait aussi d'autres choses par la suite (ne serait-ce que des "conjectures" sur lesquelles beaucoup de gens ont travaillé et travaillent encore).

Dans ma génération, plusieurs de mes collègues ont continué au-delà de 80 ans, par exemple mes vieux amis Armand Borel et Raoul Bott, morts tous deux récemment à 82 ans. Il n'y a pas de raison de s'arrêter, tant que la santé le permet. Encore faut-il que le sujet s'y prête. Quand on a des sujets très larges, il y a toujours quelque chose à faire, mais si l'on est trop spécialisé on peut se retrouver bloqué pendant de longues périodes, soit parce que l'on a démontré tout ce qu'il y avait à démontrer, soit au contraire parce que les problèmes sont trop difficiles. C'est très frustrant.

Les découvertes mathématiques donnent de grandes joies. Poincaré, Hadamard, Littlewood [3] l'ont très bien expliqué. En ce qui me concerne, je garde surtout le souvenir d'une idée qui a contribué à débloquer la théorie de l'homotopie. Cela s'est passé une nuit de retour de vacances, en 1950, dans une couchette de train. Je cherchais un espace fibré ayant telles et telles propriétés. La réponse est venue : l'espace des lacets ! Je n'ai pas pu m'empêcher de réveiller ma femme qui dormait dans la couchette du dessous pour lui dire : ça y est ! Ma thèse est sortie de là, et bien d'autres choses encore. Bien sûr, ces découvertes soudaines sont rares : cela m'est arrivé peut-être deux fois en soixante ans. Mais ce sont des moments lumineux, vraiment exceptionnels.

Le Collège de France est-il un endroit où l'on échange avec d'autres disciplines ?

Non, pas pour moi. Même entre les mathématiciens du Collège, il n'y a pas de travail collectif. Il faut préciser que nous travaillons dans des branches souvent très séparées. Ce n'est pas un mal : le Collège n'est pas censé être un club. Un certain nombre de lieux communs modernes comme *le travail collectif, l'interdisciplinarité et le travail en équipe* - ne s'appliquent pas à nous.

Qu'avez-vous pensé du dialogue entre un spécialiste de neurosciences, Jean-Pierre Changeux, et le mathématicien Alain Connes, qui est restitué dans le livre *Matière à pensée* ?

Ce livre est un bel exemple de dialogue de sourds. Changeux ne comprend pas ce que dit Connes, et inversement. C'est assez étonnant. Personnellement, je suis du côté de Connes. Les vérités mathématiques sont indépendantes de nous [4]. Notre seul choix porte sur la façon de les exprimer. Si on le désire, on

3. J.E. Littlewood, A Mathematician's Miscellany, Methuen and Co, 1953. Ce livre explique bien la part inconsciente du travail créatif.

4. Il y a quelques années, mon ami R. Bott et moi-même allions recevoir un prix israélien (le prix Wolf) remis dans la Knesseth, à Jérusalem. Bott devait dire quelques mots sur les mathématiques. Il m'a demandé : "Que dire ?". Je lui ai dit "C'est bien simple ; tu n'as qu'à expliquer ceci : les autres sciences cherchent à trouver les lois que Dieu a choisies ; les mathématiques cherchent à trouver les lois auxquelles Dieu a dû obéir.". C'est ce qu'il a

peut le faire sans introduire aucune terminologie. Considérons par exemple une troupe de soldats. Leur général aime les arranger de deux façons, soit en rectangle, soit en 2 carrés. C'est au sergent de les placer. Il s'aperçoit qu'il n'a qu'à les mettre en rang par 4 : s'il en reste 1 qu'il n'a pas pu placer, ou bien il arrivera à les mettre tous en rectangle, ou bien il arrivera à les répartir en deux carrés.

[Traduction technique : le nombre n des soldats est de la forme $4k + 1$. Si n n'est pas premier, on peut arranger les soldats en rectangle. Si n est premier, un théorème dû à Fermat dit que n est somme de deux carrés.]

Quelle est la place des mathématiques par rapport aux autres sciences ? Y a-t-il une demande nouvelle de mathématiques, venant de ces sciences ?

Sans doute, mais il faut séparer les choses. Il y a d'une part la physique théorique, qui est tellement théorique qu'elle est à cheval entre mathématique et physique, les physiciens considérant que ce sont des mathématiques, tandis que les mathématiciens sont d'un avis contraire. Elle est symbolisée par la théorie des cordes. Son aspect le plus positif est de fournir aux mathématiciens un grand nombre d'énoncés, qu'il leur faut démontrer (ou éventuellement démolir).

Par ailleurs, notamment en biologie, il y a tout ce qui relève de systèmes comportant un grand nombre d'éléments qu'il faut traiter collectivement. Il existe des branches des mathématiques qui s'occupent de ces questions. Cela répond à une demande. Il y a aussi des demandes qui concernent la logique : c'est le cas de l'informatique, pour la fabrication des ordinateurs. Il faut mentionner aussi la cryptographie, qui est une source de problèmes intéressants relatifs à la théorie des nombres.

En ce qui concerne la place des mathématiques par rapport aux autres sciences, on peut voir les mathématiques comme un grand entrepôt empli de rayonnages. Les mathématiciens déposent sur les rayons des choses dont ils garantissent qu'elles sont vraies ; ils en donnent aussi le mode d'emploi et la manière de les reconstituer. Les autres sciences viennent se servir en fonction

dit. La Knesseth a apprécié.

de leurs besoins. Le mathématicien ne s'occupe pas de ce qu'on fait de ses produits. Cette métaphore est un peu triviale, mais elle reflète assez bien la situation. (Bien entendu, on ne choisit pas de faire des mathématiques pour mettre des choses sur les rayons : on fait des mathématiques pour le plaisir d'en faire).

Voici un exemple personnel. Ma femme, Josiane, était spécialiste de chimie quantique. Elle avait besoin d'utiliser les représentations linéaires de certains groupes de symétries. Les ouvrages disponibles n'étaient pas satisfaisants : ils étaient corrects, mais employaient des notations très lourdes. J'ai rédigé pour elle un exposé adapté à ses besoins, et je l'ai ensuite publié dans un livre intitulé *Représentations Linéaires des Groupes Finis*. J'ai fait mon travail de mathématicien (et de mari) : mis des choses sur les rayons.

Le vrai en mathématiques a-t-il le même sens qu'ailleurs ?

Non. C'est un vrai absolu. C'est sans doute ce qui fait l'impopularité des mathématiques dans le public. L'homme de la rue veut bien tolérer l'absolu quand il s'agit de religion, mais pas quand il s'agit de mathématique. Conclusion : croire est plus facile que démontrer.

An interview with Jean-Pierre Serre
My first half-century at Collège de France

Jean-Pierre Serre was Professor at Collège de France, holder of the Chair of *Algebra and Geometry* from 1956 to 1994.

You taught at Collège de France from 1956 to 1994, in the Chair of *Algebra and Geometry*. What memory do you keep of it ?

I held this chair for 38 years. It's a long time, but there are precedents : if we believe the Collège de France Directory, in the 19$^{\text{th}}$ century, the chair of physics was occupied only by two professors : one stayed 60 years, the other 40. It is true that there was no retirement at this period and that the professors had substitutes (to whom they paid part of their salary).

As for my teaching, here is what I said in an interview from 1986 [1] : "Teaching at Collège de France is a wonderful and formidable privilege. Wonderful because of the freedom in the choice of subjects and the high level of the audience : CNRS researchers, foreign visitors, colleagues from Paris and Orsay - many are regulars who have been coming regularly since five, ten or even twenty years. Fearsome too : you need every year a new course subject, either on your own research (which I prefer), or on those of others ; as an annual course lasts about twenty hours, that makes a lot !"

How was your inaugural lesson ?

When I arrived at Collège de France, I was a young man of thirty. Inaugural lesson appeared almost to me as an oral exam, in front of professors, family, fellow mathematicians, journalists, etc. I tried to prepare it. After a month, I had managed to write half a page.

The day of the lesson arrives, a fairly solemn moment. I began by reading the half page in question, then I improvised. I don't know very well anymore

Interview by Marc Kirsch, Lecturer, from Collège de France Letter n°18, p. 43 https://www.college-de-france.fr/media/lettre-du-college-de-france/UPL7660698939177588616$_C DF_L 18_I$*nterieur.pdf*

1. M. Schmidt, Men of Science, 218-227, Hermann, Paris, 1990.

what I said (I only remember talking about Algebra, and the ancillary role which it plays in Geometry and in Number Theory). According to the report published in the *Combat* newspaper, I spent my time wiping mechanically the table that separated me from the public ; I did not feel comfortable when I took a stick of chalk and started writing on the blackboard, that old friend of mathematicians.

A few months later, the secretariat pointed out to me that all inaugural lessons were written and mine was not. As it had been improvised, I proposed to start it again in the same style, by mentally putting me in the same situation. One evening, they gave me opened a college office and I was loaned a tape recorder. I tried to recreate the original atmosphere, and I probably did a lesson again somewhat similar to the original. The next day, I brought the tape recorder at the Secretariat ; I was told that the recording was inaudible. I estimated that I did everything I could and I stayed there. My inaugural lesson remained the only one that was never written.

Generally, I don't write my presentations ; I don't consult my notes (and often I don't have one). I like to think in front of my listeners. I have the feeling when I explain math, of talking to a friend. In front of a friend, we don't want to read a text. If we forgot a formula, we give structure ; it's enough. During the presentation I have in mind a quantity of things that would allow me to speak much longer than expected. I choose according to the audience, and the inspiration of the moment.

The only exception : the Bourbaki seminar, where a sufficient text must be provided in advance so that it can be distributed during the meeting. It is also the only seminar which applies such a rule, which is very restrictive for speakers.

What is Bourbaki's place in French mathematics of today ?

The seminar is the most interesting. It meets three times a year, in March, May and November. It plays both a social role (opportunity to meetings) and mathematics (presentation of recent results - often under a clearer form than that of the authors) ; it covers all branches of mathematics.

The books (*Topology, Algebra, Lie Groups,...*) are still read, not only in

France, but also abroad. Some of these books became classics : I'm thinking in particular of the one on root systems. I recently saw (in the AMS *Citations Index*[2]) that Bourbaki came to 6$^{\text{th}}$ place (with citations) among French mathematicians (from plus, globally, numbers 1 and 3 are French, and are called both Lions : a good point for Collège de France). I kept a very good memory from my collaboration in Bourbaki, between 1949 and 1973. It taught me many things, both in substance (by forcing me to write things that I did not know) and on the form (how to write so as to be understood). It also taught me not to trust the "specialists" too much.

Bourbaki's working method is well known : distribution of texts to different members and criticism of them by reading aloud (line to line : it is slow but effective). Meetings ("congresses") take place 3 times a year. The discussions were very lively, sometimes even passionate. At the end of the congress, the papers were distributed to new writers. And we started again. The same chapter was often written four or five times. The slowness of the process explains why Bourbaki did not finally publish that very few works in forty years of existence, since the years 1930-1935 until the late 1970s, when production declined.

Regarding the books themselves, we can say that they have filled their mission. People often believed that these books dealt with subjects that Bourbaki found interesting. The reality is different : his books deal which what is useful for doing interesting things. Take the example of number theory. Bourbaki's publications speak very little about it. However, its members appreciated it very much, but they considered that it was not part of the *Elements* : you first had to understand a lot of algebra, geometry and analysis.

In addition, we often blamed on Bourbaki about everything we did not like in mathematics. He was criticized in particular for the excesses of "modern maths" in school curricula. It is true that some officials of these programs claimed to be from Bourbaki. But Bourbaki was not there for nothing : his writings were intended for mathematicians, not students, let alone adolescents. Note that Bourbaki has avoided pronouncing himself on this topic. His doctrine was simple : we do what we choose to do, we do it as best we

2. AMS : American Mathematical Society.

can, but we don't explain why we made it. I really like this point of view which favors work over speech - never mind if it sometimes leads to misunderstandings.

How do you analyze the evolution of your discipline since that from your beginnings ? Do we do math today as we did fifty years ago ?

Of course, we do math today like there are fifty years ! Obviously, we understand more things ; the arsenal of our methods has increased. There is continuous progress (or sometimes progress by jolts : some branches remain stagnant for a decade or two, then suddenly wake up when someone introduces a new idea).

If we wanted to date "modern" mathematics (a dangerous term), it would probably go back to around 1800 with Gauss.

And going back further, if you met Euclid, what would you say to yourself ?

Euclid seems to me to be rather someone who put the math of his time in order. He played a role analogous to that of Bourbaki fifty years ago. It is not a coincidence that Bourbaki chose to title his works *Elements of mathematics* : it is by reference to the Euclid's *Elements*. (Note also that "Mathematics" is written in the singular. Bourbaki teaches us that there are not several distinct mathematics, but only one mathematic. And he teaches it to us in his usual way : not by great speeches, but by omitting a letter at the end of a word). Coming back to Euclid, I don't think he produced contributions really original. Archimedes would be a more appropriate contact. He is the great mathematician of Antiquity. He did extraordinary classic things, both in mathematics and in physics.

In philosophy of science, there is a very strong current in favor of a thought of rupture. Are there no breaks in mathmatics ? We have for example described the emergence of the probability as a new way of representing the world. What is its meaning in mathematics ?

Philosophers like to speak of "rupture". I guess that adds a little spice to their speeches. I don't see anything like that in mathematics : no catastrophe, no revolution. Progress, yes, I already said it ; it's not the same thing. Sometimes we work on old questions, sometimes on new questions. There is no frontier between the two. There is a great continuity between the mathematics of two centuries ago and that of now. The time of mathematicians is the "long duration" of my late colleague Braudel.

As for probabilities, they are useful for their applications at the same time mathematical and practical ; from a purely mathematical point of view, they constitute a branch of the theory of measurement. Can we really talk about them as "a new way of representing the world" ? Surely not in mathematics.

Do computers change something in the way to do math ?

We used to say that research in mathematics was inexpensive : pencils and paper, and those are our needs. Attoday we have to add computers. It remains inexpensive, in the sense that mathematicians rarely need very important computing resources. Unlike, for example, particle physics, whose calculation needs are commensurate with the very large equipment required to the collection of data, mathematicians do not mobilize large data centers.

In practice, it changes material working conditions for mathematicians : you spend a lot of time in front of your computer. It has different uses. First, the number of mathematicians has grossly increased. When I started 55 or 60 years ago, the number of productive mathematicians was a few thousand (worldwide), the equivalent of the population of a village. At present, this number is at least 100,000 : a city. This increase has consequences for how to contact and get informed. The computer and Internet access manage the exchanges. This is all the more precious since mathematicians are not slowed down, like others, by experimental work : we can communicate and work very quickly. I take an example. A mathematician has found a demonstration but a lemma is missing of a technical nature. Using a search engine - like Google - it identifies colleagues who have worked on the issue and sends them an email. In this way, it is likely to find in a few days or even within hours the person who actually demonstrated the lemma he needs. (Of course, this only concerns problems auxiliaries : points of detail for which we wish to refer to existing references rather than doing the demonstrations yourself. On the really difficult questions my mathematician would have little chance of find someone who can help him).

The computer and the Internet are therefore tools to speed up our work. They also make manuscripts accessible worldwide whole, without waiting for their publication in a newspaper. It's very useful. Note that this acceleration has also disadvantages. E-mail produces informal correspondence that is less readily retained than paper. We rarely throw letters when we delete or lose easily emails (when you change computers, for example). We recently published (in bilingual version : French on one page, and English on the opposite page) my correspondence with A. Grothendieck between 1955 and 1987 ; this would not have been possible if it had been electronic.

In addition, some demonstrations use the computer to correct a series of cases that it would be impractical to deal with by hand. Two classic cases : the 4 colors problem (coloring cards with only four colors) and the Kepler problem (stacking of spheres in the 3-dimensional space). This leads to demonstrations which are not really verifiable ; in other words, they are not real "demonstrations" but only experimental facts, very likely, but that no one can guarantee.

You mentioned the increase in the number of mathematicians. What is the situation today ? Where does mathematics go ?

The increase in the number of mathematicians is an important fact. We could fear that this would be at the expense of quality. In fact, there nothing like that. There are many very good mathematicians (in particular among young French people - a very good omen).

What I can say about the future is that despite this great number of mathematicians, we are not short of material. We let's not run out of problems, when just over two centuries ago, at the end of the 18^{th} century, Lagrange was pessimistic : he thought that "the mine was dried up", that there was not much left to find. Lagrange wrote that just before Gauss revived mathematics in an extraordinary way, him alone. Today, there is a lot of land to explore for young mathematicians (and also for the less young, I hope).

According to a commonplace of the philosophy of science, the great mathematical discoveries are made by young mathematicians. Is

this your opinion ?

I don't think the term "great discovery" applies to me. I have mostly done "useful" things (for other mathematicians). In all case when I got the Abel award in 2003, most of the work that was cited by the jury were made before I was 30 years old. But if I had arrested at that time, I probably would not have been given this price : I also did other things afterwards (even "guess-work" about which many people have worked and still work).

In my generation, many of my colleagues have continued beyond 80 years old, for example my old friends Armand Borel and Raoul Bott, all dead two recently at 82. There is no reason to stop, as long as health permits. The subject must still lend itself to it. When we are very wide, there is always something to do, but if we are too specialized, we can get stuck for long periods, either because we demonstrated everything there was to demonstrate, or on the contrary because the problems are too difficult. It is very frustrating.

Mathematical discoveries give great joys. Poincaré, Hadamard, Littlewood [3] explained it very well. As far as I'm concerned, I keep especially the memory of an idea that helped unlock the homotopy theory. It happened one night back from vacation, in 1950, in a train berth. I was looking for a fiber space with such and such properties. The answer came : the space of laces ! I couldn't help but wake up my wife who was sleeping in the bunk below to say : that's it ! My thesis came out of there, and much more. Of course, these sudden discoveries are rare : it happened to me maybe twice in sixty years. But these are luminous moments, truly exceptional.

Is Collège de France a place where you interact with others disciplines ?

Not for me. Even among the mathematicians of Collège de France, there is no collective work. It should be noted that we work in branches often very separate. It's not bad : Collège de France is not supposed to be a club. A number of modern commonplaces - like *collective work, interdisciplinarity and teamwork* - do not apply to us.

3. J.E. Littlewood, A Mathematician's Miscellany, Methuen and Co, 1953. This book explains well the unconscious part of the creative work.

What have you thought of the dialogue between a specialist in neurosciences, Jean-Pierre Changeux, and the mathematician Alain Connes, which is reproduced in the book *Matter of thought* ?

This book is a fine example of deaf dialogue. Changeux does not understand not what Connes says, and vice versa. It's quite amazing. Personally, I'm on Connes' side. Mathematical truths are independent of us [4]. Our only choice is how to express them. If desired, we That's what he has can do this without introducing any terminology. Consider for example a troop of soldiers. Their general likes to arrange them in two ways : rectangle, or in 2 squares. It's up to the sergeant to place them. He realizes that just put them in a row by 4 : if there are 1 left that he could not place, or he will manage to put them all in a rectangle, or he will manage to distribute them in two squares.

[Technical translation : the number n of soldiers is of the form $4k + 1$. If n is not first, we can arrange the soldiers in a rectangle. If n is prime, a theorem due to Fermat says that n is the sum of two squares.]

What is the place of mathematics compared to others science ? Is there a new demand for mathematics, from these sciences ?

No doubt, but we have to separate things. On the one hand there is theoretical physics, which is so theoretical that it straddles mathematics and physics, physicists considering it to be mathematics, while mathematicians take the opposite view. It is symbolized by string theory. Its most positive aspect is to provide mathematicians a large number of statements, which they must demonstrate (or possibly demolish).

In addition, especially in biology, there is everything related to systems with a large number of elements that must be treated collectively. There are branches of mathematics which deal with these questions. That responds to

4. A few years ago, my friend R. Bott and I were going to receive an Israeli award (the Wolf Prize) presented in the Knesseth, in Jerusalem. Bott had to say a few words about mathematics. He asked me : "What can I say ?". I said to him, âIt's very simple ; you have not only to explain this : the other sciences seek to find the laws that God has chosen ; the mathematics seeks to find the laws which God had to obey.". The Knesseth appreciated.

a request. There are also requests that concern logic : it is the case of data processing, for the manufacture of computers. You must also mention cryptography, which is a source of interesting problems relating to number theory.

Regarding the place of mathematics compared to other sciences, you can think of math as a big warehouse full of shelving. Mathematicians place things on the shelves whose they guarantee that they are true ; they also give the manual and the way to reconstruct them. The other sciences come to serve themselves in function of their needs. The mathematician doesn't care of what they do with his products. This metaphor is a bit trivial, but it pretty much reflects the situation. (Of course, we don't choose to do math for putting things on the shelves : we do math for fun to make).

Here is a personal example. My wife, Josiane, was a specialist in quantum chemistry. She needed to use the linear representations of certain groups of symmetries. The available works were not satisfying : they were correct, but used very heavy notations. I wrote for her a presentation tailored to her needs, and then I published in a book entitled *Linear Representations of Finite Groups*. I have done my job as a mathematician (and husband) : put things on the shelves.

Does truth in mathematics have the same meaning as elsewhere ?

No. It is an absolute true. This is undoubtedly what makes the unpopularity of mathematics in the audience. The man in the street is willing to tolerate absolute when it comes from religion, but not when it comes from mathematics. Conclusion : to believe is easier than to demonstrate.

La vie et l'œuvre d'André Weil

Jean-Pierre Serre

André Weil est mort à Princeton, en août 1998. Il avait 92 ans. Ses dernières années avaient été assombries par la disparition de sa femme, Eveline, ainsi que par les infirmités du grand âge. La mort a peut-être été pour lui une délivrance.

Le bureau de l'Académie m'a demandé d'évoquer devant vous sa vie et son œuvre.

Il était né à Paris, en 1906, d'une famille juive. Son père, médecin, était d'origine alsacienne, sa mère, d'origine autrichienne et née en Russie. Il avait une sœur, Simone, plus jeune que lui de trois ans ; les deux enfants étaient très proches l'un de l'autre, et le sont restés jusqu'à la mort de Simone en 1943 ; André Weil s'est beaucoup occupé ensuite de la publication des nombreux textes inédits laissés par sa sœur.

On trouve dans ses *Souvenirs d'Apprentissage* ([**1991**]) un récit charmant de l'éducation à la fois soignée et peu orthodoxe qu'il a reçue. Bilan : un goût très vif pour les langues anciennes (latin, grec, sanscrit) et une vocation bien affirmée de mathématicien. Cela le conduit à entrer à l'École Normale Supérieure en 1922, alors qu'il n'a que 16 ans (la tradition normalienne veut qu'il s'y promenait en culottes courtes). Il en sort en 1925, reçu premier à l'agrégation malgré une copie blanche à l'épreuve de mécanique rationnelle, sujet qui ne lui paraissait pas faire partie des mathématiques. Il s'en va en Italie, puis en Allemagne, où se trouvaient certains des meilleurs mathématiciens de l'époque tels Hilbert, Artin, von Neumann, Siegel. Il soutient sa thèse en 1928, à 22 ans. Il est professeur en Inde (à Aligarh) pendant deux ans ; il y occupe un poste que lui avait procuré l'indianiste Sylvain Levi dont il avait suivi les cours de sanscrit au Collège de France. Ensuite, c'est Marseille, puis Strasbourg de 1933 à 1939. C'est pendant son séjour à Strasbourg qu'il s'associe à des amis de l'École Normale (Henri Cartan, Jean Dieudonné, Jean Delsarte,...) pour créer le groupe Bourbaki. En 1939, au moment de la

L'Enseignement Mathématique, 1. 45 (1999), p. 5-16. Texte lu à l'Académie des Sciences de Paris le 1er mars 1999. Cet article paraîtra aussi dans les *Discours et Notices Biographiques*, Acad. Sci, Paris, *vol. 2* (1999).

déclaration de guerre, il se rend en Finlande ; après avoir failli y être fusillé comme espion soviétique, il revient en France et est incarcéré à la prison de Rouen. Condamné pour insoumission, il est bientôt libéré, et après diverses aventures (décrites dans ses *Souvenirs*), il réussit à partir pour les États-Unis en 1940. Il y reste quelques années avant d'aller au Brésil pour deux ans. Ce n'est qu'en 1947 qu'il reçoit enfin un poste correspondant à son niveau : il est professeur à l'Université de Chicago, puis (en 1958) à l'Institute for Advanced Study de Princeton, où il passe les quarante dernières années de sa vie. L'Institute lui convenait fort bien, à la fois par la liberté qu'il lui donnait pour enseigner (ou ne pas enseigner, s'il le préférait), et par le niveau de ses professeurs et de ses visiteurs. (Sa place naturelle, chez nous, aurait été le Collège de France ; j'ai souvent rêvé à ce qu'eût été une chaire de Mathématique qu'il aurait occupée ! Hélas, cela n'a pas pu se faire.

Pour en terminer avec l'aspect "universitaire" de Weil, je mentionne quelques-unes des distinctions qu'il a reçues (ou plutôt qu'il a accepté de recevoir) : il était membre de l'Académie des Sciences des USA et de la Royal Society de Londres ; il a eu le prix Wolf en 1979 (en même temps que Jean Leray, et un an avant Henri Cartan), et le prix Kyoto en 1994 ; il semble que ce dernier prix lui ait fait particulièrement plaisir à cause des excellentes relations qu'il a toujours eues avec les mathématiciens japonais :

J'en viens maintenant à l'essentiel, c'est-à-dire à ses travaux. Sa première publication est une Note aux Comptes rendus ([1926]). Dans les cinquante ans qui ont suivi, il a publié une dizaine d'ouvrages et une centaine d'articles, rédigés en français ou en anglais, parfois en allemand. Ces articles ont été rassemblés dans les trois volumes de ses *Œuvres Mathématiques*, publiés par la maison d'édition Springer-Verlag ([**1979**]). Weil leur a adjoint de précieux *Commentaires*, où il explique leur genèse.

Il n'est pas possible de classer ces textes par sujets. Trop de thèmes différents s'y croisent. Bien sûr, on pourrait s'amuser, à la mode américaine, à y relever des mots significatifs (*Keywords*) : zêta, Siegel, points rationnels, variétés abéliennes,... Ce ne serait guère sérieux. La seule possibilité me paraît être de suivre l'ordre chronologique, qui est d'ailleurs celui adopté dans les Œuvres.

1. Commençons par la thèse ([1928]). Il s'agit de théorie des nombres, et plus particulièrement d'équations diophantiennes, c'est-à-dire de points rationnels sur des variétés algébriques. A l'époque, la seule méthode connue était la méthode de *descente*, due à Fermat. Toutefois, l'emploi de cette méthode était subordonné à des calculs explicites, quelque peu miraculeux, qu'il fallait faire dans chaque cas particulier. Weil est le premier à voir qu'il y a derrière ces calculs un principe général, qu'il appelle le *théorème de décomposition* ; ce théorème effectue une sorte de transfert entre propriétés algébriques (en principe faciles) et propriétés arithmétiques (plus difficiles). Il en déduit ce que nous appelons maintenant le *théorème de Mordell-Weil* : le groupe des points d'une variété abélienne qui sont rationnels sur un corps de nombres donné est de type fini. La démonstration est loin d'être aisée : la géométrie algébrique de l'époque ne disposait pas des outils nécessaires. Heureusement, Weil, qui s'était pénétré de l'œuvre de Riemann dès l'École Normale, peut remplacer l'algèbre, qui lui manque, par l'analyse : fonctions thêta. Il parvient finalement au but.

"But"? Le mot n'est pas exact. En fait, comme dans presque tous les travaux de Weil, il s'agit plutôt d'un *point de départ*, à partir duquel on peut attaquer d'autres questions. Dans le cas présent, ces questions sont les suivantes :

- Prouver la finitude des points *entiers* d'une courbe affine de genre > 0. Cela a été fait, un an plus tard, par Siegel, en combinant les idées de Weil avec celles de la théorie des nombres transcendants.

- Prouver la finitude des points rationnels en genre > 1 (*conjecture de Mordell*). Cela a été fait, cinquante-cinq ans plus tard, par Faltings.

- Rendre *effectifs* (c'est-à-dire explicitables) les résultats qualitatifs de Mordell-Weil, Siegel et Faltings. Pour Siegel, cela a été fait, au moins partiellement, par Baker (1966-1968) ; pour Mordell-Weil et Faltings, la question est toujours ouverte (et intéresse beaucoup les arithméticiens).

2. Dans les années qui suivent sa thèse, Weil explore diverses pistes pouvant mener à la conjecture de Mordell. L'une d'elles le conduit à son grand mémoire *Généralisation des fonctions abéliennes* ([1938a]), un texte qui se présente comme de l'Analyse, mais dont la signification est essentiellement algébrique, alors que sa motivation est arithmétique ! (Qui d'autre que Weil et Siegel ont pu comprendre ce texte en 1938 ? On peut se le demander.) Le succès de sa thèse reposait sur l'emploi des variétés abéliennes, et en particulier des jacobiennes. Weil est persuadé qu'il faut sortir du cadre abélien.

La jacobienne paramètre les fibrés vectoriels de rang 1 (et de degré 0) ; il faut paramétrer des fibrés de rang quelconque (autrement dit passer de $\mathbf{GL_1}$ à $\mathbf{GL_n}$ - ce sera l'un de ses thèmes favoris). Mais en 1938 personne, pas même lui, ne sait ce qu'est un fibré vectoriel analytique, et encore moins algébrique : ce n'est qu'une dizaine d'années plus tard que cette notion sera dégagée (par Weil lui-même). Ce détail ne l'arrête pas. Il introduit une notion équivalente à celle de fibré vectoriel, celle de "classe de diviseurs matriciels", et démontre par voie analytique (en suivant Riemann et Poincaré) la *formule de Riemann-Roch* et ce que nous appelons maintenant le *théorème de dualité* (qu'il appelle "théorème de Riemann-Roch non homogène"). Un beau tour de force ! Mais définir des fibrés ne suffit pas ; ce qu'il cherche, ce sont leurs "variétés de modules", qui doivent remplacer les jacobiennes. Du point de vue de la géométrie algébrique, c'est un problème de passage au quotient très sérieux ; il n'a été résolu que quelque vingt ans plus tard, par Grothendieck et Mumford. Weil doit se contenter de résultats partiels, en bonne partie non démontrés (mais qui se révéleront essentiellement corrects) ; *a fortiori*, il ne peut en donner aucune application arithmétique. Un échec, donc ? Non, car ce qu'il fait sur Riemann-Roch servira à d'autres de modèle, quinze ans plus tard ; quant aux variétés de modules qu'il tentait de construire, elles se sont révélées essentielles dans d'autres questions : en géométrie différentielle, avec Donaldson, et en caractéristique $p > 0$, avec Drinfeld.

3. Pendant la période dont je parle (1928-1940), Weil est loin de ne s'occuper que de théorie des nombres. Voici quelques-unes de ses autres activités :

- en analyse complexe à plusieurs variables, introduction d'une intégrale généralisant celle de Cauchy, et que l'on appelle maintenant *l'intégrale de Weil* ([1932b] et [1935d]) ; il en déduit une généralisation du théorème de Runge : si D est un domaine borné défini par des inégalités polynomiales, toute fonction holomorphe sur D est limite de polynômes pour la topologie de la convergence compacte ;

- en théorie des groupes de Lie compacts, utilisation de méthodes topologiques (formule de Lefschetz) pour démontrer la conjugaison des tores maximaux ([1935e]) ;

- en analyse ultramétrique (sujet qui était en enfance), définition des fonctions elliptiques p-adiques ([1936h]) ;

- en topologie, définition des espaces uniformes ([1937]) ;

- il publie chez Hermann un ouvrage : *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* ([**1940d**]) où il expose, sous une forme à la fois bourbachique, élégante, et concise, les deux aspects de cette théorie qui étaient accessibles à l'époque : le cas des groupes compacts (relations d'orthogonalité des caractères) et celui des groupes commutatifs (dualité de Pontrjagin et transformation de Fourier).

4. Revenons maintenant à la théorie des nombres, et à la géométrie algébrique, avec la célèbre Note de 1940 :

Entre 1925 et 1940, l'école allemande, sous l'impulsion d'Artin et de Hasse, avait mis en évidence de remarquables analogies entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions d'une variable sur un corps fini (en langage géométrique : courbes sur un corps fini). Les uns comme les autres possèdent des *fonctions zêta*, pour lesquelles la question de *l'hypothèse de Riemann* se pose. Dans le cas des corps de fonctions, Hasse était parvenu à démontrer cette hypothèse lorsque le genre est 1. Comment attaquer les genres > 1 ? C'est pendant son séjour à Rouen de 1940 que Weil voit la solution : au lieu de travailler uniquement avec des courbes, autrement dit avec des variétés de dimension 1, on doit utiliser des variétés de dimension plus grande (surfaces, variétés abéliennes) et leur adapter des résultats démontrés (sur le corps des nombres complexes) par voie topologique ou analytique. Il envoie aux *Comptes rendus* une Note ([1940b]) qui commence ainsi :

> "Je vais résumer dans cette Note la solution des principaux problèmes de la théorie des fonctions algébriques à corps de constantes fini..."

Cette Note contient une esquisse de démonstration, pas davantage. Tout repose sur un "lemme important", tiré de la géométrie italienne. Comment démontrer ce lemme ? Weil se rend bientôt compte que ce n'est possible qu'en reprenant entièrement les définitions et les résultats de base de la géométrie algébrique, et en particulier ceux de la théorie des intersections (permettant un calcul des cycles remplaçant l'homologie manquante). Il est ainsi amené à écrire *Foundations of Algebraic Geometry* ([**1946a**]), ouvrage massif (et quelque peu aride) de 300 pages, qui n'a été remplacé que vingt ans plus tard par les non moins massifs et arides *Éléments de Géométrie Algébrique* de Grothendieck. Une fois les Foundations rédigées, Weil peut revenir aux courbes et à leur hypothèse de Riemann. Il publie coup sur coup deux ouvrages : *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent* ([**1948a**]) et *Variétés abéliennes et courbes algébriques* ([**1948b**]). Après huit années, et plus de 500 pages, sa Note de 1940 est enfin justifiée !

Quelles sont les retombées ? Tout d'abord, l'hypothèse de Riemann a des applications concrètes. Elle donne des majorations de sommes trigonométriques à une variable ([1948c]), par exemple la suivante (utile dans la théorie des formes modulaires) :

$$\left|\sum cos(2\pi(x+x')/p)\right| \leq 2\sqrt{p} \qquad (p \text{ premier}),$$

où la sommation porte sur les entiers x tels que $0 < x < p$, et x' désigne l'inverse de x modulo p.

De plus, Weil est amené, non seulement à donner des fondements solides à la géométrie algébrique, mais aussi à développer une théorie algébro-géométrique des variétés abéliennes, parallèle à la théorie analytique basée sur les fonctions thêta. Les variétés abéliennes sont longtemps restées un de ses thèmes favoris (cf. [1952e], [1954g], [1976b], [1977c]), avec notamment la théorie de la multiplication complexe ([1955c] et [1955d]), obtenue simultanément (et indépendamment) par Taniyama et Shimura.

5. Guidé par le cas des courbes, ainsi que par des calculs explicites dans le cas des hypersurfaces monomiales, Weil formule ([1949b]) ce que l'on a tout de suite appelé les *conjectures de Weil*. Ces conjectures portent sur les variétés (projectives, non singulières) sur un corps fini. Elles reviennent à supposer que les méthodes topologiques de Riemann, Lefschetz, Hodge, s'appliquent en caractéristique $p > 0$; dans cette optique, le nombre de solutions d'une équation (mod p) apparaît comme un nombre de points fixes, et doit donc pouvoir être calculé par la formule des traces de Lefschetz. Cette idée, vraiment révolutionnaire, a enthousiasmé les mathématiciens de l'époque (je peux en témoigner de première main) ; elle a été à l'origine d'une bonne partie des progrès de la géométrie algébrique dans les années qui ont suivi. L'objectif cherché n'a été atteint qu'après environ vingt-cinq ans, non par Weil lui-même, mais (principalement) par Grothendieck et Deligne. Les méthodes qu'ils ont été amenés à développer comptent parmi les plus puissantes de la géométrie algébrique actuelle ; elles ont eu des applications à des sujets aussi divers que la théorie des formes modulaires (ce qu'avait d'ailleurs pressenti Weil) et la détermination des caractères des groupes finis "algébriques" (Deligne-Lusztig).

6. Weil revient à l'arithmétique avec son travail de 1951 sur la théorie du corps de classes ([1951b]). Cette théorie avait atteint en 1927 une forme en apparence définitive avec la démonstration par Artin de la loi générale de réciprocité. Dans le langage introduit par Chevalley, le résultat principal s'énonce en disant que le groupe de Galois de l'extension abélienne maximale d'un corps de nombres K est isomorphe au quotient C_K/D_K, où C_K est le groupe des classes d'idèles de K, et D_K est sa composante connexe. (Ainsi, on décrit ce qui se passe au-dessus de K par des données tirées de K lui-même, tout comme un topologue décrit les revêtements d'un espace à partir des classes de lacets de celui-ci.) Toutefois, un aspect désagréable de cette théorie est que ce n'est pas le groupe C_K qui est un groupe de Galois, mais seulement son quotient C_K/D_K. Weil part de l'idée que le groupe C_K lui-même doit être un groupe de Galois en un sens convenable (en quel sens ? nous ne le savons toujours pas). Si c'est vrai, cela entraîne de remarquables propriétés fonctorielles des groupes C_K (par exemple, si L/K est une extension galoisienne finie, il doit y avoir une extension canonique de $\mathrm{Gal}(L/K)$ par C_L). On peut se proposer de démontrer directement ces propriétés. C'est ce que fait Weil. Ici encore, les retombées sont importantes :

- on est amené à étudier les groupes de cohomologie des groupes C_L ; c'est l'origine des méthodes cohomologiques en théorie du corps de classes, développées par Nakayama, Hochschild, Artin, Tate,...

- les nouveaux "groupes de Weil" ainsi définis permettent de définir de nouveaux types de fonctions L, contenant comme cas particuliers, à la fois les fonctions L non abéliennes d'Artin, et les fonctions L avec "Grössencharakter" de Hecke. Comme le dit Weil, on réalise ainsi le mariage d'Artin et de Hecke !

7. Peu après, Weil publie une étude ([1952b], complétée dans [1972]) sur les *formules explicites* de la théorie des nombres ; ces formules (essentiellement connues des spécialistes, semble-t-il) relient des sommes portant sur les nombres premiers à d'autres sommes portant sur les zéros des fonctions zêta. Weil les écrit de façon très suggestive (par exemple en mettant bien en évidence l'analogie entre places archimédiennes et places ultramétriques - un autre de ses thèmes favoris). Le résultat le plus intéressant est une traduction de l'hypothèse de Riemann en termes de la positivité d'une certaine distribution. Cette traduction sera-t-elle utile pour démontrer l'hypothèse de Riemann ? Il est trop tôt pour le dire.

8. Divers travaux de Weil entre 1940 et 1965 se rapportent à la géométrie différentielle. Ce sont :

- (avec Allendoerfer) formule de Gauss-Bonnet pour les polyèdres riemanniens ([1943a]) ;

- démonstration des théorèmes de de Rham (lettre à H. Cartan de 1947, cf. [1952a]) : un texte qui a beaucoup influencé Cartan pour sa mise au point de la théorie des faisceaux (due initialement à Leray) ;

- formes harmoniques et théorie de Kähler ([1947b] et [**1958a**]) ; ce sont là les outils de base de l'application des méthodes analytiques à la géométrie algébrique ;

- théorie des connexions et introduction de *l'algèbre de Weil* ([1949e]) ;

- déformations des espaces localement homogènes et des groupes discrets ([1960c], [1962b], [1964a]) ; il y démontre des théorèmes de rigidité pour les sous-groupes discrets cocompacts des groupes de Lie simples de rang > 1.

9. Dans les années 50 et 60, Weil a consacré une série d'articles à des thèmes inspirés de Siegel. Il s'est d'ailleurs exprimé là-dessus dans ses *Œuvres* (vol. I, p.544) :

> "Commenter Siegel m'a toujours paru l'une des tâches qu'un mathématicien de notre temps pouvait le plus utilement entreprendre."

Noter le verbe "commenter" : un bel exemple d'*understatement* ! Weil fait bien plus :

Dans [**1961a**] et [1962a] il développe de façon systématique les méthodes adéliques introduites par Kuga et Tamagawa. Non seulement cela redonne les théorèmes de Siegel sur les formes quadratiques, mais cela suggère de nouveaux problèmes, par exemple celui-ci : montrer que le nombre de Tamagawa d'un groupe simplement connexe est égal à 1 (on sait maintenant, grâce aux travaux de Langlands, Lai, et Kottwitz, que la réponse est positive).

Dans ses deux mémoires des *Acta Mathematica* ([1964b] et [1965]) il revient aux formes quadratiques et à la formule de Siegel d'un point de vue tout à fait différent. Il introduit, et étudie, un nouveau groupe, le *groupe métaplectique*, ainsi qu'une représentation de ce groupe (que l'on appelle maintenant la *représentation de Weil*). La formule de Siegel se présente alors comme l'égalité de deux distributions, l'une d'elles étant une sorte de série d'Eisenstein, alors que l'autre est une moyenne de fonctions thêta. Ce résultat n'est d'ailleurs pas limité aux formes quadratiques : Weil montre qu'il s'applique à tous les groupes classiques, et qu'il entraîne des théorèmes du type local $\longleftrightarrow$ global (principe de Hasse), ainsi que des déterminations de nombres de Tamagawa.

10. L'œuvre de Hecke est aussi l'une de celles qui ont beaucoup inspiré Weil. Dans *l'Avenir des Mathématiques* ([1947a]) il parlait déjà des produits eulériens "dont les recherches de Hecke viennent seulement de nous révéler l'extrême importance en théorie des nombres et en théorie des fonctions".

Vingt ans plus tard ([1967a]) il apporte une contribution décisive aux travaux de Hecke en montrant que certaines équations fonctionnelles pour une série de Dirichlet ainsi que pour ses "tordues" par des caractères équivalent au fait que cette série provient d'une forme modulaire. On obtient ainsi l'une de ces choses si précieuses en mathématique, un *dictionnaire*

$$\text{formes modulaires} \longleftrightarrow \text{séries de Dirichlet.}$$

L'implication $\longrightarrow$ était due à Hecke, qui avait également démontré l'implication réciproque dans le cas particulier du niveau 1 ; l'idée nouvelle de Weil a été d'utiliser la "torsion". L'un des aspects les plus intéressants de sa théorie est la façon dont les constantes des équations fonctionnelles varient par torsion (autrement dit, par produit tensoriel).

Ce travail a suscité de nombreux développements, dont certains par Weil lui-même ([**1971a**]). Il a trouvé sa place dans ce que l'on appelle la "philosophie de Langlands". L'une de ses retombées a été une formulation précise d'une conjecture un peu vague faite par Taniyama en 1955, suivant laquelle toute courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ est "modulaire". Le travail de Weil suggère que le "niveau" modulaire nécessaire est le même que le "conducteur" de la courbe, i.e. est déterminé par des propriétés de mauvaise réduction ; cela a permis quantité de vérifications numériques, avant que le résultat ne soit finalement démontré (sous certaines restrictions techniques) par Wiles, en 1995.

11. Les dernières publications de Weil concernent l'histoire des mathématiques. C'est là un sujet qui l'intéressait depuis longtemps, comme en témoignent certaines des *Notes Historiques* de Bourbaki (en particulier celle sur le calcul différentiel et intégral dans *Fonctions d'une Variable Réelle*, chap. I-III). Il avait commencé par un bref ouvrage, à la fois mathématique et historique : *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker* ([**1976a**]) ; il dit l'avoir écrit avec beaucoup de plaisir, et ce plaisir se communique au lecteur ! Les textes suivants sont plus franchement historiques. Il faut surtout citer son *Number Theory - An approach through history from Hammurapi to Legendre* ([**1984**]) dans lequel il décrit l'histoire de la théorie des nombres jusqu'en 1800, c'est-à-dire jusqu'aux *Disquisitiones Arithmeticæ* non comprises (ses lecteurs auraient bien aimé qu'il aille plus loin, et qu'il nous parle de Gauss, Jacobi, Eisenstein, Riemann,... - il ne s'en est pas senti la force). Comme on pouvait s'y attendre avec lui, ce sont les mathématiques qui sont l'objet principal de ces livres et non pas la vie privée ni les relations sociales. Seule l'histoire des idées importe. Quel point de vue rafraîchissant !

Bien sûr, écrire de tels livres n'est pas facile. Il y faut des dons linguistiques et littéraires (Weil n'en manquait pas). Il faut aussi (et surtout) être capable de distinguer ce qui est une idée vraiment nouvelle, et ce qui relève seulement de la technique standard (il s'exprime là-dessus dans [1978b]) ;

c'est certainement ce qui est le plus difficile pour un historien non mathématicien (voir par exemple [1973], [1975a], [1978a]).

Je termine ici cette description, trop superficielle je le crains, de ce qu'a fait André Weil. Ce qui rend son œuvre unique dans les mathématiques du XX^e siècle, c'est son aspect prophétique (Weil "voit" dans l'avenir) combiné avec la précision la plus classique. Lire et étudier cette œuvre, et en discuter avec lui, auront été parmi les plus grandes joies de ma vie de mathématicien.

RÉFÉRENCES [1]

[1926] Sur les surfaces à courbure négative. *C.R. Acad. Sci. Paris 182*, 1069-1071.

[1928] L'arithmétique sur les courbes algébriques. *Acta Math. 52*, 281-315.

[1932b] Sur les séries de polynômes de deux variables complexes. *C.R. Acad. Sci. Paris 194*, 1304-1305.

[1935d] Intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. *Math. Ann. 111*, 178-182.

[1935e] Démonstration topologique d'un théorème fondamental de Cartan. *C.R. Acad. Sci. Paris 200*, 518-520.

[1936h] Sur les fonctions elliptiques p-adiques. *C.R. Acad. Sci. Paris 203*, 22-24.

[1937] Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. *Act. Sc. et Ind.* n° 551, Hermann, Paris, 3-40.

[1938a] Généralisation des fonctions abéliennes. *J. Math. Pures Appl. (IX) 17*, 47-87.

[1940b] Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini. *C.R. Acad. Sci. Paris 210*, 592-594.

[**1940d**] *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Hermann, Paris (2^e édition 1953).

[1943a] (jointly with C. Allendoerfer) The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra. *Trans. Amer. Math. Soc. 53*, 101-129.

[**1946a**] *Foundations of Algebraic Geometry.* Amer. Math. Soc. Coll. vol. XXIX. New York (2nd edition 1962).

1. Les caractères gras désignent les livres et les notes de cours.

[1947a] L'avenir des mathématiques. *"Les Grands Courants de la Pensée Mathématique"*, éd. F. Le Lionnais, Cahiers du Sud, Paris, 307-320 (2[e] éd., A. Blanchard, Paris 1962).

[1947b] Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe. *Comment. Math. Helv. 20*, 110-116.

[**1948a,b**] (a) *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Hermann, Paris ; (b) *Variétés abéliennes et courbes algébriques, ibid.* [2[e] édition de (a) et (b), sous le titre collectif *"Courbes algébriques et variétés abéliennes", ibid.* 1971].

[1948c] On some exponential sums. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34*, 204-207.

[1949b] Numbers of solutions of equations in finite fields. *Bull. Amer Math. Soc. 55*, 497-508.

[1949e] Géométrie différentielle des espaces fibrés (inédit).

[1951b] Sur la théorie du corps de classes. *J. Math. Soc. Japan 3*, 1-35.

[1952a] Sur les théorèmes de de Rham. *Comment. Math. Helv. 26*, 119-145.

[1952b] Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers. *Comm. Sém. Math. Univ. Lund* (vol. dédié à Marcel Riesz), 252-265.

[1952e] On Picard varieties. *Amer. J. Math. 74*, 865-894.

[1954g] On the projective embedding of abelian varieties, in *Algebraic geometry and Topology, À Symposium in honor of S. Lefschetz.* Princeton U. Press, 177-181.

[1955c] On a certain type of characters of the idèle-class group of an algebraic number-field, in *Proc. Intern. Symp. on Algebraic Number Theory, Tokyo-Nikko*, 1-7.

[1955d] On the theory of complex multiplication, *ibid.*, 9-22.

[**1958a**] *Introduction à l'étude des variétés kählériennes.* Hermann, Paris.

[1960c] On discrete subgroups of Lie groups. *Ann. of Math. 72*, 369-384.

[**1961a**] *Adeles and algebraic groups.* I.A.S., Princeton.

[1962a] Sur la théorie des formes quadratiques, in *Colloque sur la Théorie des Groupes Algébriques.* C.B.R.M., Bruxelles, 9-22.

[1962b] On discrete subgroups of Lie groups (ID. Ann. of Math. 75, 578-602.

[1964a] Remarks on the cohomology of groups. *Ann. of Math. 80*, 149-157.

[1964b] Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math. 111*, 143-211.

[1965] Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques. *Acta Math. 113*, 1-87.

[1967a] Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. *Math. Ann. 168*, 149-156.

[**1971a**] *Dirichlet series and automorphic forms.* Lecture Notes N° 189, Springer.

[1972] Sur les formules explicites de la théorie des nombres. *Izv. Mat. Nauk SSSR (Ser. Mat.) 36*, 3-18.

[1973] Review of "The mathematical career of Pierre de Fermat", by M. S. Mahoney. *Bull. Amer. Math. Soc. 79*, 1138-1149.

[1975a] Review of "Leibniz in Paris 1672-1676, his growth to mathematical maturity", by Joseph E. Hofmann. *Bull. Amer. Math. Soc. 81*, 676-688.

[**1976a**] *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker.* (Ergebnisse der Mathematik, Bd. 88), Springer.

[1976b] Sur les périodes des intégrales abéliennes. *Comm. Pure Appl. Math. XXIX*, 813-819.

[1977c] Abelian varieties and the Hodge ring (inédit).

[1978a] Who betrayed Euclid ? *Arch. Hist. Exact Sci. 19*, 91-93.

[1978b] History of mathematics : Why and how. *Proc. Intern. Math. Congress, Helsinki*, vol. I, 227-236.

[**1979**] *Œuvres Scientifiques - Collected Papers*, 3 vol. Springer.

[**1984**] *Number Theory - An approach through history from Hammurapi to Legendre.* Birkhäuser.

[**1991**] *Souvenirs d'apprentissage.* Birkhäuser.

(Reçu le 3 mars 1999)

Jean-Pierre Serre
Collège de France
3, rue d'Ulm
F-75231 Paris Cedex 05
France

Transcription d'un extrait d'Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce
de Jean-Luc Chabert, Évelyne Barbin, Michel Guillemot,
Anne Michel-Pajus, Jacques Borowczyk, Ahmed Djebbar,
Jean-Claude Martzloff

L'identité de Bézout

(p. 139 et suivantes)
Comment résoudre en nombres entiers l'équation du premier degré :

$$ax - by = c$$

où x et y désignent les inconnues et $a,\ b,\ c$ sont trois entiers donnés ? Ce problème a-t-il toujours une solution ? On sait en particulier que, lorsque les entiers a et b sont premiers entre eux, il est toujours possible de trouver deux entiers x_0 et y_0 tels que :

$$ax_0 - by_0 = 1,$$

relation que l'on appelle aujourd'hui l'*identité de Bézout*.

La méthode se trouve déjà exposée dans la deuxième édition de 1624 des *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet de Méziriac [1]. La théorie réside dans sa proposition XVIII : "Deux nombres premiers étant donnés, trouver le moindre multiple de chacun d'iceux, surpassant de l'unité un multiple de l'autre.". L'auteur en donne une preuve distinguant selon la parité du nombre de divisions à effectuer dans l'algorithme d'Euclide pour obtenir le reste 1 et pratiquant sur des lettres une sorte de récurrence laborieuse et difficile à suivre.

Bachet propose des applications pratiques dans son Problème sixième, "*Deviner le Nombre que quelqu'un aura pensé*", et dans sa dixième "*Petite subtilité*" : "*Il y a 41 personnes en un banquet tant hommes que femmes et enfants qui en tout dépensent 40 sous, mais chaque homme paye 4 sous, chaque femme 3 sous, chaque enfant 4 deniers. Je demande combien il y a d'hommes, combien de femmes, combien d'enfants.*" Signalons que ce problème se rattache à la tradition médiévale des problèmes arabes, indiens et chinois dits "des 100 volailles" (cf. [2] et [3]).

Nous avons préféré présenter ici un texte de Bézout, extrait de son *Cours d'Algèbre* de 1766 [4], plus facile à lire que celui de Bachet. C'est en fait sur un exemple :

$$17x - 11y = 542$$

qu'il détaille la méthode. L'extrait ci-dessous illustre bien la façon dont Bézout procède dans tout son Cours : plutôt que d'exposer de façon dogmatique - à la façon d'Euclide - il préfère introduire ses explications par l'intermédiaire d'exemples numériques plus ou moins concrets, à partir desquels il est aisé d'induire des principes généraux. Les manuels de Bézout joueront d'ailleurs un rôle important dans l'enseignement des mathématiques.

---

aux Éditions Belin, Collection Regards sur la Science, 1994.

Le texte de Bézout

Extrait du *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*, 6 vol., 1764-1769. Troisième Partie contenant l'Algèbre et l'Application de cette Science à l'Arithmétique et la Géométrie, Musier, Paris, 1766 (transcription des pages 118-121)

Des Problèmes indéterminés

Question première. *On demande en combien de manières on peut payer 542 livres, en donnant des pièces de 17 livres et recevant en échange des pièces de 11 livres.*

Représentons par x le nombre des pièces de 17 livres et par y celui des pièces de 11 livres ; en donnant x pièces de 17 livres, on payera x fois 17 livres ou $17x$: en recevant y pièces de 11 livres on recevra $11y$; par conséquent, on aura payé $17x - 11y$; et puisqu'on veut payer 542 livres, on aura $17x - 11y = 542$. Tirons la valeur de y, c'est à dire de l'inconnue qui a le moindre coefficient, et nous aurons $y = \dfrac{17x - 542}{11}$.

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour x tel nombre qu'on voudra, on aura pour y une valeur qui satisfera sûrement à l'équation ; mais comme la question exige que x et y soient des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement.

La valeur de $y = \dfrac{17x - 542}{11}$ se réduit, en faisant la division autant qu'il est possible, à $y = x - 49 + \dfrac{6x - 3}{11}$; il faut donc que $\dfrac{6x - 3}{11}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre entier ; on aura $\dfrac{6x - 3}{11} = u$ et par conséquent $6x - 3 = 11u$ et $x = \dfrac{11u + 3}{6}$, ou, en faisant la division, $x = u + \dfrac{5u + 3}{6}$; il faut donc que $\dfrac{5u + 3}{6}$ fasse un nombre entier ; on aura $\dfrac{5u + 3}{6} = t$, et par conséquent $5u + 3 = 6t$ et $u = \dfrac{6t - 3}{5} = t + \dfrac{t - 3}{5}$; il faut donc que $\dfrac{t - 3}{5}$ fasse un nombre entier : soit s ce nombre entier, on aura $\dfrac{t - 3}{5} = s$ et par conséquent $t = 5s + 3$: l'opération est terminée ici, parce qu'il est évident qu'en prenant pour s tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour t un nombre entier tel que l'exige la question, puisqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de x et y : puisqu'on a trouvé $u = \dfrac{6t - 3}{5}$; en mettant pour t la valeur $5s + 3$, on aura $u = \dfrac{30s + 18 - 3}{5} = 6s + 3$: et puisqu'on a trouvé $x = \dfrac{11u + 3}{6}$, en mettant pour u sa valeur, on aura $x = \dfrac{66s + 33 + 3}{6} = 11s + 6$: enfin, puisqu'on a trouvé $y = \dfrac{17x - 542}{11}$, en substituant pour x sa valeur, on aura $y = \dfrac{187s + 102 - 542}{11} = 17s - 40$; ainsi les valeurs correspondantes de x et de y sont $x = 11s + 6$ et $y = 17s - 40$. Par la première, on est libre de prendre pour s tel nombre entier qu'on voudra ; mais la seconde ne permet pas de prendre s plus petit que 3 ; en effet, y devant être positif, il faut que $17s$ soit plus grand que 40, ou que s soit plus grand que $\frac{40}{17}$, c'est-à dire plus grand que 2.

On peut donc satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x et de y, au lieu de s, tous les nombres entiers positifs imaginables depuis 3 jusqu'à l'infini ; ainsi, posant successivement $s = 3, s = 4, s = 5, s = 6, s = 7$, etc., on aura les valeurs correspondantes de x et de y comme il suit :

$$\begin{array}{llll} x & = 39\ldots & y & = 11 \\ & = 50 & & = 28 \\ & = 61 & & = 45 \\ & = 72 & & = 62 \\ & = 83, \text{etc.} & & = 79 \end{array}$$

dont chacune est telle qu'en donnant le nombre de pièces de 17 livres désigné par x et recevant le nombre correspondant de pièces de 11 livres désigné par y, on payera 542 livres.

Pour décrire l'algorithme de résolution en nombres entiers d'une équation :

$$ax - by = c$$

on introduit aujourd'hui une étape intermédiaire. Cette première étape consiste à trouver une solution particulière de l'équation :

$$ax - by = d$$

où d désigne le plus grand commun diviseur de a et b. La deuxième étape en déduit aisément toutes les solutions de l'équation initiale - qui est effectivement résoluble si et seulement si c est un multiple de d. D'une certaine façon, on retrouve au cours de cette première étape la procédure d'abord descendante, puis remontante de Bézout. Reprenons en effet l'exemple étudié.

Première étape. Trouver une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation :
(1) $$17x - 11y = 1.$$

En effectuant les divisions euclidiennes successives à partir de 17 et 11 :

$$17 = 11.1 + 6, \qquad 11 = 6.1 + 5, \qquad 6 = 5.1 + 1,$$

on obtient un reste 1, le plus grand commun diviseur de 11 et 17 est 1 et les nombres 11 et 17 sont premiers entre eux. En remontant la procédure à partir du dernier reste 1 :

$$1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2.6 - 11 = 2(17 - 11) - 11 = 2.17 - 3.11,$$

on obtient la solution particulière $(x_0, y_0) = (2, 3)$ de l'équation (1).

Deuxième étape. Trouver toutes les solutions de l'équation :
(2) $$17x - 11y = 542.$$

Remarquant que $(x_1, y_1) = (542.2, 542.3)$ est une solution particulière de l'équation (2), on voit que (x, y) est solution de (2) si et seulement si (x, y) est solution de l'équation :
(3) $$17(x - x_1) = 11(y - y_1).$$

Ainsi, 17 et 11 n'ayant pas de facteurs communs, 17 divise $(y - y_1)$ et y est de la forme $y_1 + 17k$ où k désigne un entier. Par report dans (3), on voit que x est de la forme $x_1 + 11k$. Inversement, quel que soit l'entier k, le couple $(x_1 + 11k, y_1 + 17k)$ est solution de (2). Ainsi, les solutions de (2) sont de la forme : $x = (2 \times 542) + 11k, y = (3 \times 542) + 17k$, où k est entier.

Pour que la solution (x, y) soit formée de nombres entiers naturels, il faut et il suffit que k vérifie à la fois : $(2 \times 542) + 11k > 0$ et $(3 \times 542) + 17k > 0$, c'est à dire : $k > -95.6$; d'où : $k = -95,\ x = 39,\ y = 1$; $k = -94,\ x = 50,\ y = 28, \ldots$ ou encore :

$$x = 39 + 11h, \quad y = 1 + 17h \quad \text{où } h \text{ est un entier naturel.}$$

Comme nous l'avons suggéré, les calculs effectués par Bézout reviennent aussi à une utilisation de l'algorithme d'Euclide.

En effet, Bézout pose successivement :

$$u = (\underline{6}x - 3)/\mathbf{11} \ ; \ t = (\underline{5}u + 3)/\mathbf{6} \ ; \ s = (\underline{1}t - 3)/\mathbf{5}.$$

or les nombres en gras correspondent aux diviseurs et les nombres soulignés aux restes dans les divisions euclidiennes successives que nous avons effectuées.

Cependant, la preuve de l'algorithme sous-tendu par la technique de Bézout est relativement complexe puisque, en écriture littérale, on peut lire la construction d'au moins trois suites dans la résolution de $ax - by = c$. L'initialisation du processus chez Bézout permet de comprendre la genèse de ces trois suites. En effet, de l'équation à résoudre, il tire $y = (ax + c)/b$ qui, tout comme x, doit prendre une valeur entière ; d'où l'idée de faire apparaître le reste a_2 dans la division de $a = a_0$ par $b = a_1$ et le reste c_2 dans la division de $c = c_1$ par $b = a_1$, de sorte que :

$$y = (ax + c)/b = (a_0x + c_1)/a_1 \equiv (a_2x + c_2)/a_1 \pmod 1;$$

puis l'idée d'introduire la quantité $u = (a_2x + c_2)/a_1$ qui, tout comme y, doit prendre une valeur entière. Ceci s'écrit encore :

$$a_2x - a_1u = -c_2,$$

et on peut itérer le processus en tirant $x = (a_1u - c_2)/a_2$. On est ainsi conduit naturellement à considérer :

- la suite strictement décroissante d'entiers $(a_n)_{0 \leq n \leq k+1}$ des restes dans l'algorithme d'Euclide relatif au couple (a, b) : si $a_0 = a$ et $a_1 = b$, alors a_{n+1} désigne le reste de a_{n-1} dans la division par a_n ;
  par suite, $a_{n+1} \equiv a_{n-1} \pmod{a_n}, a_{k+1} = 0$ et $a_k =$ P.G.C.D.(a, b) ;
- la suite décroissante d'entiers $(c_n)_{1 \leq n \leq k+1}$ où $c_1 = c$ et c_{n+1} désigne le reste de c_n dans la division par a_n ; par suite, $c_{n+1} \equiv c_n \pmod{a_n}$;
- une suite de lettres $(x_n)_{0 \leq n \leq k+1}$ où $x_0 = y$ et $x_1 = x$ et dont les valeurs sont liées entre elles par la relation de récurrence :

$$a_nx_{n+1} - a_{n+1}x_n = (-1)^n c_{n+1} \ \text{ pour } \ n \geq 0.$$

Par construction même, si la valeur de x_n est entière, alors la différence $x_{n+1} - x_{n-1}$ est un entier. En effet,

$$x_{n+1} = (a_{n+1}x_n + (-1)^n c_{n+1})/a_n \equiv (a_{n-1}x_n + (-1)^n c_n)/a_n = x_{n-1} \pmod 1.$$

Par suite, on vérifie aisément par récurrence que, si les valeurs de x et y sont entières, alors les valeurs de $x_2, \ldots, x_{k+1}$, sont elles aussi entières.

Or, $a_{k+1} = 0$, donc $x_{k+1} = (-1)^k c_{k+1}/a_k$ n'est entier que si a_k divise c_{k+1}, d'où $c_{k+1} = 0$ et le P.G.C.D. de a et b divise c.

Inversement, supposons que le P.G.C.D. de a et b divise c, alors a_k divise c_k, $c_{k+1} = 0$ et $x_{k+1} = 0$. Par suite, à toute valeur entière de x_k correspondent, en remontant la récurrence, des valeurs entières pour $x_{k-1}, \ldots, x_2, x_1 = x$ et $x_0 = y$.

Commentaire

L'écriture du P.G.C.D. 1 de 11 et 17 sous la forme d'une combinaison de 11 et 17 à coefficients entiers :

$$1 = 2 \times 17 - 3 \times 11$$

est appelée *identité de Bézout*.

Une telle identité a lieu non seulement dans l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$, mais aussi dans l'anneau $\mathrm{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans un corps K, comme l'anneau $\mathbb{R}[X]$ (cf. le commentaire souligné p. 156[a]), en fait dans tout anneau euclidien (cf. le commentaire souligné p. 133[b]). Ainsi, si P et Q sont deux polynômes étrangers entre eux, il existe deux polynômes U et V tels que :

$$PU + QV = 1$$

L'obtention de U et V s'effectue par la même méthode, c'est à dire l'utilisation de l'algorithme d'Euclide pour déterminer le P.G.C.D. de P et Q.

Plus généralement, on appelle aujourd'hui *anneau de Bézout* un anneau dont tout idéal de type fini est principal. Deux éléments a et b y possèdent un P.G.C.D. à savoir un élément d tel que Ad soit l'idéal engendré par a et b et l'identité de Bézout y a bien lieu puisque :

$$\mathrm{A}a + \mathrm{A}b = \mathrm{A}d.$$

Mais on ne dispose plus nécessairement de l'algorithme d'Euclide pour déterminer un tel P.G.C.D., d.

[a] On trouve p. 156 une remarque concernant le théorème de Sturm dont il est noté qu'il est quant à lui applicable dans tout anneau de polynômes à coefficients dans un corps K, et dont on cherche des racines dans le corps K, pourvu que l'on y puisse appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. A cet effet, il faut tout d'abord pouvoir munir K d'un ordre compatible avec les opérations, c'est la notion de *corps réel* ou ordonnable - caractérisé par le fait que -1 ne peut y être somme de carrés -, il faut ensuite des conditions affirmant l'existence de racines dans K - en fait, que $K(i)$ soit un corps algébriquement clos -, le corps réel K est alors appelé *corps réel clos* ou corps ordonné maximal.

[b] Le commentaire en question est : "On appelle aujourd'hui *anneau euclidien* [5] un anneau A muni d'un "*algorithme euclidien*", c'est à dire d'une application g de A dans $\mathbb{N}$ telle que : étant donnés deux éléments a et b de A, b étant non nul, il existe deux éléments q et r de A vérifiant :

$$a = bq + r \ \text{ et } \ g(r) < g(b).$$

Par exemple : $A = \mathbb{Z}$ avec $g(a) = |a|$ (plus petit reste en valeur absolue) ou encore $A = \mathbb{R}[X]$ avec $g(P(X)) = 1 + d^{\circ}(P(X))$ et $g(0) = 0$."

Références

[1] Cl.-G. Bachet, Sieur de Méziriac, *Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres*, 1ère éd. 1612, 2ème éd. 1624 chez P. Rigaud, à Lyon ; éd. simplifiée Blanchard, Paris, 1959.

[2] J.-C. Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris, 1987.

[3] A. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècles)*, trad. M. Cazenave et K. Jaouiche, Vrin, Paris, 1976.

[4] E. Bézout, *Cours de mathématiques à l'égard des Gardes du Pavillon et de la Marine, tome III, Algèbre*, Musier, Paris, 1766.

[5] P. Samuel, *About euclidean rings*, Journal of Algebra, t. 19 (1971), 282-301.

Sur une surface de révolution du quatrième degré dont les lignes géodésiques sont algébriques

par M. Jules Tannery

Dans la Note XV du *Traité de Mécanique* de Despeyrous, M. Darboux a donné une méthode pour obtenir les surfaces de révolution dont les lignes géodésiques sont fermées. En appliquant cette méthode, j'ai rencontré la surface dont l'équation est

$$16a^2(x^2+y^2) - z^2(2a^2 - z^2);$$

les lignes géodésiques de cette surface sont, non seulement fermées, mais encore *algébriques*.

Les calculs qui permettent de vérifier ce fait sont d'une nature trop élémentaire pour qu'il vaille la peine de les développer ici ; je me contenterai d'indiquer les résultats.

La surface présente un point conique à l'origine et se compose de deux parties symétriques par rapport au plan des $x,\ y$; il suffira de considérer l'une d'elles, celle du bas, par exemple, qui a la forme d'une poire allongée dont la pointe serait tournée vers le haut. Le plan du parallèle maximum a pour équation $z = -a$. Si, en conservant l'axe des z, on prend pour plan des $x,\ y$ ce plan du parallèle maximum, on reconnaît que les différents points de la surface s'obtiennent en faisant varier u de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ et θ de 0 à 2π dans les formules

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{i}\cos u \cos\theta, \\ y &= \frac{a}{i}\cos u \sin\theta, \\ z &= a\left(1 - \cos\frac{u}{2} + \sin\frac{u}{2}\right); \end{aligned}$$

l'élément linéaire de la surface est alors

$$ds^2 = \frac{a^2}{16}[(a+\sin u)^2\ du^2 + \cos^2 u\ d\theta^2]$$

et l'équation différentielle des lignes géodésiques est

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{\cos\alpha}{\cos u}\frac{\alpha + \sin u}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2 u}},$$

en désignant par α l'angle sous lequel la ligne géodésique coupe le parallèle maximum.

L'intégration se fait sans peine au moyen de la substitution

$$\sin u = \sin\alpha \sin\varphi$$

et la même substitution permet de rectifier la courbe.

On parvient ainsi aux équations suivantes dont l'une ou l'autre peut définir la ligne géodésique qui passe par le point où la partie positive du nouvel axe des x rencontre la surface : la constante d'intégration a, en effet, été déterminée de façon que θ et u puissent s'annuler en même temps

$$\sin(\theta-\alpha) = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2 u}}{\sin^2\alpha}\ \frac{2\sin u - \sin^2\alpha(1+\sin u)}{\cos u(1-\sin u)},$$

$$\cos(\theta-\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\ \frac{\sin^2\alpha(1+\sin u) - \alpha\sin^2 u}{\cos u(1-\sin u)}.$$

Retranscription de l'article du Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris, 1892, p. 190-192

Supposons que l'on parte de la valeur $u = 0$, que α soit compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, et que le radical soit d'abord positif ; quand u croît de 0 à α, θ croît de 0 à $\pi+\alpha$, z augmente continuellement et l'on obtient une première branche de courbe C_1 qui, en contournant la surface, s'élève au-dessus du parallèle maximum ; lorsque u décroît de α à 0, on doit changer le signe du radical, pour que θ continue de croître ; θ croît alors de $\pi+\alpha$ à $2\pi+2\alpha$; la portion de courbe C_2 que l'on obtient ainsi est symétrique de C_1 par rapport au plan méridien de longitude $\pi+\alpha$; C_1 et C_2 se croisent en un point pour lequel on a

$$\theta = \alpha \qquad\qquad \sin u = \frac{\sin^2\alpha}{2-\sin^2\ \alpha}.$$

Lorsque u décroît de 0 à $-\alpha$, θ croît de $2\pi + 2\alpha$ à $3\pi + \alpha$; on obtient ainsi une portion de courbe C_3 qui descend au-dessous du plan des $x,\ y$ jusqu'à ce que l'on soit dans le plan de symétrie : le point le plus bas de C_3 est sur la même parallèle à l'axe des z que le point le plus haut où se raccordent C_1 et C_2 : enfin, quand u croît de $-\alpha$ à 0, il faut encore changer le signe du radical ; θ croît de $3\pi+\alpha$ à 4π ; et l'on obtient une portion de courbe symétrique de C_3 ; la courbe totale est fermée. Elle présente la forme d'un 8 gauche : on peut se figurer le point double du 8 sur la partie antérieure de la surface, chacune des boucles passant derrière la surface, l'une en haut, l'autre en bas. Il est très aisé d'imaginer un fil fermé affectant cette forme et tendu sur la surface ; mais il y a plus : on vérifie sans peine que la longueur totale de la courbe est indpendante de α et qu'elle est, par conséquent, égale à deux fois la circonférence du parallèle maximum, ou encore à la longueur de la courbe méridienne : parallèle et méridienne sont en effet des courbes géodésiques limites, qui correspondent aux hypothèses $\alpha = 0; \alpha = \dfrac{\pi}{2}$. En sorte que le *même* fil, en se déformant de manière à rester tendu sur la surface, permettra de représenter toutes les lignes géodésiques. La construction d'un modèle qui permettrait de constater expérimentalement ces résultats n'offrirait évidemment aucune difficulté.

Enfin, si l'on projette la ligne géodésique sur son plan de symétrie, on trouve, en conservant le même axe des z et en prenant pour axe des x l'intersection du plan de symétrie avec le plan du parallèle maximum, l'équation

$$x = \frac{1}{4}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\ \alpha}\frac{[a^2 + z(\alpha a - z)]a^2\sin^2\ \alpha - \alpha(a^2-z^2)^2}{a(a-z)^2}\ ;$$

la seule partie de cette courbe qu'il convienne de garder est celle qui est contenue à l'intérieur de la courbe méridienne ; il est à peine utile de dire que les deux courbes sont tangentes au point qui correspond au point double de la ligne géodésique.

An interview with Jean-Pierre Serre

© *C. T. Chong and Y. K. Leong*
National University of Singapore

Jean-Pierre Serre was born in 1926 in France. He studied mathematics at the École Normale Supérieure. In 1954, at the age of 28, he was awarded a Fields Medal by the International Mathematical Union, the highest recognition for achievement in mathematics. Two years later he was appointed Professor of Algebra and Geometry at the Collège de France, where for about 15 years he was the youngest professor. He visited the Department of Mathematics, National University of Singapore, from 2 to 15 February 1985. His visit was sponsored by the French-Singapore Academic Exchange Programme. While in Singapore, Professor Serre delivered two lectures on algebraic curves over finite fields and one lecture on the Ramanujan function. He also gave a two-hour seminar talk on Faltings'proof of the Mordell conjecture, and a Colloquium lecture entitled "$\Delta = b^2 - 4ac$" on class numbers of imaginary quadratic fields. On February 14, 1985, he gave an interview in which he discussed various aspects of his mathematical career and his views of mathematics. What follows is a transcript of this interview, edited by C. T. Chong and Y. K. Leong, and revised by J-P. Serre.

Q : What made you take up mathematics as your career ?

J.-P. S. : I remember that I began to like mathematics when I was perhaps 7 or 8. In high school I used to do problems for more advanced classes. I was then in a boarding house in Nîmes, staying with children older than I was, and they used to bully me. So to pacify them, I used to do their mathematics homework. It was as good a training as any.

My mother was a pharmacist (as was my father), and she liked mathematics. When she was a pharmacy student, at the University of Montpellier, she had taken a first-year course in calculus, just for fun, and passed the exam. And she had carefully kept her calculus books (by Fabry and Vogt, if I remember correctly). When I was 14 or 15, I used to look at these books, and study them. This is how I learned about derivatives, integrals, series and such (I did that in a purely formal manner - Euler's style so to speak : I did not like, and did not understand, epsilons and deltas.) At that time, I had no idea one could make a living by being a mathematician. It is only later I discovered one could get paid for doing mathematics! What I thought at first was that I would become a high school teacher, this looked natural to me. Then, when I was 19, I took the competition to enter the École Normale Supérieure, and I succeeded. Once I was at "l'École", it became clear that it was not a high school teacher I wanted to be, but a research mathematician.

Q : Did other subjects ever interest you, subjects like physics or chemistry?

J.-P. S. : Physics not much, but chemistry yes. As I said, my parents were pharmacists, so they had plenty of chemical products and test-tubes. I played with them a lot when I was about 15 or 16 besides doing mathematics. And I read my father's chemistry books (I still have one of them, a fascinating one, "Les Colloides" by Jacques Duclaux.) However, when I learned more chemistry, I got disappointed by its almost mathematical aspect : there are long series of organic compounds like CH_4, C_2H_6, etc, all looking more or less the same. I thought, if you have to have series, you might as well do mathematics! So, I quit chemistry - but not entirely : I ended up marrying a chemist.

Q : Were you influenced by any school teacher in doing mathematics?

J.-P. S. : I had only one very good teacher. This was in my last year in high school (1943-1944), in Nîmes. He was nicknamed "Le Barbu" : beards were rare at the time. He was very clear, and strict; he demanded that every formula and proof be written neatly. And he gave me a thorough training for the mathematics national competition called "Concours Général", where I eventually got first prize.

Speaking of Concours Général, I also tried my hand at the one in physics, the same year (1944). The problem we were asked to solve was based entirely on some physical law I was supposed to know, but did not. Fortunately, only one formula seemed to me possible for that law. I assumed it was correct, and managed to do the whole 6-hour problem on that basis. I even thought I would get a prize. Unfortunately, my formula was wrong, and I got nothing - as I deserved!

Q : How important is inspiration in the discovery of theorems ?

J.-P. S. : I don't know what "inspiration" really means. Theorems, and theories, come up in funny ways. Sometimes, you are just not satisfied with existing proofs, and you look for better ones, which can be applied in different situations. A typical example for me was when I worked on the Riemann-Roch theorem (circa 1953), which I viewed as an "Euler-Poincaré" formula (I did not know then that Kodaira-Spencer had had the same idea.) My first objective was to prove it for algebraic curves - a case which was known for about a century ! But I wanted a proof in a special style ; and when I managed to find it, I remember it did not take me more than a minute or two to go from there to the 2-dimensional case (which had just been done by Kodaira). Six months later, the full result was established by Hirzebruch, and published in his well-known Habilitationsschrift.

Quite often, you don't really try to solve a specific question by a head-on attack. Rather you have some ideas in mind, which you feel should be useful, but you don't know exactly for what they are useful. So, you look around, and try to apply them. It's like having a bunch of keys, and trying them on several doors.

Q : Have you ever had the experience where you found a problem to be impossible to solve, and then after putting it aside for some time, an idea suddenly occured leading to the solution ?

J.-P. S. : Yes, of course this happens quite often. For instance, when I was working on homotopy groups ($\sim$ 1950), I convinced myself that, for a given space X, there should exist a fibre space E, with base X, which is contractible ; such a space would indeed allow me (using Leray's methods) to do lots of computations on homotopy groups and Eilenberg-MacLane cohomology. But how to find it ? It took me several weeks (a very long time, at the age I was then...) to realize that the space of "paths" on X had all the necessary properties - if only I dared call it a "fibre space", which I did. This was the starting point of the loop-space method in algebraic topology, many results followed quickly.

Q : Do you usually work on only one problem at a time or several problems at the same time ?

J.-P. S. : Mostly one problem at a time, but not always. And I work often at night (in half-sleep), where the fact that you don't have to write anything down gives to the mind a much greater concentration, and makes changing topics easier.

Q : In physics, there are a lot of discoveries which were made by accident, like X-rays, cosmic background radiation and so on. Did that happen to you in mathematics ?

J.-P. S. : A genuine accident is rare. But sometimes you get a surprise because some argument you made for one purpose happens to solve a question in a different direction ; however, one can hardly call this an "accident".

Q : What are the central problems in algebraic geometry or number theory ?

J.-P. S. : I can't answer that. You see, some mathematicians have clear and far-ranging "programs". For instance, Grothendieck had such a program for algebraic geometry ; now Langlands has one for representation theory, in relation to modular forms and arithmetic. I never had such a program, not even a small size one. I just work on things which happen to interest me at the moment. (Presently, the topic which amuses me most is counting points on algebraic curves over finite fields. It is a kind of applied mathematics : you try to use any tool in algebraic geometry and number theory that you know of... and you don't quite succeed !)

Q : What would you consider to be the greatest developments in algebraic geometry or number theory within the past five years ?

J.-P. S. : This is easier to answer. Faltings' proof of the Mordell conjecture, and of the Tate conjecture, is the first thing which comes to mind. I would also mention Gross-Zagier's work on the class number problem for quadratic fields (based on a previous theorem of Goldfeld), and Mazur-Wiles theorem on Iwasawa's theory, using modular curves. (The applications of modular curves and modular functions to number theory are especially exciting : you use GL_2 to study GL_1, so to speak ! There is clearly a lot more to come from that direction... maybe even a proof of the Riemann Hypothesis some day) !

Q : Some scientists have done fundamental work in one field and then quickly moved on to another field. You worked for three years in topology, then took up something else. How did this happen ?

J.-P. S. : It was a continuous path, not a discrete change. In 1952, after my thesis on homotopy groups, I went to Princeton, where I lectured on it (and on its continuation : "C-theory"), and attended the celebrated Artin-Tate seminar on class field theory.

Then, I returned to Paris, where the Cartan seminar was discussing functions of several complex variables, and Stein manifolds. It turned out that the recent results of Cartan-Oka could be expressed much more efficiently (and proved in a simpler way) using cohomology and sheaves. This was quite exciting, and I worked for a short while on that topic, making applications of Cartan theory to Stein manifolds. However, a very interesting part of several complex variables is the study of projective varieties (as opposed to affine ones - which are somewhat pathological for a geometer) ; so, I began working on these complex projective varieties, using sheaves : that's how I came to the circle of ideas around Riemann-Roch, in 1953. But projective varieties are algebraic (Chow's theorem), and it is a bit unnatural to study these algebraic objects using analytic functions, which may well have lots of essential singularities. Clearly, rational functions should be enough - and indeed they are. This made me go (around 1954) into "abstract" algebraic geometry, over any algebraically closed field. But why assume the field is algebraically closed ? Finite fields are more exciting, with Weil conjectures and such. And from there to number fields it is a natural enough transition... This is more or less the path I followed.

Another direction of work came from my collaboration (and friendship) with Armand Borel. He told me about Lie groups, which he knows like nobody else. The connections of these groups with topology, algebraic geometry, number theory,... are fascinating. Let me give you just one such example (of which I became aware about 1968) :

Consider the most obvious discrete subgroup of $SL_2(R)$, namely $SL_2(Z)$. One can compute its "Euler-Poincare characteristic" $\xi(\Gamma)$, which turns out to be -1/12 (it is not an integer : this is because Γ has torsion). Now -1/12 happens to be the value $\zeta(-1)$ of Riemann's zeta-function at the point $s = -1$ (a result known already to Euler). And this is not a coincidence! It extends to any totally real number field K, and can be used to study the denominator of $\zeta_k(-1)$. (Better results can be obtained by using modular forms, as was found later.) Such questions are not group theory, nor topology, nor number theory : they are just mathematics.

Q : What are the prospects of achieving some unification of the diverse fields of mathematics ?

J.-P. S. : I would say that this has been achieved already. I have given above a typical example where Lie groups, number theory, etc, come together, and cannot be separated from each other. Let me give you another such example (it would be easy to add many more) :

There is a beautiful theorem proved recently by S. Donaldson on four dimensional compact differentiable manifolds. It states that the quadratic form (on H^2) of such a manifold is severely restricted ; if it is positive definite, it is a sum of squares. And the crux of the proof is to construct some auxiliary manifold (a "cobordism") as the set of solutions of some partial differential equation (non linear, of course) ! This is a completely new application of analysis to differential topology. And what makes it even more remarkable is that, if the differentiability assumption is dropped, the situation becomes quite different : by a theorem of M. Freedman, the H^2-quadratic form can then be almost anything.

Q : How does one keep up with the explosion in mathematical knowledge ?

J.-P. S. : You don't really have to keep up. When you are interested in a specific question, you find that very little of what is being done has any relevance to you ; and if something does have relevance, then you learn it much faster, since you have an application in mind. It is also a good habit to look regularly at Math. Reviews (especially the collected volumes on number theory, group theory, etc). And you learn a lot from your friends, too : it is easier to have a proof explained to you at the blackboard, than to read it.

A more serious problem is the one on the "big theorems" which are both very useful and too long to check (unless you spend on them a sizable part of your lifetime...). A typical example is the Feit-Thompson Theorem : groups of odd order are solvable. (Chevalley once tried to take this as the topic of a seminar, with the idea of giving a complete account of the proof. After two years, he had to give up.) What should one do with such theorems, if one has to use them ? Accept them on faith ? Probably. But it is not a very comfortable situation.

I am also uneasy with some topics, mainly in differential topology, where the author draws a complicated picture (in 2 dimensions), and asks you to accept it as a proof of something taking place in 5 dimensions or more. Only the experts can "see" whether such a proof is correct or not - if you can call this a proof.

Q : What do you think will be the impact of computers on the development of mathematics ?

J.-P. S. : Computers have already done a lot of good in some parts of mathematics. In number theory, for instance, they are used in a variety of ways. First, of course, to suggest conjectures, or questions. But also to check general theorems on numerical examples - which helps a lot with finding possible mistakes.

They are also very useful when there is a large search to be made (for instance, if you have to check 10^6 or 10^7 cases). A notorious example is the proof of the Four-Colour Theorem. There is however a problem there, somewhat similar to the one with Feit-Thompson : such a proof cannot be checked by hand ; you need a computer (and a very subtle program). This is not very comfortable either.

Q : How could we encourage young people to take up mathematics, especially in the schools ?

J.-P. S. : I have a theory on this, which is that one should first *discourage* people from doing mathematics ; there is no need for too many mathematicians. But, if after that, they still insist on doing mathematics, then one should indeed encourage them, and help them.

As for high school students, the main point is to make them understand that mathematics *exists*, that it is not dead (they have a tendency to believe that only physics, or biology, has open questions). The defect in the traditional way of teaching mathematics is that the teacher never mentions these questions. It is a pity. There are many such, for instance in number theory, that teenagers could very well understand : Fermat of course, but also Goldbach, and the existence of infinitely many primes of the form n ?+1. And one should also feel free to state theorems without proving them (for instance Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progressions).

Q : Would you say that the development of mathematics in the past thirty years was faster than that in the previous thirty years ?

J.-P. S. : I am not sure this is true. The style is different. In the 50's and 60's, the emphasis was quite often on general methods : distributions, cohomology and the like. These methods were very sucessful, but nowadays people work on more specific questions (often, some quite old ones : for instance the classification of algebraic curves in 3-dimensional projective space !). They *apply* the tools which were made before ; this is quite nice. (And they also make new tools : microlocal analysis, supervarieties, intersection cohomology...).

Q : In view of this explosion of mathematics, do you think that a beginning graduate student could absorb this large amount of mathematics in four, five, or six years and begin original work immediately after that ?

J.-P. S. : Why not ? For a given problem, you don't need to know that much, usually - and, besides, very simple ideas will often work.

Some theories get simplified. Some just drop out of sight. For instance, in 1949, I remember I was depressed because every issue of the Annals of Mathematics would contain another paper on topology which was more difficult to understand than the previous ones. But nobody looks at these papers any more ; they are forgotten (and deservedly so : I don't think they contained anything deep...). Forgetting is a very healthy activity.

Still, it is true that some topics need much more training than some others, because of the heavy technique which is used. Algebraic geometry is such a case ; and also representation theory.

Anyway, it is not obvious that one should say "I am going to work in algebraic geometry", or anything like that. For some people, it is better to just follow seminars, read things, and ask questions to oneself ; and then learn the amount of theory which is needed for these questions.

Q : In other words, one should aim at a problem first and then learn whatever tools that are necessary for the problem.

J.-P. S. : Something like that. But since I know I cannot give good advice to myself, I should not give advice to others. I don't have a ready-made technique for working.

Q : You mentioned papers which have been forgotten. What percentage of the papers published do you think will survive ?

J.-P. S. : A non-zero percentage, I believe. After all, we still read with pleasure papers by Hurwitz, or Eisenstein, or even Gauss.

Q : Do you think that you will ever be interested in the history of mathematics ?

J.-P. S. : I am already interested. But it is not easy ; I do not have the linguistic ability in Latin or Greek, for instance. And I can see that it takes more time to write a paper on the history of mathematics than in mathematics itself. Still, history is very interesting ; it puts things in the proper perspective.

Q : Do you believe in the classification of finite simple groups ?

J.-P. S. : More or less - and rather more than less. I would be amused if a new sporadic group were discovered, but I am afraid this will not happen.

More seriously, this classification theorem is a splendid thing. One may now check many properties by just going through the list of all groups (typical example : the classification of n-transitive groups, for n ≥ 4).

Q : What do you think of life after the classification of finite simple groups ?

J.-P. S. : You are alluding to the fact that some finite group theorists were demoralized by the classification ; they said (or so I was told) “there will be nothing more to do after that”. I find this ridiculous. Of course there would be plenty to do ! First, of course, simplifying the proof (that’s what Gorenstein calls “revisionism”). But also finding applications to other parts of mathematics ; for instance, there have been very curious discoveries relating the Griess-Fischer monster group to modular forms (the so-called “Moonshine”).

It is just like asking whether Faltings’ proof of the Mordell conjecture killed the theory of rational points on curves. No ! It is merely a starting point. Many questions remain open.

(Still, it is true that sometimes a theory can be killed. A well-known example is Hilbert’s fifth problem : to prove that every locally euclidean topological group is a Lie group. When I was a young topologist, that was the problem I really wanted to solve - but I could get nowhere. It was Gleason, and Montgomery-Zippin, who solved it, and their solution all but killed the problem. What else is there to find in this direction ? I can only think of one question : can the group of p-adic integers act effectively on a manifold ? This seems quite hard - but a solution would have no application whatsoever, as far as I can see.)

Q : But one would assume that most problems in mathematics are like these, namely that the problems themselves may be difficult and challenging, but after their solution they become useless. In fact there are very few problems like the Riemann Hypothesis where even before its solution, people already know many of its consequences.

J.-P. S. : Yes, the Riemann Hypothesis is a very nice case : it implies lots of things (including purely numerical inequalities, for instance on discriminants of number fields). But there are other such examples : Hironaka’s desingularization theorem is one ; and of course also the classification of finite simple groups we discussed before.

Sometimes, it is the method used in the proof which has lots of applications : I am confident this will happen with Faltings. And sometimes, it is true, the problems are not meant to have applications ; they are a kind of test on the existing theories ; they force us to look further.

Q : Do you still go back to problems in topology ?

J.-P. S. : No. I have not kept track of the recent techniques, and I don't know the latest computations of the homotopy groups of spheres $\pi_{n+k}(S_n)$ (I guess people have reached up to k = 40 or 50. I used to know them up to k = 10 or so.).

But I still use ideas from topology in a broad sense, such as cohomology, obstructions, Stiefel-Whitney classes, etc.

Q : What has been the influence of Bourbaki on mathematics ?

J.-P. S. : A very good one. I know it is fashionable to blame Bourbaki for everything ("New Math" for instance), but this is unfair. Bourbaki is not responsible. People just misused his books ; they were never meant for university teaching, even less high school teaching.

Q : Maybe a warning sign should have been given ?

J.-P. S. : Such a sign was indeed given by Bourbaki : it is the Seminaire Bourbaki. The seminaire is not at all formal like the books ; it includes all sorts of mathematics, and even some physics. If you combine the seminaire and the books, you get a much more balanced view.

Q : Do you see a decreasing influence of Bourbaki on mathematics ?

J.-P. S. : The influence is different from what it was. Forty years ago, Bourbaki had a point to make ; he had to prove that an organized and systematic account of mathematics was possible. Now the point is made and Bourbaki has won. As a consequence, his books now have only technical interest ; the question is just whether they give a good exposition of the topic they are on. Sometimes they do (the one on "root systems" has become standard reference in the field) ; sometimes they don't (I won't give an example : it is too much a matter of taste).

Q : Speaking of taste, can you say what kind of style (for books, or papers), you like most ?

J.-P. S. : Precision combined with informality ! That is the ideal, just as it is for lectures. You find this happy blend in authors like Atiyah or Milnor, and a few others. But it is hard to achieve. For instance, I find many of the French (myself included) a bit too formal, and some of the Russians a bit too imprecise...

A further point I want to make is that papers should include more side remarks, open questions, and such. Very often, these are more interesting than the theorems actually proved. Alas, most people are afraid to admit that they don't know the answer to some question, and as a consequence they refrain from mentioning the question, even if it is a very natural one. What a pity ! As for myself, I enjoy saying "I do not know".

Un entretien avec Jean-Pierre Serre

© *C. T. Chong and Y. K. Leong*
Université nationale de Singapour

Jean-Pierre Serre est né en 1926 en France. Il a étudié les mathématiques à l'École Normale Supérieure. En 1954, à l'âge de 28 ans, il a été récompensé en recevant la médaille Fields de l'Union mathématique internationale, la reconnaissance la plus haute de réalisations en mathématiques. Deux ans plus tard, il est devenu Professeur de la Chaire d'Algèbre et Géométrie au Collège de France, dont il a été pendant environ 15 ans le plus jeune professeur. Il a été visiteur du département de mathématiques de l'Université de Singapour, du 2 au 15 février 1985. Sa visite a été financée par le programme d'échange académique franco-singapourien. Pendant son séjour à Singapour, le Professeur Serre a donné deux conférences au sujet des courbes algébriques sur les corps finis et une conférence au sujet de la fonction de Ramanujan. Il a également donné un exposé de séminaire sur la preuve par Faltings de la conjecture de Mordell, et un exposé de Colloquium intitulé "$\Delta = b^2 - 4ac$" sur les nombres de classes de corps quadratiques imaginaires. Le 14 février 1985, il a donné une interview dans laquelle il a discuté de divers aspects de sa carrière mathématique et de sa vision des mathématiques. Ce qui suit est une transcription de cette interview par C. T. Chong et Y. K. Leong, et révisée par J-P. Serre.

Q : Qu'est-ce qui vous a fait choisir le métier de mathématicien ?

J.-P. S. : Je me rappelle avoir commencé à aimer les mathématiques quand j'avais peut-être 7 ou 8 ans. Au lycée, j'avais l'habitude de faire les problèmes des classes supérieures. J'étais en pension à Nîmes, avec des enfants plus vieux que moi, et ils avaient l'habitude de m'intimider. Alors pour les calmer, je faisais leurs devoirs. C'était un entraînement comme un autre.

Ma mère était pharmacienne (comme mon père), et elle aimait les mathématiques. Quand elle était étudiante en pharmacie, à l'Université de Montpellier, elle avait suivi un cours de première année en calcul, juste pour le plaisir, et elle avait passé l'examen. Et elle avait soigneusement conservé ses livres de calcul (par Fabry et Vogt, si je me souviens bien). Quand j'avais 14 ou

15 ans, j'avais l'habitude de lire ces livres, et de les étudier. C'est comme ça que j'ai appris les dérivées, les intégrales, les séries et ainsi (je l'ai fait de manière purement formelle - dans le style d'Euler pour ainsi dire : je n'aimais pas, et je ne comprenais pas, les epsilons et les deltas). À ce moment-là, il ne me venait pas à l'esprit qu'on puisse vivre en étant mathématicien. Ce n'est que plus tard que j'ai découvert qu'on pouvait être payé pour faire des mathématiques ! Ce que je pensais initialement, c'est que je pourrais devenir professeur de lycée, cela me paraissait naturel. Alors, quand j'ai eu 19 ans, j'ai passé le concours pour entrer à l'École Normale Supérieure, et je l'ai réussi. Une fois que j'étais à "l'École", il devint clair que ça n'était pas professeur de lycée que je souhaitais être, mais chercheur en mathématiques.

Q : Est-ce que d'autres sujets vous intéressaient, comme la physique ou la chimie ?

J.-P. S. : La physique pas tant que ça, mais la chimie, si. Comme je l'ai dit, mes parents étaient pharmaciens, et donc ils avaient plein de produits chimiques et de tubes à essais. Je jouais beaucoup avec quand j'avais environ 15 ou 16 ans, en plus de faire des mathématiques. Et je lisais les livres de chimie de mon père (j'ai toujours l'un d'eux, un livre fascinant, "Les Colloides" de Jacques Duclaux.) Pourtant, quand j'ai appris plus de chimie, j'ai été déçu par son aspect presque mathématique : il y a de longues séries de composés organiques comme CH_4, C_2H_6, etc, tous se ressemblant plus ou moins. J'ai pensé, quitte à avoir des séries, tu ferais aussi bien de faire des mathématiques ! Alors j'ai quitté la chimie - mais pas complètement : j'ai fini par épouser une chimiste.

Q : Avez-vous été influencé par un professeur d'école pour faire des mathématiques ?

J.-P. S. : J'ai eu seulement un très bon professeur. C'était pendant ma dernière année de lycée (1943-1944), à Nîmes. Il était surnommé "Le Barbu" : les barbes étaient rares à cette époque. Il était très clair, et strict ; il exigeait que toute formule et démonstration soit écrite soigneusement. Et il m'a prodigué un entraînement approfondi pour le concours national de mathématiques qu'on appelle le "Concours Général", où j'ai finalement obtenu le premier prix.

En parlant du Concours Général, j'ai aussi tenté ma chance à celui de physique, la même année (1944). Le problème qu'on nous a demandé de résoudre était entièrement basé sur une loi physique que j'étais supposé connaître mais ce n'était pas le cas. Heureusement, seule une formule semblait possible pour cette loi. J'ai supposé qu'elle était correcte, et j'ai réussi à faire la totalité du problème de 6 heures sur cette base. Je pensais même que j'aurais un prix. Malheureusement, ma formule était fausse, et je n'ai rien obtenu - comme je le méritais !

Q : Quelle est l'importance de l'inspiration dans la découverte des théorèmes ?

J.-P. S. : Je ne sais pas vraiment ce que veut dire l'"inspiration". Les théorèmes, et les théories, naissent de manière marrante. Parfois, tu es juste insatisfait par les preuves existantes, et tu en cherches de meilleures, qui peuvent être appliquées dans des situations différentes. Un exemple typique pour moi a été quand je travaillais sur le théorème de Riemann-Roch (aux alentours de 1953), que je voyais comme une formule d'"Euler-Poincaré" (je ne savais pas que Kodaira-Spencer avaient eu la même idée.) Mon premier objectif était de le prouver pour les courbes algébriques - un cas qui était connu depuis environ un siècle ! Mais je voulais une preuve d'un style spécial ; et quand j'ai réussi à la trouver, je me rappelle que cela ne m'a pas pris plus d'une ou deux minutes pour passer de là au cas 2-dimensionnel (qui avait juste été fait par Kodaira). Six mois plus tard, le résultat complet a été établi par Hirzebruch, et a été publié dans son fameux Habilitationsschrift.

Assez souvent, vous n'essayez pas vraiment de résoudre une question particulière par une attaque frontale. Vous avez plutôt quelques idées en tête, dont vous pensez qu'elles devraient être utiles, mais vous ne savez pas exactement pour quoi elles sont utiles. Alors vous regardez autour et vous essayez de les appliquer. C'est un peu comme avoir un trousseau de clefs, et les essayer sur différentes portes.

Q : Avez-vous déjà expérimenté le fait de trouver un probème impossible à résoudre, et alors, après l'avoir laissé de côté quelques temps, une idée a soudainement surgi amenant à la solution ?

J.-P. S. : Oui, bien sûr, cela arrive assez souvent. Par exemple, quand je travaillais sur les groupes d'homotopie ($\sim$ 1950), je m'étais persuadé que, pour un espace donné X, il devrait exister un espace fibré E, de base X, qui est contractible ; un tel espace devrait en effet me permettre (en utilisant les méthodes de Leray) de faire de nombreux calculs sur les groupes d'homotopie et la cohomologie d'Eilenberg-McLane.

Mais comment le trouver ? Cela m'a pris plusieurs semaines (un très long temps, à l'âge que j'avais alors...) pour réaliser que l'espace des "chemins" sur X avait toutes les propriétés nécessaires - si seulement j'osais appeler cela un "espace fibré", ce que je fis. Ça a été le point de départ de la méthode d'espace-boucle en topologie algébrique, de nombreux résultats s'en sont ensuivis.

Q : Avez-vous l'habitude de travailler sur un seul problème à la fois ou sur plusieurs problèmes à la fois ?

J.-P. S. : La plupart du temps, sur un problème à la fois, mais pas toujours. Et je travaille souvent la nuit (dans un demi-sommeil), où le fait que vous ne deviez pas écrire quoi que ce soit donne à l'esprit une bien plus grande concentration, et fait changer de sujet plus facilement.

Q : En physique, il y a de nombreuses découvertes qui ont été faites par accident, comme les rayons X, la radiation du fond cosmologique, etc. Cela vous est-il arrivé en mathématiques ?

J.-P. S. : Un véritable accident est rare. Mais parfois, vous obtenez des surprises parce qu'un argument que vous avez fourni dans un certain but s'avère répondre à une question dans une autre direction ; pourtant, vous pouvez difficilement appeler cela un "accident".

Q : Quels sont les problèmes centraux en géométrie algébrique et en théorie des nombres ?

J.-P. S. : Je ne peux répondre à cela. Vous savez, quelques mathématiciens ont des "programmes" clairs et à long terme. Par exemple, Grothendieck avait un tel programme pour la géométrie algébrique ; maintenant Langlands en a un pour la théorie de la représentation, en relation avec les formes modulaires et l'arithmétique. Je n'ai jamais eu un tel programme, même pas un petit programme. Je ne travaille que sur des choses qui arrivent à m'intéresser à un moment. (En ce moment, le sujet qui m'amuse le plus est de compter des points sur des courbes algébriques sur les corps finis. Ce sont en quelque sorte des mathématiques appliquées : vous essayez d'utiliser tous les outils de géométrie algébrique et de théorie des nombres que vous connaissez... et vous ne réussissez pas tout à fait !).

Q : Que considéreriez-vous comme les plus grands développements en géométrie algébrique ou en théorie des nombres dans les cinq dernières années ?

J.-P. S. : Il est plus facile de répondre à cela. La preuve de Faltings de la conjecture de Mordell, et de la conjecture de Tate, est la première chose qui vient à l'esprit. Je mentionnerais également le travail de Gross-Zagier sur le problème du nombre de classes pour les corps quadratiques (basé sur un théorème précédent de Goldfeld), et le théorème de Mazur-Wiles sur la théorie d'Iwasawa, en utilisant les courbes modulaires. (Les applications des courbes modulaires et des fonctions modulaires à la théorie des nombres est particulièrement stimulante : vous utilisez GL_2 pour étudier GL_1, pour ainsi dire ! Il y a clairement beaucoup à venir de cette direction... peut-être même une preuve de l'Hypothèse de Riemann un jour) !

Q : Certains scientifiques ont fait un travail fondamental dans un domaine et ensuite se tournent rapidement vers un autre domaine. Vous avez travaillé trois années durant en topologie, et ensuite avez travaillé sur autre chose. Comment cela s'est-il produit ?

J.-P. S. : C'était un chemin continu, non pas un changement discret. En 1952, après ma thèse sur les groupes d'homotopie, je suis allé à Princeton, où j'ai donné une conférence à ce sujet (et sur son prolongement : la "C-théorie"), et j'ai assisté au célèbre séminaire Artin-Tate sur la théorie des corps de classes.

Alors, je suis retourné à Paris, où le séminaire Cartan traitait des fonctions de plusieurs variables complexes, et des variétés de Stein. Il se trouva que les résultats récents de Cartan-Oka pouvaient être exprimés beaucoup plus efficacement (et prouvés d'une façon plus simple) en utilisant la cohomologie et les faisceaux. C'était assez excitant, et j'ai travaillé sur ce sujet pendant quelques temps, en appliquant la théorie de Cartan aux variétés de Stein.

Pourtant, une partie très intéressante des fonctions à plusieurs variables complexes est l'étude des variétés projectives (par opposition aux variétés affines - qui sont en quelque sorte pathologiques pour un géomètre) ; alors, j'ai commencé à travailler sur les variétés projectives complexes, en utilisant des faisceaux : voilà comment je suis arrivé au cercle d'idées entourant Riemann-Roch, en 1953. Mais les variétés projectives sont algébriques (théorème de Chow), et ce n'est pas très naturel d'étudier ces objets algébriques en utilisant des fonctions analytiques, qui peuvent aussi bien avoir beaucoup de singularités essentielles. Évidemment, les fonctions rationnelles devraient suffire - et en effet, elles le font. Cela m'a amené (vers 1954) à la géométrie algébrique "abstraite", sur tout corps algébriquement clos. Mais pourquoi supposer que le corps est algébriquement clos ? Les corps finis sont plus excitants, avec les conjectures de Weil et tout ça. Et de là aux corps de nombres, la transition est assez naturelle... Voilà plus ou moins le chemin que j'ai suivi.

Une autre direction de travail est venu de ma collaboration (et de mon amitié) avec Armand Borel. Il m'a enseigné les groupes de Lie, qu'il connaissait comme nul autre. Les connexions entre ces groupes et la topologie, la géométrie algébrique, la théorie des nombres... sont fascinantes. Laissez-moi vous donner juste un tel exemple (dont j'ai pris conscience vers 1968) :

Considérons le sous-groupe discret le plus évident de $SL_2(R)$, c'est-à-dire $SL_2(Z)$. On peut calculer sa "caractéristique d'Euler-Poincare" $\xi(\Gamma)$, qui s'avère être -1/12 (ce n'est pas un entier : cela est dû au fait que Γ a une torsion). Maintenant -1/12 se trouve être la valeur de $\zeta(-1)$ de la fonction zeta de Riemann au point $s = -1$ (un résultat déjà connu d'Euler). Et ce n'est pas une coïncidence ! Cela s'étend à n'importe quel corps de nombres totalement réels K, et cela peut être utilisé pour étudier le dénominateur de $\zeta_k(-1)$. (De meilleurs résultats peuvent être obtenus en utilisant les formes modulaires, comme cela a été trouvé plus tard). De telles questions ne relèvent ni de la théorie des groupes, ni de la topologie, ni de la théorie des nombres : ce sont juste des mathématiques.

Q : Quelles sont les perspectives de réaliser une certaine unification de plusieurs domaines des mathématiques ?

J.-P. S. : Je dirais que cela a déjà été réalisé. J'ai donné tout à l'heure des exemples typiques où les groupes de Lie, la théorie des nombres, etc, viennent ensemble, et ne peuvent pas être séparés les uns des autres. Laissez-moi vous donner un autre tel exemple (et il serait aisé d'en ajouter bien d'autres) :

Il y a un beau théorème prouvé récemment par S. Donaldson sur les variétés compactes différentiables 4-dimensionnelles. Le théorème montre que la forme quadratique (sur H^2) d'une telle variété est sévèrement restreinte ; elle est définie positive, c'est une somme de carrés. Et le nœud de la preuve consiste à construire une variété auxiliaire (un "cobordisme") comme l'ensemble des solutions d'une équation différentielle partielle (non linéaire, bien sûr) ! C'est une application complètement nouvelle de l'analyse à la topologie différentielle. Et ce qui rend cela encore plus remarquable, c'est que, si l'on retire la supposition de la différentiabilité, la situation devient assez différente : par un théorème de M. Freedman, la forme H^2-quadratique peut être alors presque quelconque.

Q : Comment peut-on continuer à suivre, avec l'explosion du savoir mathématique ?

J.-P. S. : Vous n'avez pas vraiment besoin de suivre. Quand vous êtes intéressé par une question précise, vous trouvez que très peu de ce qui a déjà été fait n'est vraiment pertinent pour vous ; et si quelque chose est connexe, alors vous l'apprenez d'autant plus rapidement que vous avez une application à l'esprit. C'est aussi une bonne habitude de regarder régulièrement les Math. Reviews (spécialement les collections de volumes concernant la théorie des nombres, la théorie des groupes, etc). Et vous apprenez beaucoup de vos amis, aussi : il est plus simple de saisir une preuve qui vous est expliquée au tableau que de la lire.

Un problème plus sérieux concerne les "gros théorèmes" qui sont à la fois très utiles, mais également trop longs à vérifier (à moins que vous ne dépensiez à cela une part considérable de votre temps de vie...). Un exemple typique est le théorème de Feit-Thompson : les groupes d'ordre impair sont résolubles. (Chevalley une fois a essayé de prendre ce problème comme sujet d'un séminaire, avec l'idée d'en donner un compte-rendu complet de la preuve. Après deux ans, il a dû abandonner.). Que devrait-on faire avec de tels théorèmes, si quelqu'un doit les utiliser ? Les croire par la foi ? Probablement. Mais ce n'est pas une situation très confortable.

Je suis aussi mal à l'aise avec certains sujets, principalement en topologie différentielle, où l'auteur dessine un dessin compliqué (en 2 dimensions), et vous demande de l'accepter comme preuve de quelque chose ayant lieu en 5 dimensions ou plus. Seuls les experts peuvent "voir" si une telle preuve est correcte ou pas - si vous pouvez appeler cela une preuve.

Q : Quel sera selon vous l'impact des ordinateurs sur le développement des mathématiques ?

J.-P. S. : Les ordinateurs ont déjà fait beaucoup de bien dans certaines parties des mathématiques. En théorie des nombres, par exemple, ils sont utilisés de nombreuses manières différentes. D'abord, bien sûr, pour suggérer des conjectures, ou des questions. Mais également pour tester des théorèmes généraux sur des exemples numériques - ce qui aide beaucoup à trouver des erreurs possibles.

Ils sont aussi très utiles lorsqu'une grande recherche doit être menée (par exemple, si vous devez tester 10^6 ou 10^7 cas). Un exemple célèbre est la preuve du théorème des quatre couleurs. Il y a cependant un problème là, quelque chose de similaire à celui avec Feit-Thompson : une telle preuve ne peut pas être vérifiée à la main ; vous avez besoin d'un ordinateur (et d'un programme très subtil). Ce n'est pas très confortable non plus.

Q : Comment encourageriez-vous des jeunes gens à faire des mathématiques, spécialement à l'école ?

J.-P. S. : J'ai une théorie là-dessus, qui est que dans un premier temps, vous devriez plutôt les *décourager* de faire des mathématiques ; il n'y a pas besoin de trop de mathématiciens. Mais si, après cela, ils continuent d'insister pour faire des mathématiques, alors vous devriez plutôt les encourager, et les aider.

Comme pour les étudiants de lycée, le point principal est de leur faire comprendre que les mathématiques *existent*, qu'elles ne sont pas mortes (ils ont tendance à croire qu'il n'y a des questions ouvertes qu'en physique, ou en biologie). Le problème dans la façon traditionnelle d'enseigner les mathématiques est que le professeur ne mentionne jamais ces questions. C'est dommage. Il y en a tant, par exemple en théorie des nombres, que les adolescents pourraient très bien comprendre : Fermat bien sûr, mais également Goldbach, et l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme n^2+1. Et on devrait également se sentir libre d'énoncer des théorèmes sans les prouver (par exemple, le théorème de Dirichlet sur les nombres premiers dans les progressions arithmétiques).

Q : Diriez-vous que le développement des mathématiques dans les trente dernières années a été plus rapide que dans les trente années qui avaient précédé ?

J.-P. S. : Je ne crois pas que ça soit vrai. Le style est différent. Dans les années 50 et 60, l'accent était mis assez souvent sur les méthodes générales : distributions, cohomologie, et ce genre de choses. Ces méthodes rencontraient de nombreux succès, mais de nos jours, les personnes travaillent sur des questions plus spécifiques (souvent, sur des questions assez anciennes : par exemple, la classification des courbes algébriques dans l'espace projectif 3-dimensionnel !). Ils *appliquent* les outils qui ont été fabriqués précédemment ; c'est assez joli. (Et ils inventent aussi de nouveaux outils : l'analyse microlocale, les super-variétés, la cohomologie de l'intersection...).

Q : Au vu de cette explosion des mathématiques, pensez-vous qu'un étudiant de premier cycle pourrait absorber cette grande quantité de mathématiques en quatre, cinq, ou six ans et commencer un travail original immédiatement après cela ?

J.-P. S. : Pourquoi pas ? Pour un problème donné, vous n'avez pas besoin d'en savoir à ce point-là, habituellement - et en outre, des idées très simples marcheront souvent.

Certaines théories se simplifient. D'autres disparaissent carrément. Par exemple, en 1949, je me rappelle que j'étais déprimé parce qu'aucun numéro des Annals of Mathematics ne contiendrait d'autre papier sur la topologie qui soit plus difficile que les précédents. Mais personne ne regardent plus ces papiers ; ils sont oubliés (et heureusement que c'est le cas : je ne pense pas qu'ils contiennent quoi que ce soit de profond...). L'oubli est une activité très salutaire.

Et encore, il est vrai que certains sujets nécessitent plus d'entraînement que d'autres, parce qu'ils utilisent beaucoup de technique lourde. La géométrie algébrique est un tel cas ; et également la théorie de la représentation.

En tout cas, il n'est pas évident que quelqu'un ait à dire "Je vais travailler en géométrie algébrique", ou quelque chose comme ça. Pour certaines personnes, c'est mieux qu'elles suivent juste des séminaires, qu'elles lisent des articles, et qu'elles se posent des questions ; et qu'elles lisent la quantité de théorie nécessaire pour ces questions.

Q : En d'autres termes, on devrait se focaliser d'abord sur un problème, et ensuite apprendre les outils qui sont nécessaires pour ce problème.

J.-P. S. : Quelque chose comme ça. Mais puisque je sais que je ne peux pas me donner de conseils à moi-même, je ne devrais pas en donner aux autres. Je n'ai pas de technique clef-en-main pour travailler.

Q : Vous avez mentionné des articles qui ont été oubliés. Quel pourcentage des articles publiés survivront d'après vous ?

J.-P. S. : Un pourcentage non nul, je crois. Après tout, nous relisons encore avec plaisir des articles de Hurwitz, ou d'Eisenstein, ou même de Gauss.

Q : Pensez-vous que vous serez jamais intéressé par l'histoire des mathématiques ?

J.-P. S. : Je suis déjà intéressé. Mais ça n'est pas facile ; je n'ai pas les compétences linguistiques en Latin ou Grec, par exemple. Et je peux constater que cela prend plus de temps d'écrire un article d'histoire des mathématiques qu'un article de mathématiques. De plus, l'histoire est très intéressante ; cela met les choses dans la bonne perspective.

Q : Croyez-vous en la classification des groupes finis simples ?

J.-P. S. : Plus ou moins - et plutôt plus que moins. Cela m'amuserait qu'un nouveau groupe sporadique soit découvert, mais je crains que cela n'arrive pas.

Plus sérieusement, ce théorème de classification est une chose splendide. On peut maintenant vérifier de nombreuses propriétés simplement en parcourant la liste de tous les groupes (un exemple typique : la classification des groupes

n-transitifs, pour n ≥ 4).

Q : Que pensez-vous de la vie après la classification des groupes finis simples ?

J.-P. S. : Vous faites allusion au fait que certains théoriciens des groupes finis étaient démoralisés par la classification ; ils disaient (ou c'est ce qu'on m'a dit) "Il n'y aura plus rien à faire après ça". Je trouve cela ridicule. Bien sûr qu'il y aura encore plein de choses à faire ! D'abord, bien sûr, simplifier la preuve (c'est ce que Gorenstein appelle le "révisionnisme"). Mais également trouver des applications à d'autres parties des mathématiques ; par exemple, il y a eu des découvertes très curieuses reliant le groupe monstre de Griess-Fischer aux formes modulaires (le dénommé "Moonshine").

C'est exactement pareil que si on demandait si la preuve par Faltings de la conjecture de Mordell a tué la théorie des points rationnels sur les courbes. Non ! C'est seulement un point de départ. De nombreuses questions restent ouvertes.

(Cependant, il est vrai que parfois, une théorie peut être tuée. Un exemple bien connu est le quinzième problème de Hilbert : pour prouver que tout groupe topologique localement euclidien est un groupe de Lie. Quand j'étais un jeune topologue, c'était le problème que je voulais vraiment résoudre - mais je n'ai pu aller nulle part. C'est Gleason, et Montgomery-Zippin, qui l'ont résolu, et leur solution n'a absolument pas tué le problème. Que peut-on trouver d'autre dans cette direction ? Je ne peux penser qu'à une question : le groupe des entiers p-adiques agit-il effectivement sur une variété ? Cela semble assez difficile - mais une solution n'aurait pas d'application en quoi que ce soit, aussi loin que je puisse en juger.)

Q : Mais on pourrait supposer que la plupart des problèmes en mathématiques sont comme ceux-là, c'est-à-dire que les problèmes en eux-mêmes peuvent être difficiles et stimulants, mais qu'après qu'ils aient été résolus, ils deviennent inutiles. En fait, il y a très peu de problèmes comme l'hypothèse de Riemann pour lesquels même avant leur résolution, les gens connaissent déjà beaucoup de ses conséquences.

J.-P. S. : Oui, l'hypothèse de Riemann est un très beau cas : elle implique beaucoup de choses (incluant des inégalités purement numériques, par exemple sur les discriminants des corps de nombres). Mais il y a d'autres tels exemples : le théorème de désingularisation d'Hironaka en est un ; et bien sûr également la classification des groupes finis simples dont nous avons discuté précédemment.

Parfois, c'est la méthode utilisée dans la preuve qui a de nombreuses applications : je suis confiant dans le fait que c'est ce qui se produira avec Faltings. Et parfois, c'est vrai, les problèmes ne sont pas censés avoir des applications ; ils sont une sorte de test des théories existantes ; ils nous forcent à chercher davantage.

Q : Revenez-vous à des problèmes en topologie ?

J.-P. S. : Non. Je n'ai pas gardé trace des techniques récentes, et je ne connais pas les derniers calculs de groupes d'homotophie des sphères $\pi_{n+k}(S_n)$ (je subodore que les gens ont dû atteindre $k = 40$ ou 50. Je les connaissais avant jusqu'à $k = 10$ ou à peu près.).

Mais je continue d'utiliser des idées de topologie au sens large, telles que la cohomologie, les obstructions, les classes Stiefel-Whitney, etc.

Q : Quelle a été l'influence de Bourbaki sur les mathématiques ?

J.-P. S. : Une très bonne influence. Je sais que c'est tendance de tout reprocher à Bourbaki (les "Maths modernes" par exemple), mais ceci est injuste. Bourbaki n'est pas responsable. Les gens ont juste mal utilisé ses livres ; ils n'étaient pas destinés à l'enseignement universitaire, même pas à l'enseignement en lycée.

Q : Peut-être que cela aurait dû être signifié ?

J.-P. S. : Un tel signe a en effet été donné par Bourbaki : c'est le Séminaire Bourbaki. Le Séminaire n'est pas aussi formel que les livres ; il inclut toutes sortes de mathématiques, et même de la physique. Si vous combinez le Séminaire et les livres, vous obtenez une vision plus équilibrée.

Q : Voyez-vous un déclin de l'influence de Bourbaki sur les mathématiques ?

J.-P. S. : L'influence est différente de ce qu'elle était. Il y a quarante ans, Bourbaki avait une mission ; il devait prouver qu'un compte-rendu organisé et systématique des mathématiques était possible. Maintenant cette mission a été remplie et Bourbaki a gagné. Comme conséquence, ses livres ont maintenant seulement un intérêt technique ; la question est juste de savoir s'ils donnent une bonne exposition du sujet qu'ils concernent. Parfois, ils le font (celui sur les “systèmes de racines” est devenu une référence standard dans le domaine) ; parfois, ils échouent à le faire (je ne donnerai pas d'exemple : c'est trop une affaire de goût).

Q : En parlant de goût, pouvez-vous dire quel sorte de style (pour les livres, ou les articles), vous aimez le plus ?

J.-P. S. : La précision combinée au côté informel ! C'est l'idéal, comme ça l'est pour les exposés. Vous trouvez cet heureux mélange chez des auteurs comme Atiyah ou Milnor, et quelques autres. Mais c'est difficile à obtenir. Par exemple, je trouve les français (moi inclus) un peu trop formels, et quelques russes trop imprécis...

Un point supplémentaire que je voudrais ajouter est que les articles devraient inclure davantage de remarques annexes, de questions ouvertes, et autres. Très souvent, elles sont plus intéressantes que les théorèmes effectivement démontrés. Hélas, la plupart des personnes ont peur d'admettre qu'elles n'ont pas la réponse à une question, et par conséquent, elles omettent de mentionner la question même si c'est une question naturelle. Quel dommage ! En ce qui me concerne, j'aime dire “je ne sais pas”.

Une interview de Jean-Pierre Serre

par Martin Raussen et Christian Skau
Sociétés norvégienne et danoise de mathématiques

Le 3 juin 2003, Jean-Pierre Serre a reçu des mains du roi Harald de Norvège le premier Prix Abel, destiné à récompenser d'éminents mathématiciens et, à travers eux, à attirer l'attention - en particulier des jeunes - sur les mathématiques.

La Newsletter *de l'*"European Mathematical Society" *de septembre 2003 consacre plusieurs pages à cet événement et publie une interview en anglais de Jean-Pierre Serre. Nous proposons à nos lecteurs une traduction*[1] *de cet entretien, réalisé le 2 juin 2003 à Oslo par Martin Raussen et Christian Skau sous l'égide des Sociétés norvégienne et danoise de mathématiques, qui l'ont publié dans leur* Newsletter*.*

De très nombreux autres périodiques ont commenté la nomination de Jean-Pierre Serre. Pour rester dans la langue francaise, on trouvera dans SMP (périodique d'informations générales scientifiques publié par le CNRS) un article très agréable de Maurice Mashaal.

Topologie

Martin Raussen et Christian Skau : Tout d'abord, permettez-nous de vous féliciter d'être le premier lauréat du prix Abel. Vous avez commencé votre carrière par une thèse consacrée à la topologie algébrique. C'était à l'époque, en France tout au moins, une discipline très neuve, et pas l'une des plus répandues. Pourquoi avoir choisi ce sujet ?

Jean-Pierre Serre : Je participais alors au séminaire Cartan de topologie algébrique. Mais Cartan ne proposait pas de sujet de recherche à ses étudiants : ils devaient s'en choisir un, après quoi il les aidait. C'est ce qui m'est arrivé. Je me suis aperçu que la théorie de Leray (sur les fibrés et leurs suites spectrales) pouvait s'appliquer à bien plus de situations qu'on ne le

Référence de l'article : RMS, Volume 114, n° 3 (2003-2004).

1. Traduit de l'anglais par Bernard Randé.

pensait et que, convenablement étendue, elle pourrait être utilisée pour calculer des groupes d'homotopie.

M. R. ET C. S. : Je crois que l'on peut à juste titre affirmer que les méthodes et les résultats de votre thèse ont révolutionné l'homotopie et lui ont donné sa forme moderne.

J.-P. S. : Ils ont certainement ouvert de nombreuses voies. Avant cette thèse, les groupes d'homotopie des sphères étaient presque complètement *terra incognita* ; on ne savait même pas qu'ils étaient de type fini ! Un aspect intéressant de la méthode que j'ai introduite était son caractère algébrique. En particulier, elle permettait des calculs locaux, au sens de la localisation en théorie des nombres, relativement à un nombre premier fixé.

M. R. ET C. S. : J'ai entendu dire que l'un des points cruciaux dans cette affaire était de définir quelque chose qui ressemblait à un fibré sans en être un exactement.

J.-P. S. : Il est vrai que, pour appliquer la théorie de Leray, j'ai eu besoin de construire des espaces fibrés qui ne répondaient pas à la définition standard. De façon plus précise, j'avais besoin d'associer à chaque espace X un espace E fibré sur X dont l'homotopie soit triviale (par exemple un espace contractile). Mais comment ? Une nuit de 1950, dans le train, au retour de nos grandes vacances, j'ai vu la solution en un éclair : on prend pour E l'espace des chemins de X, d'origine fixée, la projection étant alors l'application d'évaluation qui à un chemin associe son extrémité. La fibre n'est autre que l'espace des lacets. Sans aucun doute, c'était bien ça ! J'en ai réveillé ma femme pour lui en parler... (Bien entendu, il me restait à montrer que la projection en question méritait d'être appelée fibration, et que l'on pouvait lui appliquer la théorie de Leray. Un travail technique, certes, mais pas si facile.) Il est étrange qu'une construction si simple ait eu tant de conséquences.

Thèmes et syle de travail

M. R. ET C. S. : Cette histoire d'illumination soudaine rappelle celle rapportée par Hadamard dans son petit livre *La psychologie de l'invention en mathématiques*, qui raconte comment Poincaré a eu une révélation brutale en montant dans le tramway. Êtes-vous enclin à privilégier l'inspiration, le travail systématique, ou un mélange des deux ?

J.-P. S. : Il y a des sujets auxquels je reviens périodiquement (les représentations l-adiques, par exemple), mais pas systématiquement. J'y vais au flair. Quant aux éclairs que décrit Hadamard, c'est tout juste si j'en ai vécu deux ou trois en cinquante ans. Des moments merveilleux... mais bien trop rares !

M. R. et C. S. : De tels éclairs surviennent, j'imagine, après de longs efforts ?

J.-P. S. : Efforts, non. Il s'agit plutôt d'une longue maturation et d'un travail inconscient, comme l'explique si bien le joli livre de Littlewood, *A Mathematician's Miscellany.*

M. R. et C. S. : À la suite de votre période topologique, vous vous êtes essentiellement consacré à la théorie des nombres et à la géométrie algébrique.

J.-P. S. : Vous savez, on pourrait croire que je travaille dans des domaines très variés, mais ces domaines sont en fait liés. Je n'ai pas l'impression de changer. Par exemple, en théorie des nombres, en théorie des groupes aussi bien qu'en géométrie algébrique, j'utilise des notions topologiques, telles que la cohomologie, les faisceaux et les obstructions. Ainsi, j'ai pris grand plaisir à travailler sur les représentations l-adiques et les formes modulaires : on doit utiliser la théorie des nombres, la géométrie algébrique, les groupes de Lie réels et l-adiques, les q-séries de la combinatoire. Un mélange merveilleux.

M. R. et C. S. : Votre façon de penser est-elle de nature plutôt géométrique, plutôt algébrique, ou bien les deux à la fois ?

J.-P. S. : Plutôt algébrique, mais je comprends mieux le langage géométrique que le langage algébrique : entre un groupe de Lie et une bigèbre, je choisis le groupe de Lie ! Pourtant, je ne me considère pas comme un vrai géomètre, comme Bott et Gromov.

J'aime aussi beaucoup l'analyse, mais je ne peux pas non plus prétendre être un véritable analyste. Le vrai analyste voit au premier regard ce qui est grand, petit, probablement petit et démontrablement petit (ce qui nest pas la même chose). Cette vision intuitive me fait défaut, et j'ai besoin d'écrire noir sur blanc des inégalités explicites.

M. R. ET C. S. : Au cours de votre longue carrière, vous avez travaillé sur un grand nombre de sujets différents. Parmi les théories que vous avez créées et les résultats que vous avez obtenus, lesquels vous tiennent le plus à cœur ?

J.-P. S. : Une question délicate ! Demanderiez-vous à une mère lequel de ses enfants elle préfère ? Je peux simplement dire que certains de mes articles furent très faciles à écrire et d'autres réellement difficiles. L'article FAC, sur les faisceaux algébriques cohérents, appartient à la première catégorie. Quand je l'ai écrit, j'ai eu l'impression de copier un texte qui existait déjà ; cela ne m'a demandé pratiquement aucun effort. En revanche, je me rappelle un article sur les sous-groupes ouverts des groupes profinis, qui m'a donné tellement de mal que, jusqu'au bout, je n'arrivais pas à savoir si je démontrais le théorème ou si je contruisais un contre-exemple ! Autre cas d'article difficile : celui dédié à Manin, dans lequel j'énonçais des conjectures très précises (et très téméraires) sur les représentations galoisiennes modulaires (modulo p) ; celui-là fut même si éprouvant que, lorsque je l'eus terminé, je m'arrêtai de publier pour plusieurs années.

Du côté plaisir, il me faut mentionner un article dédié à Borel, sur les produits tensoriels de représentations en caractéristique p. J'ai toujours beaucoup aimé la théorie des groupes, et j'y ai même démontré quelques théorèmes. Mais ce résultat sur les produits tensoriels, obtenu quand j' approchais soixante-dix ans, fut le premier qui m'ait véritablement donné du plaisir. J'ai eu le sentiment que la théorie des groupes, après quarante ans de cour assidue, consentait à me faire une bise.

M. R. ET C. S. : Comme mathématicien, vous êtes resté en première ligne pendant plus de cinquante ans. Hardy a fait cette remarque, souvent reprise, que les mathématiques sont un jeu de jeune homme. N'est-ce pas complètement faux ? N'êtes-vous pas le contre-exemple parfait ?

J.-P. S. : Pas complètement : avez-vous remarqué que le Prix Abel fait principalement référence à des travaux effectués avant mes trente ans ? Il est cependant certain que les gens de ma génération (Atiyah, Borel [2], Bott, Shi-

2. Armand Borel est décédé le 11 août 2003.

mura, etc.) continuent à travailler plus longtemps que ceux de la génération précédente (avec de remarquables exceptions, comme Elie Cartan, Siegel, Zariski). J'espère que cette évolution va continuer.

Rapports à l'histoire des mathématiques

M. R. ET C. S. : Puisque le prix que vous avez reçu porte le nom d'Abel, nous voudrions remonter avec vous à son époque. Les équations algébriques étudiées par Galois et Abel, alors qu'ils sortaient de la théorie de la transformation des fonctions elliptiques, se sont révélées de la plus haute importance pour l'étude arithmétique des courbes elliptiques. Vous qui avez contribué à cette étude, auriez-vous des commentaires à faire au sujet de cette relation étonnante ?

J.-P. S. : C'est vrai, les courbes elliptiques sont à la mode, et pour de bonnes raisons, qui vont du programme de Langlands à la cryptographie. Dans les années soixante et soixante- dix, j'ai passé pas mal de temps à étudier leurs points d'ordre fini (*alias* modules de Tate) et leurs groupes de Galois. Un jeu très amusant : on doit combiner des informations d'origines très différentes : décompositions de Hodge-Tate, inertie modérée, éléments de Frobenius, les théorèmes de finitude à la Siegel... J'aime bien ça.

M. R. ET C. S. : Hermite a dit un jour qu'Abel avait donné du travail aux mathématiciens pour les cent-cinquante années à venir. Êtes-vous d'accord ?

J.-P. S. : Je n'aime pas les grandes déclarations de ce genre. Elles sous-entendent que leur auteur sait ce qui va arriver cent ans après. Quelle prétention !

M. R. ET C. S. : Dans l'introduction de l'un de ses articles, Abel écrit qu'on devrait s'efforcer de formuler les problèmes de façon à rendre toujours possible leur résolution. Il dit que c'est toujours réalisable, et il ajoute même qu'une formulation adéquate contient en germe la solution du problème.

J.-P. S. : Un point de vue optimiste ! Grothendieck serait sûrement d'accord. Quant à moi, je crains qu'il ne s'applique qu'aux questions d'algèbre, et pas à celles d'arithmétique. Par exemple, qu'aurait pensé Abel de l'hypothèse de Riemann ? Qu'elle est mal formulée ?

Rôle des démonstrations

M. R. ET C. S. : Vous arrive-t-il en mathématiques de savoir que quelque chose est vrai sans en avoir de démonstration ?

J.-P. S. : Bien entendu, c'est très fréquent. Mais il faut distinguer entre le but ultime (la modularité des courbes elliptiques, dans le cas de Wiles), dont on perçoit avec certitude qu'il est vrai, et les résultats intermédiaires (lemmes, etc.) qui peuvent être inaccessibles (comme Wiles s'en est aperçu lors de sa première tentative), voire carrément faux (c'est ce qui est arrivé à Lafforgue).

M. R. ET C. S. : Une démonstration a-t-elle toujours une valeur en soi ? Je songe, par exemple, à celle du théorème des quatre couleurs.

J.-P. S. : Nous sommes là dans une zone délicate : celles des démonstrations assistées par ordinateur. Ce ne sont pas des démonstrations au sens usuel : on ne peut pas les vérifier ligne par ligne. Elles sont particulièrement sujettes à caution lorsqu'elles affirment donner des listes complètes.

Je me rappelle ainsi avoir reçu, dans les années quatre-vingt-dix, une liste des sous-groupes d'indice donné d'un certain groupe discret. L'ordinateur avait trouvé, disons vingt de ces sous-groupes. Comme je connaissais bien ces groupes, j'ai pu facilement en trouver à la main une trentaine. J'ai écrit aux auteurs. Ils m'ont expliqué la raison de leur erreur : une partie du calcul avait été effectuée au Japon, une autre en Allemagne, mais ils avaient oublié une partie intermédiaire. Typique !

D'un autre côté, les démonstrations assistées par ordinateur sont souvent plus convaincantes que beaucoup de démonstrations classiques fondées sur des diagrammes déclarés commutatifs, des flèches prétendument identiques et des détails laissés au lecteur.

M. R. ET C. S. : Qu'en est-il de la démonstration conduisant à la classification des groupes finis simples ?

J.-P. S. : Bonne question ! Je me suis disputé pendant des années avec les spécialistes de théorie des groupes, qui prétendaient que le Théorème de la

Classification était bien un théorème, autrement dit qu'il avait été démontré. C'était en effet ce qu'avait annoncé Gorenstein en 1980, mais on s'était aperçu qu'il y avait un trou (la classification des groupes quasi-minces). Chaque fois que j'interrogeais un spécialiste, il me répondait en substance Non, non, ce n'est pas un trou, c'est quelque chose qui n'a pas encore été écrit, mais il y a 800 pages là-dessus qui attendent d'être complétées pour être publiées. Pour moi, c'était exactement la définition d'un trou, et je ne voyais pas pourquoi il n'était pas reconnu comme tel. Heureusement, Aschbacher et Smith ont maintenant écrit un texte de plus de 1200 pages afin de combler ce trou. Quand il aura été vérifié par d'autres spécialistes, ce sera le moment de fêter l'événement.

M. R. ET C. S. : Mais à quoi peut servir une démonstration de 1200 pages ?

J.-P. S. : En réalité, la démonstration complète de la classification fait bien plus que 1200 pages, peut-être dix fois plus : le seul énoncé du théorème est lui-même extrêmement long puisque, pour être utilisable, il doit contenir la description détaillée, non seulement des groupes de Chevalley, mais aussi des 26 groupes sporadiques. C'est un beau théorème, qui a des applications très surprenantes. Je ne pense pas que son usage pose problème aux mathématiciens d'autres domaines : il leur suffit de préciser quelle partie de leur démonstration en dépend.

Problèmes mathématiques importants

M. R. ET C. S. : Pensez-vous qu'il y ait en mathématiques des domaines cruciaux ou dominants ? Y a-til des sujets plus importants que d'autres ?

J.-P. S. : C'est une question délicate. Il y a évidemment des branches des mathématiques qui sont moins importantes : celles où l'on fait joujou avec quelques axiomes et leurs relations logiques. Mais on ne peut pas être dogmatique à ce sujet. Il arrive qu'un domaine délaissé devienne intéressant et noue des relations nouvelles avec d'autres branches des mathématiques.

En revanche, certaines questions jouent un rôle clairement central dans notre compréhension du monde mathématique : l'hypothèse de Riemann et le programme de Langlands en sont des exemples frappants. Sans oublier la conjecture de Poincaré qui pourrait bien n'être plus une conjecture, grâce à Perelman !

M. R. ET C. S. : Avez-vous des renseignements ou un sentiment à propos de la justesse de la démonstration ?

J.-P. S. : Un sentiment ? Qui se soucie des sentiments ! Des renseignements ? Pas vraiment, mais j'ai entendu des gens à l'IHES et au MIT qui se passionnaient pour cette esquisse de preuve. Un côté intéressant de la méthode de Perelman, c'est son utilisation de l'analyse à l'égard d'un problème de pure topologie. C'est très satisfaisant.

M. R. ET C. S. : Nous avons déjà fait un pas dans l'avenir en parlant de la conjecture de Poincaré. Quels sont les problèmes importants que vous aimeriez voir résolus dans un proche avenir ? Par exemple, êtes-vous d'accord avec la grande importance des problèmes du Clay Millenium Prize ?

J.-P. S. : Ah ! Les problèmes de Clay à un million de dollars ! Drôle d'idée : tant d'argent pour un seul problème... mais comment me permettre de critiquer cela après avoir reçu le prix Abel ? Pourtant, j'y vois un risque, celui que les gens hésitent à discuter ouvertement de leurs résultats intermédiaires, comme c'est arrivé il y a dix ans avec le théorème de Fermat.

Quant au choix des questions retenues par le Clay Institute, je le trouve très bon. L'hypothèse de Riemann et la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer y figurent très légitimement. La conjecture de Hodge aussi, mais pour une autre raison : il est douteux si la réponse est oui ou non. Ce qui importe, c'est de trouver la réponse (j'espère, bien sûr, que cela ne se révèlera pas indécidable...). Le problème P=NP est dans la même catégorie que celui de Hodge, à ceci près qu'il y aurait bien plus d'applications si la réponse était oui.

M. R. ET C. S. : Avez-vous en tête d'autres problèmes de la même ampleur ?

J.-P. S. : Je vous ai déjà dit que le programme de Langlands est l'une des questions majeures des mathématiques d'aujourd'hui. S'il ne figure pas dans la liste de Clay, c'est sans doute qu'il est difficile de le formuler avec toute la précision nécessaire.

M. R. ET C. S. : Outre vos mérites scientifiques, on vous reconnaît des qualités exceptionnelles de conférencier, dont nous pouvons témoigner à la suite de l'exposé d'aujourd hui [3].

J.-P. S. : Merci. Je viens du sud de la France, où l'on aime parler ; pas seulement avec les lèvres, aussi avec les mains et, dans mon cas, avec un morceau de craie. Quand j'ai compris quelque chose, j'ai le sentiment que tout le monde peut le comprendre aussi, et cela m'est un grand plaisir de l'expliquer à d'autres mathématiciens, que ce soient des étudiants ou des collègues. Le revers de la médaille, c'est qu'une assertion fausse me rend presque physiquement malade. Ça m'est insupportable. Quand j'en entends une lors d'un exposé, j'interromps l'orateur, et quand j'en lis une dans une prépublication, un article ou un livre, j'écris à l'auteur (ou, quand il se trouve que c'est moi l'auteur, je rédige une note en vue d'une nouvelle édition). Je ne suis pas sûr que cette habitude m'ait rendu extrêmement populaire chez les conférenciers et les auteurs...

Accessibilité et importance des mathématiques

M. R. ET C. S. : Les mathématiques font preuve d'un foisonnement de sujets et de disciplines qui rend difficile la maîtrise d'une branche, fût-elle mineure. D'autre part, vous en avez fait la démonstration lors de votre conférence d'aujourd'hui, il est essentiel que les différents secteurs s'entre-fertilisent. Comment les jeunes mathématiciens, tout particulièrement, vont-ils se débrouiller dans cette explosion des connaissances et vont-ils pouvoir trouver des choses nouvelles ?

J.-P. S. : Oui, on m'a déjà posé la question lors de l'interview que j'ai donnée à Singapour pour Intelligencer. Ma réponse est que, lorsque l'on est véritablement intéressé par un problème, on ne trouve que très peu de chose dans la littérature existante qui soit vraiment utile. On doit se débrouiller seul. Quant à l'impression d'une explosion des mathématiques, je suis certain qu' Abel l'avait déjà lorsqu'il a commencé à travailler, après Euler, Lagrange, Legendre et Gauss. Mais il a trouvé de nouvelles questions et de nouvelles solutions. Cela n'a pas changé depuis. Il n'y a pas de souci à se faire.

3. Cette interview a été donnée quelques heures après un exposé fait par Jean-Pierre Serre à l'université d'Oslo.

M. R. ET C. S. : Un autre problème actuel est que de nombreux jeunes talents (et aussi les faiseurs d'opinion publique) ne trouvent pas les mathématiques très excitantes.

J.-P. S. : En effet. C'est triste à dire, mais il y a de nombreux exemples de cela. Il y a quelques années, on a rapporté les propos d'un ministre français de la recherche affirmant que les mathématiciens ne servent plus à rien, maintenant qu'il suffit d'appuyer sur une touche d'ordinateur. Sans doute croyait-il que les touches et les programmes d'ordinateurs poussent sur les arbres... Pourtant, j'ai bon espoir que les jeunes continuent de découvrir les mathématiques et d'être attirés par elles. Un des aspects heureux de cette cérémonie Abel est la compétition Abel, destinée aux lycéens norvégiens.

Sports et littérature

M. R. ET C. S. : Parlez-nous un peu de ce que vous aimez en dehors des mathématiques.

J.-P. S. : Le sport ! Plus précisément : le ski, le ping-pong et la varappe. Je n'ai jamais réellement excellé dans aucun d'entre eux. Par exemple, quand je skiais, je ne savais pas slalomer, alors je préférais aller tout schuss plutôt que d'essayer de tourner. Mais j'y prenais beaucoup de plaisir. Par un effet de l'âge, mes genoux ne fonctionnent plus (l'un d'entre eux a même été remplacé par une prothèse métallo-plastique), et j'ai dû arrêter le sport. La seule sorte de varappe que je fasse à présent, je la fais par procuration : je vais avec des amis à Fontainebleau et je les encourage à escalader des rochers que j'aurais grimpés moi-même il y a dix ans. Ça reste plaisant : mais ça l'est moins qu'une escalade réelle.

Et puis, il y a les films (Pulp Fiction est l'un de mes préférés, et j'aime beaucoup aussi Altman, Truffaut, Rohmer, les frères Coen,...), les échecs, les livres (de toute espèce, de Giono à Böll et Kawabata en passant par les contes de fées et les Harry Potter).

M. R. ET C. S. : Monsieur le Professeur, au nom des Sociétés danoise et norvégienne de mathématiques, merci d'avoir accepté cette interview.

Une interview de Jean-Pierre Serre

Lors de l'un de ses passages au Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM), Jean-Pierre Serre nous avait accordé une interview dans laquelle il évoque notamment la place des mathématiques françaises dans le monde, leur évolution, le rôle si particulier des échanges et des rencontres dans cette discipline, son amour pour le Cirm, etc.

En 1951, vous avez 25 ans, vous obtenez votre Doctorat à la Sorbonne. À 30 ans, vous êtes professeur au Collège de France, titulaire de la Chaire d'Algèbre et Géométrie pendant 38 ans. Vous êtes aujourd'hui professeur honoraire. Une vie mathématique, au plus haut niveau. Quel regard portez-vous sur l'évolution des mathématiques en près de 60 ans ? Elles se pratiquent toujours de la même façon ?

Quels sont les changements depuis 60 ans ? En voici quelques-uns :

- Sur le nombre de mathématiciens : une très grande augmentation (multiplication par un facteur entre 10 et 50). Il y a 60 ans, j'avais l'impression que ce nombre était de l'ordre de celui des habitants d'un village : quelques milliers. Maintenant, il faudrait comparer à une ville, et même à une très grande ville.

  Un aspect surprenant de cette multiplication est que le niveau moyen n'a pas du tout baissé : je suis même impressionné par le grand nombre de très bons jeunes mathématiciens. C'est de bon augure pour l'avenir - d'autant plus que les problèmes importants (et non résolus) ne manquent pas.

- Autre changement : l'informatique a modifié notre technique de travail : j'y reviendrai à propos de la question n° 3.

- Changement linguistique dans les publications : il y a 60 ans, l'anglais était la langue majoritaire, mais il était suivi de près par le français et

Interview réalisée au CIRM en mars 2014

l'allemand. Maintenant, l'allemand a pratiquement disparu : le français subsiste tant bien que mal (en partie à cause de textes importants non traduits en anglais, comme ceux de Grothendieck).

L'anglais est devenu la langue standard. Cela rend les choses plus faciles pour les mathématiciens asiatiques, ou russes ; c'est aussi un appauvrissement : j'ai peur que les jeunes générations ne lisent plus (par exemple) les grands textes de l'école allemande des années 20-30.

- Rôle beaucoup plus important de la physique théorique : elle a suggéré (et aussi inspiré) beaucoup de notions nouvelles, et parfois même des démonstrations.

- Apparition de démonstrations probablement correctes mais invérifiables, soit parce qu'elles consistent en le traitement par ordinateur d'une très longue liste de cas (théorème des 4 couleurs, problème de Kepler), soit parce qu'elles demandent plusieurs milliers de pages (classification des groupes finis simples).

Parlez-nous de la place du tableau noir dans votre vie ? Dans la vie d'un mathématicien ?

Ah, le tableau noir, ce vieil ami ! Quel plaisir ! On prend un bâton de craie et on se lance ; on raconte ce que l'on a en tête, parfois sans consulter de texte écrit ; l'auditeur a le plaisir de voir fonctionner en temps réel le cerveau de l'orateur, et de suivre sa pensée au fur et à mesure qu'il reconstruit les arguments. C'est très différent des exposés sortis d'un ordinateur que le conférencier se borne à exhiber, comme s'il les extrayait du congélateur, d'un frigidaire. Autre aspect des exposés faits au tableau : s'il y a des formules compliquées et qu'on les voit s'écrire petit à petit au bout de la craie, on comprend bien mieux leur structure que si elles étaient projetées d'un seul coup sur un écran ; dans ce dernier cas, l'œil les voit, mais le cerveau ne les voit pas.

L'informatique a-t-elle révolutionné votre discipline ? Poussé de nouvelles frontières ?

Disons en termes plus simples que l'informatique a beaucoup apporté aux mathématiques :

- Rapidité des communications par internet, ce qui explique la multiplication des articles écrits en collaboration (il y en avait peu il y a 60 ans).

- Mise à la disposition d'une grande quantité d'information : si vous ne connaissez pas le sens d'un terme mathématique, ou si vous ne savez pas qui a travaillé dessus, vous pouvez souvent avoir la réponse en quelques minutes sur le web.

- Création de "TeX" qui permet aux auteurs de faire ce qui, auparavant, était fait par les imprimeurs : composer le texte et en choisir la typographie. Un grand merci à Donald Knuth !

- Possibilité de faire des expériences numériques qui étaient impossibles dans les années 50. Ces expériences suggèrent de nouveaux théorèmes (et même parfois, elles peuvent servir à les démontrer). C'est particulièrement important pour l'arithmétique, et pour la théorie des systèmes dynamiques.

La France en nombre de médaillés Fields arrive juste derrière les États-Unis. Comment expliquez-vous l'excellence française dans cette discipline ?"

N'exagérons pas : il y a aussi de très bonnes écoles russe, anglaise, etc. En ce qui concerne notre pays, j'ai l'impression que le système des grandes écoles a joué un rôle positif. En tout cas, cela fait près de 200 ans qu'il y a une école mathématique française de bonne qualité : bien sûr, avec des hauts et des bas. Depuis une cinquantaine d'années, nous semblons être dans une période de "hauts" ; souhaitons que cela continue. De toutes façons, les maths ne sont pas une compétition sportive : si l'on devait les comparer à quelque chose, ce serait plutôt à une grande famille.

Le Cirm est un lieu que vous connaissez bien. Qu'a-t-il de particulier ? Qu'est-ce qu'un mathématicien attend d'un lieu comme le Cirm et qu'y trouve-t-il ?

Oui, j'aime bien le Cirm. J'y suis allé dès les premières années de son existence. Il y a peu d'endroits comparables dans le monde : Oberwolfach, dans la Forêt Noire, et Banff dans les Montagnes Rocheuses. Chacun a son propre charme : la montagne à Banff, la forêt à Oberwolfach, le calcaire envoûtant des calanques au Cirm. Être dans un bel endroit est important : cela rend heureux, et je suis sûr que l'on fait de meilleures maths quand on est heureux. Bien entendu, le point essentiel est, pour le Cirm comme pour les autres centres, la possibilité de rencontrer d'autres mathématiciens, de leur expliquer ce que l'on fait, d'essayer de répondre à leurs questions et de nouer de nouvelles amitiés. Le travail mathématique n'est pas vraiment un "travail en équipe" : les idées originales sont dues à des individus ; mais la présence d'autres personnes intéressées à des questions voisines est un grand facteur de progrès (et aussi d'équilibre psychologique).

“Serre est un Mozart
qui aurait vécu jusqu’à 90 ans”.
Michel Broué[1].

Faire communiquer les différents champs mathématiques pour façonner des idées et des outils nouveaux : tel est le principal apport de Jean-Pierre Serre, qui remplit les amphis de Harvard à Singapour. Explications, par Michel Broué.

Jean-Pierre Serre (né en 1926) est le plus jeune lauréat de la médaille Fields, qu’il a obtenue en 1954, à moins de 28 ans...

Le Point : Récipiendaire de la fameuse médaille Fields à moins de 28 ans, élu professeur au Collège de France avant 30 ans, Prix Abel en 2003, Jean-Pierre Serre est très certainement un surdoué des maths. Mais quel est son apport ?

Michel Broué : Après avoir participé au séminaire de topologie algébrique d’Henri Cartan à l’École Normale Supérieure, il a découvert que la théorie de Leray des espaces fibrés et de leur suite spectrale pouvait être appliquée dans un cadre beaucoup plus large qu’on ne l’imaginait alors. Cela l’a amené au calcul des groupes d’homotopies des sphères, via des méthodes et des résultats qui ont révolutionné la topologie algébrique, et lui ont valu la médaille Fields en 1954. Mais il est beaucoup plus que cela. C’est un théoricien hors pair, l’un des rares aujourd’hui à avoir une vision panoramique des mathématiques, ce qui lui permet de relier les différentes spécialités pour inventer de nouveaux objets, de nouvelles idées. Il est ainsi devenu une référence incontournable en matière de topologie, mais aussi l’un des plus éminents spécialistes de la géométrie algébrique, de la théorie des groupes, de la théorie des nombres. C’est un Mozart des mathématiques qui aurait vécu jusqu’à 90 ans.

Comment travaille-t-il ?

Prenez son célèbre article “Géométrie algébrique et géométrie analytique”[2], ou “Gaga” : il illustre parfaitement cette capacité à relier entre elles des spécialités différentes ; ici, la géométrie algébrique - partie des mathématiques où l’on peut faire de la géométrie pour comprendre des équations algébriques et faire de l’algèbre pour comprendre des figures géométriques - et la géométrie analytique, qui, plus proche de l’intuition physique et de la géométrie au sens premier du terme,

1. © *Article paru dans le magazine Le Point Références*, *Comprendre les mathématiques*, *en février/mars* 2017, *n*° 68, *p.* 83. (*transcription en Latex* : *DV*, 15.9.2020)

2. https://www.college-de-france.fr/media/jean-pierre-serre/UPL1698785858825941763$_{S}erre_{G}AGA.pdf$.

est pour lui une source de compréhension du côté algébrique, et de résultats applicables dans un cadre général. En s'appuyant sur les notions d'"homologie" et de "faisceaux", introduites par Leray, il parvient à créer ce dialogue interdisciplinaire. Il utilise un principe qui a depuis fait florès dans la recherche mathématique : passer par l'extérieur, relier chacun des deux mondes à un troisième, ne pas s'entêter à trouver des liens trop directs, mais au contraire monter plus haut pour constater que les liens vivent au-dessus. Il réussit ainsi à établir une équivalence entre la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur une variété projective complexe et la catégorie des faisceaux analytiques cohérents sur l'espace analytique correspondant.

Ce que Grothendieck va utiliser...

Exactement, Serre, qui avait deux ans de plus que lui, va beaucoup l'inspirer, leur correspondance en témoigne, notamment pour la théorie des schémas et celle des faisceaux. Grothendieck va savoir mettre en musique quelques-unes de ses idées pour produire l'une des plus extraordinaires périodes de l'histoire des mathématiques.

Vous le tenez pour un "classique" de la langue française moderne. Pourquoi ?

Je ne suis pas le seul à penser cela. Son écriture est particulièrement précise, claire et efficace. C'est un auteur qui chasse l'adverbe redondant. Peu de scientifiques se sont donné la peine de rédiger autant de livres, avec autant de soin. Vous savez qu'à l'université Yale, l'examen de français en dernière année de mathématiques consiste à traduire un paragraphe de Serre ou de Bourbaki, dont il a été l'un des producteurs les plus actifs ?

Ses textes en témoignent, il est très difficile d'accès...

Il faut effectivement beaucoup travailler pour essayer de maîtriser sa pensée, mais les mathématiques contemporaines sont devenues presque inaccessibles...

Propos recueillis par Catherine Golliau

Michel Broué est mathématicien, spécialiste, notamment, de la théore des représentations. Il est professeur à l'Université Paris-Diderot après avoir été directeur de l'Institut Henri Poincaré et du département de mathématique et d'informatique de l'École Normale Supérieure.

Alain Connes

Géométrie non-commutative
Médaillé Fields
Professeur de Mathématique, Collège de France, Institut des Hautes Études Scientifiques, et Université de l'État de l'Ohio

Je crois que les mathématiques sont un moyen pour l'esprit humain de créer des concepts. De multiples façons, les mathématiques jouent un rôle que la philosophie aurait pu jouer dans la création de concepts qui peuvent être utilisés dans le monde réel. Cela prend du temps pour que les concepts évoluent et soient utilisés dans le monde réel, mais la réelle fabrique, ce sont les mathématiques. Ces concepts ont à voir avec la forme et les choses abstraites entre autres, et ils sont plus subtils et divers que peuvent l'être les nombres. C'est vraisemblablement quelque chose que le grand public ne réalise pas. Les mathématiciens utilisent des nombres seulement lorsqu'ils en ont besoin. On pourrait dire que l'idée d'énergie provient de la physique, mais en fait, elle trouve son origine dans les mathématiques. Les mathématiques sont le langage ultime dans lequel les idées abstraites sont distillées et deviennent très précises, et elles peuvent alors être utilisées dans différents domaines. En même temps, les mathématiques peuvent être très dures parce qu'elles résistent. La réalité est coriace ; vous ne pouvez pas faire ce que vous voulez. C'est effrayant. On ne devrait pas être effrayé. Il y a une jolie citation de Alexander Grothendieck qui dit, "Être effrayé par le fait de commettre une erreur, c'est la même chose qu'être effrayé par la vérité."

J'ai une anecdote au sujet de l'enfant d'un de mes amis qui montre l'essence des mathématiques très clairement. A l'âge de 5 ans, il était sur la plage avec son père. Il avait été assez malade vers 3 ans et son père était toujours inquiet pour sa santé. Pendant une heure, l'enfant était resté tranquillement assis sur la plage en ayant l'air pâle. Le père était angoissé. Alors l'enfant est venu voir son père et lui a dit, "Papa, il n'y a pas de plus grand nombre." Le père était étonné. Il n'était pas mathématicien, il a demandé à l'enfant, "Comment le sais-tu ?". L'enfant a donné une preuve. On entend beaucoup d'inepties à propos d'enfants apprenant à compter sur leurs doigts. Ici vous avez un petit enfant de cinq ans qui a trouvé, de lui-même, un fait mathématique véritable et il l'a trouvé dans son cerveau, non pas dans un livre. Il a découvert cela par pure réflexion et il a trouvé une preuve. C'est ça l'essence des mathématiques. Bien sûr, il y a une tradition. Il y a plein de livres, et les choses que nous apprenons ne s'évaporent pas parce qu'elles ont une démonstration. D'un autre côté, les mathématiques, c'est quelque chose avec quoi vous pouvez être directement en contact sans outil intermédiaire. C'est la caractéristique la plus remarquable des mathématiques. Vous pouvez être complètement livré à vous-même et vous pouvez toujours penser aux mathématiques. Vous ne ferez pas forcément des mathématiques qui seront importantes parce que pour faire ça, vous devez avoir lui les dernières avancées. Je ne suis pas en train de dire que vous devriez travailler tout seul dans votre coin. Vous n'iriez nulle part si vous faisiez cela. Mais ce que je suis en train de dire, c'est que quand vous débutez, pour vraiment devenir un mathématicien, la clef est de réaliser qu'à un certain moment, vous devez arrêter de lire des livres. Vous devez penser par vous-même. Vous devez devenir votre propre autorité. Il n'y a pas d'autorité à laquelle vous deviez vous référer. À un moment donné, vous devez réaliser que le fait qu'une chose soit ou pas écrite dans un livre n'a pas d'importance. Ce qui a de l'importance, c'est la question de savoir si vous avez une preuve et si vous êtes sûr de cette preuve. Le reste n'a pas d'importance. Cela peut arriver pour le petit enfant très tôt.

En ce qui concerne mon propre travail, ma thèse, vous avez le point de vue cartésien, qui est celui de la géométrie ordinaire. Là vous avez des coordonnées, etc. Mais il y a des espaces qui sont plus compliqués parce que ce sont des espaces dans lesquels vous ne faites pas que

Extraits de *Mathematicians : an outer view of an inner world*, Mariana Cook, 2009, Princeton University Press.

regarder les points d'ensembles, mais vous regardez aussi les relations entre les points. Ces nouveaux ensembles, ces ensembles avec des relations, peuvent être décrits par des algèbres, mais ces algèbres sont non-commutatives. Cela a été d'abord trouvé par des physiciens et cela peut s'expliquer extrêmement simplement. Quand vous écrivez un mot sur un bout de papier, vous devez faire attention à l'ordre des lettres. Un ami à moi m'a envoyé un email un jour et pendant quelques instants, je n'ai pas pu en comprendre le sens. Cela m'a pris un peu de temps de réaliser que c'étaient mes nom et prénom qui étaient écrits, mais leurs lettres n'étaient pas dans l'ordre habituel. Quand on fait du calcul ordinaire sur les nombres ou bien de l'algèbre ordinaire, comme on l'appelle, on peut permuter les lettres. L'ordre des lettres n'a pas d'importance. si vous écrivez 3×5, c'est la même chose que 5×3. En physique, on a découvert que ce n'est pas le cas quand on observe des systèmes microscopiques. Vous devez faire attention. Ce que j'ai trouvé dans ma thèse, c'est que lorsque vous faites attention à l'ordre, le temps émerge. Le temps émerge de cette non-commutativité, du fait que vous fassiez attention à l'ordre des lettres. Cela m'a amené à mon travail sur la classification des facteurs. Après avoir travaillé là-dessus pendant dix ans, j'ai développé complètement une nouvelle géométrie appelée “géométrie non-commutative”, dans laquelle on affine toutes les idées géométriques habituelles et on les applique aux nouveaux espaces. Ces espaces ont des propriétés surprenantes qui engendrent leur propre temps. Non seulement, elles engendrent leur propre temps, mais elles ont des caractéristiques qui vous permettent de les refroidir ou de les réchauffer. Vous pouvez faire de la thermodynamique avec elles. Il y a une partie complètement nouvelle de la géométrie et de l'algèbre qui est reliée à ces nouveaux espaces, appelée géométrie non-commutative, et sur laquelle j'ai travaillé quasiment toute ma vie.

Sir Andrew John Wiles
Théorie des nombres
Médaille d'argent de l'Union mathématique internationale
Professeur de mathématiques Eugene Higgins, Université de Princeton

Quand j'avais dix ans, je vivais dans la belle ville universitaire de Cambridge, en Angleterre, et j'eus la chance un jour de tomber sur un problème dans un livre de la bibliothèque locale. Sur la couverture était énoncé le plus célèbre peut-être de tous les problèmes mathématiques, au moins pour l'amateur que j'étais alors. Il était connu comme le dernier théorème de Fermat et le problème était de montrer que bien qu'il soit facile de trouver de nombreux carrés d'entiers qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés, la même chose n'était pas vraie pour les cubes, ou n'importe quelle autre puissance. Fermat était un éminent mathématicien et il avait écrit cette assertion dans la marge de sa copie d'un livre de mathématiques grecques. Il prétendait qu'il “avait une merveilleuse preuve de ce théorème mais que la marge était trop petite pour la contenir”. Les mathématiciens s'étaient battus en vain jusque-là pour trouver une preuve. Cela devint mon rêve d'enfant d'en trouver une.

Je passai beaucoup d'heures à des tentatives pour résoudre ce problème. Si Fermat avait découvert une preuve, alors ses méthodes auraient dû m'être accessibles. Je continuai à penser au problème de Fermat de façon intermittente alors que j'étais un étudiant en premier cycle à Oxford, mais lorsque j'ai commencé à effectuer des travaux plus avancés en théorie des nombres, j'ai réalisé que Fermat avait dû se tromper en prétendant cela et que ses méthodes ne pouvaient pas marcher. Alors j'arrêtai de travailler sur l'équation de Fermat et je commençai ma carrière de mathématicien. Je travaillais sur des questions liées aux courbes elliptiques. Bien que ces questions remontent à un millier d'années en arrière et bien que leur étude moderne ait commencé avec Fermat, nos méthodes sont fermement basées sur les mathématiques de la fin du dix-neuvième siècle et du vingtième siècle.

Alors en 1985, un mathématicien allemand, Gerhard Frey, suggéra une approche complètement nouvelle du problème de Fermat. Une année plus tard, après le travail de Jean-Pierre Serre et de Kenneth Ribet, le problème de Fermat devint inextricablement lié au développement des mathématiques modernes. Une approche complètement nouvelle était possible. Alors j'ai eu une nouvelle opportunité de travailler sur le problème, cette fois-ci en utilisant les théories des courbes elliptiques et des formes modulaires. Le défi s'avéra irrésistible, et pendant les huit années qui suivirent, je pensai à ce problème jour après jour. Ce fut une période d'intense travail - à la recherche d'indices dans ce qui avait été fait, essayant et réessayant des idées jusqu'à ce que je puisse les forcer à prendre forme - une période de frustration, également, mais ponctuée de soudaines éclaircies lumineuses qui m'encourageaient à penser que j'étais sur le bon chemin. Alors, après cinq années, je fis une découverte profonde. Je pouvais réduire le problème à une question qui était précisément du type de celles que j'avais étudiées à Harvard et durant mes premières années à Princeton où j'avais été nommé à titre permanent en 1982.

Pendant les deux années suivantes, je travaillai frénétiquement pour essayer de terminer et en mai 1993, je croyais que j'y étais parvenu. J'ai présenté les résultats de mon travail dans une conférence à Cambridge. À la fin de l'été, un problème me fut signalé qui amenait une erreur dans une des parties de la preuve, et je devais trouver une alternative pour cette section. Cela me prit jusqu'à septembre 1994 pour trouver la solution, et j'eus pendant ce temps l'assistance d'un collègue, Nick Katz, et d'un de mes anciens élèves, Richard Taylor. Je n'essaierai pas de décrire les hauts et les bas de cette lutte, les excitations et les désillusions, et la percée décisive en septembre 1994 quand j'ai finalement résolu la dernière difficulté. Mais je dirai qu'il y a une magie merveilleuse dans le fait de réaliser son rêve d'enfant. Peu de personnes peut-être ont ce privilège et j'ai la chance d'être l'une d'elles.

L'année que je passai à corriger l'argument ne fut pas une année facile. Heureusement, en 1988, je me mariais avec Nada, ma femme, et nous eûmes deux filles aux alentours du moment où eut lieu la conférence à Cambridge. Notre troisième fille est née en mai 1994, à temps pour l'ultime résolution. Je ne peux imaginer cette période sans le soutien et les besoins qu'amène une famille. Il était difficile de m'arracher au fait de penser à ce problème à tous mes instants conscients, mais heureusement, mes filles réussirent à me distraire juste assez pour qu'un certain équilibre de ma vie soit préservé. La preuve fut publiée en mai 1995 dans les *Annals of Mathematics*, quelques 350 années après que Fermat ait écrit le problème pour la première fois.

Les mathématiques ont été étudiées par l'humanité depuis des milliers d'années. Des dirigeants ont existé et ont disparu, des pays ont existé et ont disparu, des empires ont existé et ont disparu. Mais à travers tout cela et survivant aux guerres et aux paix et aux famines, il y a le fil des mathématiques. C'est une des quelques constantes de la vie humaine. Les mathématiques des anciens grecs et des dynasties chinoises sont aussi valides aujourd'hui qu'elles l'étaient alors. Les mathématiques continueront aussi dans le futur. Les problèmes irrésolus d'aujourd'hui seront les solutions du monde de demain. J'ai une chance inouïe de faire partie de cette longue et fascinante histoire.

Avi Wigderson
Informatique théorique, complexité, cryptographie
Professeur de Mathématiques, Institut d'Études Avancées, Princeton

J'ai grandi à Haifa, en Israël, dans un minuscule appartement surplombant la Méditerranée. Mon père était un ingénieur qui adorait les maths. Il était très intéressé par le fait de nous apprendre, à moi et à mes deux frères, mais j'avais plus de facilités qu'eux. Nous passions beaucoup de temps à résoudre des problèmes et des défis trouvés dans de vieux livres russes qu'il avait amenés avec lui en Israël après la Seconde guerre mondiale.

À l'école, j'aimais tout apprendre, mais les mathématiques en particulier, depuis le plus jeune âge. Après mon service militaire, je choisis l'informatique comme majeure à l'université Technion. Il aurait été plus naturel de choisir les mathématiques, mais mes parents pensaient que ce serait une bonne idée d'étudier quelque chose qui offrait les perspectives d'un réel emploi. Je ne pensais pas à une carrière académique alors. J'avais grandi dans un environnement de cols bleus et je ne connaissais aucune personne du milieu académique étant enfant.

Par chance, la majeure d'informatique incluait, en plus de la programmation et les cours de système, beaucoup de mathématiques et de cours d'informatique théorique, que j'ai adorés. Comme de nombreux bons étudiants de ma classe, j'ai candidaté aux programmes de PhD[1] aux États-Unis. J'obtins une possibilité à Princeton comme étudiant diplômé en informatique. C'est seulement à ce moment-là que les concepts de recherche et de carrière académique devinrent clairs, et extrêmement attractifs. Je sus que c'était ce que je voulais faire de ma vie.

En informatique théorique, j'ai trouvé le domaine de recherche parfait. Ce sont des mathématiques, mais une branche extrêmement jeune, qui est née seulement il y a quelques décennies. Il y a plein d'excitation, beaucoup de problèmes basiques non résolus, et beaucoup de jeunes chercheurs, talentueux, et enthousiastes. En plus, de nouvelles questions continuent de nous arriver de l'extérieur, des nouvelles technologies qui ont besoin de modélisation et de défis calculatoires qui ont besoin de solutions efficaces.

Pour avoir un aperçu du type de problèmes qui nous occupent, mes collègues et moi, vous devez seulement vous demander comment votre ordinateur ou votre corps (spécialement votre cerveau) réalisent des tâches difficiles si efficacement. Du côté de l'ordinateur, comment MapQuest trouve une route si rapidement entre deux points ? Comment Google localise-t-il l'aiguille que vous cherchez dans une énorme quantité d'information en un clin d'œil ? et etc. La rapidité du matériel n'est qu'une petite partie de la réponse : la plus grosse part réside dans les algorithmes extrêmement intelligents, développés pour de tels problèmes par les informaticiens. Et du côté humain, comment nos corps combattent-ils les maladies, comment synthétisent-ils les protéines, comment reconnaissent-ils les visages, comment mémorisent-ils les textes ? Ici, les algorithmes ont été découverts par la nature durant des billions d'années d'évolution, et les scientifiques essaient d'abord de modéliser une plateforme de calcul et ensuite de faire de l'ingénierie-inverse sur ces algorithmes intelligents.

Un défi encore plus grand que celui consistant à trouver des algorithmes efficaces pour les problèmes importants est de prouver que pour d'autres problèmes importants, de tels algorithmes n'existent pas (notamment en prouvant que ces problèmes ne peuvent être programmés de manière intrinsèque). Ce défi n'a pas encore été résolu dans sa pleine généralité. Mais malgré une réaction naturelle, prouver qu'un problème donné est difficile, ce n'est pas nécessairement une mauvaise nouvelle. Les informaticiens ont trouvé des façons ingénieuses d'utiliser les problèmes difficiles, par exemple, pour la sécurité informatique. Presque tout le commerce électronique d'aujourd'hui est basé sur la difficulté supposée d'un problème calculatoire d'énoncé simple mais très difficile à résoudre. Mais est-il vraiment difficile ?

La pensée calculatoire est essentielle pour les théories scientifiques en biologie et en physique et aussi pour les problèmes tels que la propriété, l'apprentissage, le hasard, et plus encore. Les défis intellectuels pour comprendre ces problèmes, et la calculabilité elle-même, nous occuperont pendant de nombreuses années. Travailler dans un domaine mathématique d'une telle profondeur, d'une telle beauté, et d'une telle importance, est une source de joie

[1]= thèse.

sans fin pour moi.

Benoît Mandelbrot
Fractales en géométrie, dans la nature et la culture
Professeur Émérite de sciences mathématiques, Chaire Sterling, Université de Yale

Mon plus jeune oncle et moi sommes nés à Varsovie et avons grandi pour devenir mathématiciens. Mais des temps trop intéressants maudirent la fin de son adolescence et plus tard la mienne et nous firent devenir deux personnes totalement différentes. Il devint un personnage important de l'establishment occupé à plein temps, tandis que je ne le devins jamais.

Adolescent pendant la première guerre mondiale, tournant autour, pendant la révolution russe, mon oncle tomba amoureux de l'analyse classique française, revint à sa source, où lui fut remis le flambeau, qu'il réussit à garder brûlant à la fois par beau et par mauvais temps.

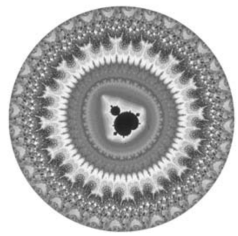
Adolescent pendant la seconde guerre mondiale, j'ai trouvé refuge dans les monts cévenols pauvres et isolés du centre de la France. Après la guerre, formé aux mathématiques par des images héritées, je pus intégrer la renommée École Normale Supérieure à Paris. En effet, je choisis de poursuivre un rêve - celui contre lequel mon oncle m'avait fait me frotter enfant. J'idôlatrais et je voulais achever la plus grande réussite de Johannes Kepler : apprivoiser un ancien jeu - les ellipses - pour résoudre un ancien échec de l'astronomie d'observation, les "anomalies" dans les mouvements des planètes.

Contre toute attente, quelque chose de ce genre finit par combler mon rêve. Involontairement, je fus face à une tâche que Platon lui-même avait contournée des millénaires avant notre époque mais que personne ne savait ne serait-ce que commencer à poursuivre. En effet, comparé à Euclide, la plupart des formes de la nature et de la culture ne sont pas simplement plus élaborées mais elles sont toutes plus irrégulières et fragmentées. Dans un but pratique, la plupart exhibent une très grande quantité - pratiquement infinie - d'échelles de longueurs différentes.

Le mathématicien Henri Poincaré avait remarqué que l'on choisit de se poser certaines questions, alors que d'autres questions se posent d'elles-mêmes. Quelle est la longueur de la côte bretonne, étant donné que la longueur mesurée est augmentée de baies et caps plus petits ? Comment définir la rugosité d'un morceau de fer rouillé, ou d'une pierre cassée, d'un morceau de métal ou de verre ? De quelle forme est une montagne, une ligne côtière, une rivière, ou une ligne entre deux bassins versants ? C'est à dire, est-ce que la géométrie peut fournir ce que les mots semblent promettre, notamment, des mesures véritables de la Terre sauvage ? À quelle vitesse le vent souffle-t-il lors d'une tempête ? Quelle est la forme d'un nuage, d'une flamme ou d'une soudure ? Quelle est la densité des galaxies dans l'univers ? Quelle est la volatilité des prix côtés sur les marchés financiers ? Comme comparer et même avoir l'espoir de mesurer les vocabulaires de différents écrivains ?

Dans tous ces exemples, la "rugosité" naturelle fournit un nombre étonnant de nombreuses questions laissées longtemps ouvertes et comme sans possibilité d'être résolues. Ces questions défiaient la vision conventionnelle de la géométrie standard de la nature et de la culture - qui considère que les formes rugueuses n'ont pas de forme justement.

Maintenant, tout ceci ayant eu lieu, ma vie professionnelle peut être caractérisée. J'ai affronté tous ces défis vieux ou récents (de même que d'autres de nature analogue), dans l'esprit de Kepler. Un demi-siècle avant que je naisse, les mathématiciens avaient entrepris ce qu'ils percevaient comme un envol délibéré de la réalité et ils croyaient qu'ils inventaient ce qu'ils appelaient des "monstres" ou des cas "pathologiques". Aidé d'un ordinateur, j'ai vraiment dressé ces soi-disant inventions, j'ai dramatiquement inversé leur intention originale, et j'ai montré qu'un peu d'aide permet de gérer une foule de vieux problèmes concrets - la "question des poètes et des enfants" du genre que j'ai listé. En jouant avec les "pathologies" spécifiques qui avaient stoppé le travail de mon oncle, j'ai pu découvrir ce qu'on appelle maintenant l'ensemble de Mandelbrot - une forme considérée comme l'objet le plus complexe des mathématiques. Dans ce contexte et dans d'autres, j'ai extrait d'images de nombreuses conjectures abstraites qui se sont avérées extrêmement difficiles, qui ont motivé une grande quantité d'un difficile travail et qui ont amené de grandes récompenses.



Barry Mazur
Topologie géométrique, théorie des nombres
Professeur Gerhard Gade, Université de Harvard

Nous humains participons à une longue conversation - depuis des millénaires - à propos de l'amour, de la mort, à propos de la manière dont nous racontons les histoires de nos vies, à propos de celle dont nous imaginons le presque inimaginable, à propos de la manière dont nous nous comportons les uns avec les autres, ou bien de celle dont nous devrions nous comporter les uns avec les autres, et nous pensons à tout cela.

Le fait qu'il y ait une architecture derrière la manière dont nous pensons, une articulation qui transcende l'ambiance, les circonstances, et même la culture, est l'un des plus grands cadeaux de la vie. Aucune forme de pensée ne se rapproche autant de cette architecture que les mathématiques - et c'est ce qui fait que faire des mathématiques soit à la fois une expérience si totalement singulière et si universellement humaine.

Le sujet mathématique auquel je m'intéresse en ce moment a à voir avec les nombres ; les nombres comme 1, 2, 3,.... Vous pourriez penser : étant donné notre vaste compréhension collective du monde, comment peut-il y avoir encore des problèmes à propos de quelque chose d'aussi net que 1, 2, 3,... qu'il faille encore comprendre ?

Oui, ceci est une énigme, et peut-être quelque chose d'autre, sur une autre planète, une intelligence autre comprend-elle les nombres aussi complètement que nous nous connaissons nos cuisines, mais - malgré tout notre merveilleux bagage de connaissances actuel - nous n'en sommes qu'au début, et même pour avoir accompli ce que nous avons obtenu jusque-là, saisir 1, 2, 3,... nécessite une extension vigoureuse, et une exploitation totale, de notre intuition pour comprendre les intrications entre la géométrie et les espaces à plusieurs dimensions, du pouvoir de l'analyse à faire face à des phénomènes continus, des subtilités des probabilités et des lois du hasard. Qu'il en soit ainsi est à la fois l'un des plus grands mystères, et la plus grande des gloires.

Je suis venu aux mathématiques comme, j'imagine, beaucoup de jeunes gens le firent en même temps, en étant un radio-amateur (très amateur) et en étant perplexe devant l'incompréhensible pouvoir - il semblait - des ondes radio, et en contemplant les ondes électromagnétiques et la gravité, cette paire bizarre de manifestations physiques qui toutes deux effectuent cette notion magique d'action à distance. J'étais moins intéressé par ce qui donnait naissance à la gravité et aux ondes électromagnétiques (un chemin qui m'aurait amené à la physique) et davantage dans la manière dont on pouvait formuler le problème de l'action à distance, ou des phénomènes que l'on peut seulement comprendre comme globaux et non pas comme locaux. Le domaine de la topologie - qui est le premier domaine mathématique dans lequel j'ai travaillé - est un domaine qui a un langage qui s'adapte à cela et qui peut gérer les espaces qu'il étudie, globalement, et avec des phénomènes qui ne peuvent pas être épinglés à un quelconque voisinage partiel.

Les mathématiques comme entreprise, également, sont mieux comprises "de façon globale". Elles n'ont pas de limites, et bien que j'aie commencé dans le champ de la topologie - et plus généralement, dans divers aspects de la géométrie - les implications de ce qui peut être fait dans ces domaines ont des "ailes étendues". Les intuitions déduites en topologie peuvent être amenées à porter sur des problèmes à propos de 1, 2, 3,... - et, en fait, pour certains problèmes à propos des nombres, il n'y a pas d'autre moyen efficace de les comprendre que d'utiliser ces intuitions, ce que de nombreux mathématiciens - dont je suis - font avec joie.

Benedict H. Gross
Théorie des nombres
Professeur de mathématiques George Vasmer Leverett et premier doyen des lycée et université d'Harvard

Quand je suis allé au lycée dans les années 60, tout le monde essayait de changer le monde. Quoi que les mathématiques puissent faire, elles ne vont pas transformer le monde en un endroit meilleur. Après mes diplômes, j'ai voyagé pendant plusieurs années en Afrique, Asie et Europe, en lisant des mathématiques, en jouant de la musique et en essayant de trier tout ça. J'en suis arrivé à la conclusion que si je voulais faire un travail créatif, ce serait en mathématiques, et je suis retourné aux États-Unis pour étudier la théorie des nombres.

En université, j'ai reçu l'enseignement de grands mathématiciens : John Tate, Jean-Pierre Serre, Raoul Bott, Barry Mazur et j'étais intéressé par les courbes elliptiques. Une courbe elliptique a une équation cubique en deux variables. Les personnes ont étudié les équations quadratiques depuis le début des mathématiques ; par exemple, l'équation d'un cercle est $x^2 + y^2 = 1$. Une courbe elliptique célèbre étudiée par Fermat et Euler est $x^3 + y^3 = 1$. Les courbes elliptiques ont une structure plus riche que les autres équations à deux variables car elles sont une recette pour produire de nouvelles solutions à partir de solutions connues. Pourtant, vous pouvez avoir une équation simple qui a un nombre infini de solutions rationnelles, comme $y^2 = x^3 + (1063)^2x$, où la plus petite solution non nulle a plus d'une centaine de digits au numérateur et au dénominateur.

Lors de mes études, j'ai aussi rencontré Don Zagier, qui avait mon âge mais qui était déjà un chercheur établi en mathématiques. Quelques années plus tard, j'ai rendu visite à Don dans le Maryland avec l'idée de montrer que pour certaines courbes elliptiques à coefficients rationnels, il y avait une infinité de solutions - sans avoir vraiment besoin d'écrire aucun de ces nombres rationnels. Cette approche nécessitait un pont entre le sujet des courbes elliptiques, qui est principalement de l'algèbre, et de la géométrie, et le sujet des formes modulaires, qui est principalement de l'analyse. Je commencerais d'un côté de la rivière et Don commencerait de l'autre. J'ai vérifié cela, et nous avons commencé à faire quelques calculs préliminaires.

À la fin de ma visite, nous sommes restés toute une nuit à calculer des intégrales, en faisant quelques suppositions irréalistes. Après plusieurs heures, nous sommes arrivés à une formule pleine de sommes infinies non convergentes. Un seul terme de cette expression avait réellement un sens. Don me demanda ce que pourrait représenter ce terme, et je prédis que ça devait être une puissance de premier divisant un j-invariant particulier. Il semblait implausible que quoi que ce soit que nous fassions soit même de loin relié aux j-invariants. Peut-être étions-nous complètement perdus. Comme il était déjà quatre heures du matin, je suggérais que nous allions le lendemain à la bibliothèque, où il y avait des tables d'invariants que nous pourrions consulter. Et j'allais dormir.

Don resta éveillé cependant, faisant calcul sur calcul de j-invariants sur son ordinateur de poche, vérifiant dans chaque cas que la prédiction que j'avais faite était juste. J'y retournais tôt le lendemain, et Don était profondément endormi. Le parquet de la salle à manger était jonché de pages de ses calculs, chacun confirmant la conjecture. Quand je lus la dernière feuille de papier, il avait écrit “Réveille-moi tout de suite !”.

Ce fut le plus haut point de ma vie mathématique. Don et moi ne savions pas si nous pourrions établir la formule finale, mais nous savions que nous avions initié un bon début et que nous étions en train de travailler sur un territoire complètement nouveau. Ce n'était pas un domaine où il y avait foule. Personne ne regardait cela, et du coup, il n'y avait pas d'urgence. Quelques mois plus tard, quand nous sommes finalement parvenus à la fin de nos calculs individuels, lui pour la dérivée d'une fonction L et moi pour le poids d'une solution et que nous regardâmes avec attention les termes très compliqués, ils coïncidaient parfaitement : cela amena à une identité simple, maintenant appelée la formule de Gross-Zagier. Personne n'a vraiment expliqué pourquoi elle est vraie, bien que Henri Darmon, Steve Kudla, et ShouWi Zhang ait chacun fait des progrès en la généralisant. Quand on découvre une vérité mathématique, tout devient immédiatement clair : c'est si facile à comprendre. Vous n'avez pas besoin de la toucher, voir la beauté des mathématiques est juste un plaisir.

Cathleen Synge Morawetz
Équations différentielles partielles, flot fluide
Professeure émérite et première directrice, Institut Courant des sciences mathématiques, Université de New York

L'une de mes filles m'a dit que le problème, lorsqu'on est mathématicienne, c'est qu'on est toujours sur la brèche au sens où l'on est constamment en train de réaliser quelque chose comme une démonstration de théorème. C'est sans fin. Vous vous battez contre vous-même ainsi que contre les autres et cela exerce une fascination très spéciale dans la vie.

Dans ma jeunesse, il n'y avait pas beaucoup de femmes qui voulaient essayer cela. Pourtant c'était, pour moi, une profession naturelle. Mon père, John L. Synge, était un mathématicien qui allait et venait entre l'Irlande et le Canada. Il était sur un poste de faculté à l'Université de Dublin et à celle de Toronto et j'entendais tout le temps parler de mathématiciens. L'idée générale de mes parents était que je ne devrais pas me diriger vers les mathématiques. Ils pensaient que j'étais trop volage. Mon père avait également un problème avec le fait d'avoir une autre personne mathématicienne dans la famille, du coup, je n'ai pas été particulièrement encouragée. Alors que j'étais au lycée, j'ai eu un professeur qui en connaissait davantage que le professeur de mathématiques moyen. Il organisa une session après les cours pour aider les étudiants à candidater à l'université mais rétrospectivement, je crois qu'il a fait cela pour moi. J'ai fini par avoir un très bon niveau pour intégrer l'Université de Toronto. Les exigences étaient telles que le seul moyen que j'avais d'y faire ma scolarité était d'aller dans les cours de mathématiques, physique, chimie et d'y rester. Je suis allée à ces cours et j'ai été coincée dans ces sujets. Après environ deux années, je n'aimais pas beaucoup les cours mais j'ai quand même poursuivi en troisième année. C'était pendant la guerre et il y avait beaucoup d'agitation. J'avais un petit copain qui était dans la marine et je décidai que je devrai faire quelque chose pour les efforts de guerre. J'ai fini dans un terrain d'essai balistique près de la ville de Québec. J'ai beaucoup apprécié cette expérience et j'ai eu le sentiment que j'aimais vraiment prouver les choses. Je suis retournée à la faculté pour terminer ma dernière année. Je suis alors vite allée voir Cecilia Krieger, une mathématicienne que je connaissais depuis très longtemps. Elle m'a demandé ce que je souhaiterais faire lorsque je serais diplômée, et je lui ai dit que je souhaitais aller en Inde comme professeur : elle était horrifiée et me dit que je devais poursuivre mes études. Je lui ai dit que je ne savais pas où faire cela et elle m'a immédiatement obtenu une bourse. Je suis allée au MIT parce que Caltech ne prenait pas de femmes. Au MIT, j'ai obtenu mon doctorat en mathématiques et après un peu d'effort en ingénierie électrique, j'ai épousé Herbert Morawetz, que j'avais rencontré à Toronto et qui avait été transféré dans le New Jersey. Alors, j'ai cherché un travail dans les environs de New York. Par l'entremise de mon père, j'ai rencontré Richard Courant à NYU[2], et il m'embaucha pour souder les connexions d'un vieil ordinateur, mais également pour éditer son livre avec K. O. Friedrichs sur les flots compressibles.

À NYU, j'ai pris davantage de cours en mathématiques et je suis tombée amoureuse du sujet et de l'atmosphère étudiante. J'étais alors, et je suis toujours, plus intéressée par quelque chose qui a une application, comme mon travail sur le flux transonique. Supposez que vous avez un avion en train de voler. La vitesse du son est un phénomène local et dépend de la pression. Il est assez possible d'avoir une bulle dans laquelle le flux est supersonique, c'est à dire où la vitesse locale est plus grande que la vitesse du son, et qu'ailleurs le flux soit sous-sonique. Le flux sous-sonique est très fluide, mais le flux super-sonique peut avoir des ondes de choc qui créent des forces qui tirent sur l'aile. Il y avait beaucoup de curiosité dans les années 50 à propos du fait de devoir avoir ou pas une onde de choc. J'ai essayé de poser quelques réflexions autour de ça. C'était un théorème avec une application réelle. J'ai aussi travaillé sur les chocs sans collisions, qui arrivent potentiellement dans les réactions nucléaires mais vraiment dans l'espace lointain et dans le système solaire. "Sans collisions" signifie que les molécules parcourent d'énormes distances avant de s'entrechoquer : l'idée habituelle est que le choc est vraiment une transition lisse, et est à peu près aussi étendu que le chemin libre moyen des molécules ou relié de façon proche à ça. Si les collisions ont lieu très loin, alors comment pouvez-vous obtenir quelque chose qui ressemble à une discontinuité ? J'ai travaillé sur ce problème de nombreuses années.

De 1951 à 1960, Courant m'a généreusement autorisée à travailler à temps partiel et de cette façon, je pouvais élever nos quatre enfants. On m'avertissait tout le temps qu'ils tourneraient mal mais c'est l'inverse qui s'est produit.

Margaret Dusa McDuff
Algèbres de von Neumann, géométrie symplectique
Professeure de Mathématiques, Université de l'État de New York, Stony Brook

Née à Londres juste après la seconde guerre mondiale, j'ai grandi à Edinburgh. Mon père était un embryologiste et un généticien, intéressé dans la manière dont les organismes se développent mais également profondément intéressé par l'art, la philosophie, et les usages de la science. Ma mère était architecte, elle travaillait dans le département du développement

[2]sigle de l'Université de New York.

urbain dans l'administration civile écossaise. Elle a toujours travaillé, ce qui était inhabituel à l'époque, et m'a amenée à penser que j'aurais aussi une carrière professionnelle. Son père avait étudié les mathématiques à l'Université de Cambridge et était ensuite devenu un juriste connu ; mes aptitudes en mathématiques venaient de ce côté de ma famille. L'architecture, après tout, combine les mathématiques et la conception.

Mon grand-père m'a appris les tables de multiplication quand j'avais quatre ans. Il me prenait sur ses genoux et me montrait une table de toutes les multiplications de 10 sur 10, en pointant du doigt les symétries. Je me rappelle comme j'ai trouvé ça beau. J'ai toujours aimé calculer des additions à l'école. Plus tard, pendant mon enfance, j'ai été intéressée par la musique, la poésie, et la philosophie mais en ayant toujours comme certitude que j'aurais une carrière académique. À l'adolescence quand je me suis demandée ce que j'allais faire de ma vie, j'ai réalisé que c'étaient les mathématiques que j'aimais ; cette matière me parlait vraiment en quelque sorte. Je voyais les mathématiques comme comparables à la peinture abstraite. Je ne connaissais pas de mathématiciennes femmes, mais ça m'était égal, je voulais être différente.

À Cambridge pour ma thèse, j'ai résolu un problème qui était ouvert depuis vingt ans. Il y avait une certaine structure algébrique que les gens avaient définie et étudiée, mais ils n'avaient pas beaucoup d'exemples, et ils ne savaient pas combien d'objets différents de cette sorte pourraient exister. J'en construisis beaucoup, d'infiniment nombreux. Ma thèse fut publiée dans les *Annales des Mathématiques*, indiscutablement le journal mathématique le plus important, et pendant longtemps, cela resta mon meilleur travail.

Après que j'aie écrit ma thèse, je suis allée à Moscou où à la fin des années 60 il y avait une école de mathématiques absolument merveilleuse. C'était très large et ouvert, en réel contraste avec l'éducation étroite que j'avais reçue jusque-là. J'ai travaillé avec Israel Gelfand pendant six mois, une expérience qui m'a transformée. À mon retour, j'ai complètement changé de direction en passant de l'analyse fonctionnelle à la topologie. Pourtant, j'étais alors si consciente de mon ignorance que c'était très dur de devenir créative dans ce nouveau domaine. J'ai seulement survécu comme mathématicienne à cause de la confiance que ma thèse m'avait donnée. Je suis retournée aux États-Unis vers la fin des années 70 et j'ai travaillé là depuis. Maintenant je travaille en géométrie symplectique, j'étudie une certaine sorte de structure sur l'espace que les mathématiciens ont formulée au dix-neuvième siècle alors qu'ils étudiaient des questions de physique.

J'ai essayé un jour d'expliquer mon travail de thèse à ma mère. Ce fut une conversation intéressante : elle voulait vraiment savoir ce que je faisais et elle était certainement très intelligente. Pourtant, j'ai réalisé que le nombre de nouveaux concepts que je devais lui expliquer rendait absolument impossible de lui expliquer ce qu'étaient vraiment les objets auxquels je réfléchissais. Pour arriver à quelque chose, les mathématiciens doivent internaliser les idées qu'ils utilisent. Les objets mathématiques ne font pas que respecter une liste d'axiomes ; ils ont un sens, une forme, une texture, et bougent d'une certaine manière dans nos esprits. Nous devons apprendre à les manipuler, comprendre comment ils interragissent. Cela nécessite du temps et des efforts. La compréhension, quand elle advient, est souvent non-verbale, on réalise de façon fulgurante la manière dont les choses s'emboîtent ensemble.

Don Zagier
Théorie des nombres
Professeur de Mathématiques, Collège de France, Paris, et Directeur, Institut Max Planck pour les Mathématiques, Bonn

J'ai bougé chaque année pendant les trente premières années de ma vie, ainsi je n'ai pas eu de racines, pas de stabilité : en quelque sorte, je ne viens de nulle part, j'ai grandi en Amérique mais je vis en Europe depuis tant de temps que je ne me sens plus américain.

Mon enfance fut inhabituelle. Jusqu'à l'âge de neuf ans, je parlais difficilement aux gens et je n'avais pas d'amis, et je ne me rappelle de rien de ces années-là. On a pensé que j'étais peut-être attardé. Le psychologue scolaire m'a fait passer un test de trois heures et cela m'a sauvé la vie. Il s'avéra que j'avais une intelligence au-dessus de la moyenne, et l'école a dit que je pourrais sauter une classe si je le voulais. Mes parents me laissèrent décider. C'était la première fois que je prenais une décision à propos de ma vie. J'ai sauté une classe, puis une autre, puis une autre, puis une autre, et j'ai finalement eu mon examen de fin de lycée à treize ans. Après une année en angleterre, je suis allée faire mes années de faculté au MIT, j'ai terminé un programme de cinq ans normalement en deux ans, et j'ai eu deux diplômes de troisième cycle à seize ans. J'ai obtenu ma thèse à dix-neuf ans. Après mes quatorze ans, je n'ai plus jamais vécu avec mes parents.

J'ai à la fois eu de la chance et pas de chance dans mon éducation mathématique au plus jeune âge. De la chance parce que mon père aimait les maths et j'ai eu comme lui l'amour de cette discipline. Nous nous promenions dans les bois et il s'arrêtait au milieu du chemin pour me montrer le théorème de Pythagore et pour me le signaler dans la nature. Il admirait beaucoup les mathématiques et je pense que cela eut beaucoup de sens pour lui que je me destine à cela, j'avais onze ans quand je décidai de devenir mathématicien, j'ai eu une professeur de math merveilleuse qui disait que des règles spéciales devaient m'être appliquées en classe parce que je voulais devenir un mathématicien professionnel. De ce fait, je pouvais lire des livres de maths pendant la classe ou travailler sur d'autres problèmes, mais pendant les tests, j'obtiendrais la note zéro à moins que tout soit parfait. Elle m'a dit que je pouvais accepter ou pas ces conditions, et bien sûr, j'acceptai. Ce fut un très bon entraînement parce que j'appris alors à être rapide et attentif dans tout calcul, et cela me fut très utile plus tard. Mais je n'ai aussi pas eu de chance en commençant si jeune. Mes années de lycée, je les fis dans une ville de taille moyenne de Californie, et bien que je dévore les livres de maths l'un après l'autre, il n'y avait pas vraiment de mathématicien réel pour me conseiller et je choisis des livres très démodés, souvent davantage orientés maths appliquées, qui me rendirent la compréhension des maths "modernes" plus difficile ultérieurement. J'ai eu mon premier véritable professeur de mathématiques, Friedrich Hirzebruch, en troisième année de faculté. C'est par son biais que je commençai à apprendre à penser comme un vrai mathématicien. C'est quelque chose que vous ne pouvez pas apprendre seul, mais que vous devez apprendre d'un maître. Même maintenant, je ne suis pas un mathématicien moderne et les idées très abstraites ne me sont pas naturelles. J'ai bien sûr appris à travailler avec elles mais je ne les ai pas vraiment internalisées et je reste un mathématicien concret. J'aime les formules explicites et belles. Pour moi, elles ont une beauté intrinsèque. Elles peuvent être profondes ou pas. Comme exemple, imaginez que vous ayez une série de nombres telle que si vous ajouter 1 à chaque nombre, vous obteniez le produit des nombres qui sont immédiatement à sa gauche et à sa droite. Alors cette série se répètera indéfiniment toutes les cinq étapes ! Par exemple, si vous commencez avec 3, 4, alors la séquence continue : 3, 4, 5/3, 2/3, 1, 3, 4, 5/3, etc. La différence entre un mathématicien et un non-mathématicien n'est pas d'être juste capable de découvrir quelque chose comme cela, mais de s'en préoccuper et d'être curieux de savoir pourquoi c'est vrai, ce que cela veut dire, et quelles autres choses mathématiques pourraient être liées à cela. Dans ce cas particulier, l'assertion elle-même s'avère être liée à une myriade d'autres sujets profonds en mathématiques avancées : la géométrie hyperbolique, la K-théorie algébrique, l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique, et certains modèles de théorie quantique des champs. Je trouve ce genre de connexions entre des mathématiques très élémentaires et des mathématiques très profondes extrêmement belles. Quelques mathématiciens trouvent les formules et les cas particuliers moins intéressants et se préoccupent seulement de comprendre les raisons profondément sous-jacentes. Bien sûr, c'est le but ultime, mais les exemples vous permettent de voir les choses d'un problème particulier différemment, et de toute façon, c'est bon d'avoir différentes approches et différents types de mathématiciens.

Les mathématiques sont créatives, elles ne sont pas une procédure mécanique. Elles sont très personnelles. Parfois vous pouvez deviner quel mathématicien a fait tel travail à la seule assertion du résultat. En un certain sens, les maths sont déjà là et vraies indépendamment du fait que nous les découvrions ou pas - il y a un monde mathématique réel et il est plus étendu que le monde physique de quatre-vingt douze éléments et seize particules. Quand vous trouvez un résultat, il n'est pas vraiment vôtre, parce qu'il était déjà vrai, mais vous exprimez votre personnalité par les choix que vous avez faits pour le découvrir et le prouver. C'est comme aux échecs, où les mouvements possibles sont les mêmes pour tous, mais le novice et l'expert font des choix très différents quant à la manière de procéder. Excepté qu'aux échecs, il y a seulement vingt mouvements possibles à toute étape quelconque du jeu, alors qu'en mathématiques, il y en a une infinité. La vie d'un mathématicien est remplie d'un sens permanent du questionnement, et l'on ne peut jamais s'ennuyer.

Enrico Bombieri
Théorie des nombres
Médaillé Fields
Professeur de mathématiques IBM von Neumann, Institut des études avancées, Princeton

J'ai grandi à Montepulciano en Italie centrale, au sud de Sienne. C'est une petite ville entourée de collines et située sur le sommet d'une colline avec beaucoup de maisons et six ou sept églises. Je suis allé à l'école là-bas et j'avais beaucoup d'amis. J'aimais faire des promenades dans la campagne, explorer des grottes, faire du vélo, jouer au football, et lire des livres de mathématiques. Mon père était un banquier d'affaires mais il avait aussi été intéressé par les mathématiques, alors il y avait quelques livres de mathématiques à la maison, accessible au non-expert. Quand j'ai commencé à être intéressé par les mathématiques, mon père ne s'y est pas opposé. La seule chose qu'il ait dite a été “Si tu veux faire des mathématiques, tu dois savoir que tu ne gagneras jamais beaucoup d'argent. Mais quoi que tu fasses, suis ton penchant et fais-le du mieux que tu peux.”. Il m'a encouragé et quand je lui ai demandé de trouver certains livres, il m'a aidé. Aux environs de quinze ans, je faisais de la recherche en théorie des nombres.

La théorie des nombres, ça consiste à étudier les nombres entiers (1, 2, 3, 4, et etc.) et la façon dont ils sont liés entre eux. Par exemple, il y a le célèbre triangle de Pythagore de côtés de longueurs 3, 4, et 5 qui déterminent l'angle droit. Il y a d'autres nombres qui satisfont ce type de relation, et cela fait partie de la théorie des nombres. Comme autre exemple, il y a les nombres premiers. Ils sont difficiles à étudier, mais ils sont très importants parce qu'ils sont les blocs de construction de tous les autres nombres en utilisant la multiplication. La théorie des nombres est une partie très ancienne des mathématiques, qui remonte aux cultures chinoise et grecque anciennes. J'ai toujours pensé que la théorie des nombres était trop abstraite pour être appliquée, mais j'ai dû changer d'avis en voyant la façon dont la théorie moderne des nombres premiers a trouvé des applications pratiques significatives, en assurant la sécurité des communications. La leçon à tirer de cela, c'est que la connaissance, même quand elle n'est pas directement motivée par le profit à court-terme, est toujours très précieuse.

J'ai pu résoudre, parfois en collaboration avec des auteurs variés, quelques problèmes qui avaient été ouverts pendant longtemps. Probablement que ma découverte la plus importante est un résultat à propos de la distribution des nombres premiers qui s'est avéré très utile dans d'autres questions et qui trouve toujours des applications aujourd'hui. Les gens me demandent pourquoi je suis devenu mathématicien. La réponse est, simplement, que j'aime vraiment les mathématiques. Je me considère comme très chanceux de pouvoir faire ce que j'aime dans le cadre de ma profession. Pour beaucoup de personnes, leur travail est juste un gagne-pain. Dans de tels cas, la compensation peut être le succès, ou plus d'argent, ou bien rencontrer des personnes intéressantes. Pour moi, je ferais des mathématiques indépendamment de ça, simplement parce que j'aime penser aux mathématiques.

Il n'y a pas de cours formels à l'Institut des études avancées, où j'enseigne. Nous prenons de jeunes post-doctorants fraîchement diplômés. C'est important pour eux d'élargir leur horizon et de pénétrer plus profondément dans leur sujet de thèse. Ils doivent apprendre d'autres choses aussi et notre rôle est de les guider et de les aider à devenir indépendants. L'indépendance est très importante. Ils doivent apprendre à juger par eux-mêmes, et à ne pas juste écouter l'avis des autres. Quand ils viennent à moi et me demandent ce qu'ils devraient faire ensuite, c'est le signe qu'ils ne sont pas indépendants.

La bonne science est toujours une création. On doit imaginer comment les choses peuvent être et démarrer à partir de là. Il est très important d'être adaptable et de ne pas avoir d'idées préconçues, de ne pas forcer les choses à être comme on voudrait qu'elles soient. Un danger dans la recherche créative est d'être excité par certaines idées, de sur-évaluer leur signification, et d'essayer de les faire s'adapter à ce qu'on connaît. C'est ce que j'appelle le "cordage des chaussures", la tentative de tout faire entrer dans une boîte trop petite. Les grandes découvertes sont toujours un saut quantique par rapport aux connaissances établies, que ce soit en mathématiques ou dans les autres sciences. Nous pouvons aussi apprendre énormément en étudiant le travail de nos prédécesseurs. On dit que nous sommes tous assis sur les épaules de quelques géants, mais n'oublions pas que nous dépendons tous de l'humble contribution de très nombreuses personnes : ceux qui ne sont pas architectes ou ingénieurs mais qui sont des travailleurs capables de mettre ensemble les briques dont la science est constituée. Je pense que la force de la science vient de la contribution collective de tous les scientifiques, et le total est beaucoup plus que la somme de chacune des parties. Je suis confiant en l'idée que les mathématiques, et toute la science également, ont un avenir brillant devant elles.

Eriko Hironaka
Topologie géométrique
Professeure associée de Mathématiques, Université de l'état de Floride

Quand j'avais environ douze ans, je me souviens de mon père assis près d'une grande cheminée dans une vieille ferme nichée dans les Alpes françaises. Il parlait avec trois de ses étudiants. J'étais assise auprès d'eux, lisant joyeusement un livre, appréciant la neige qui tombait dehors et la chaleur douillette à l'intérieur. Tout à coup, mon père et ses jeunes collègues ont arrêté de parler et se sont mis à réfléchir profondément. Leur immobilité m'a surprise et elle m'a semblé durer une éternité, alors qu'ils semblaient tous à l'aise et absorbés dans leur monde. Après un temps, quelqu'un a dit quelque chose et tous ont eu un sourire qui témoignait d'un plaisir tranquille et d'une délectation. J'ai pensé que quoi que soient les mathématiques, elles devaient être belles.

Les mathématiques m'ont inexorablement formée, mais je me sentais aussi mal à l'aise de me consacrer totalement à un domaine dans lequel mon père était si célèbre, et je n'ai pas commencé à étudier les mathématiques jusqu'à relativement tard au lycée. Mon ambivalence a mis du temps à se dissiper, et j'alternais entre des périodes où je consacrais une grosse partie de mon énergie à mon travail et d'autres où je cultivais une vie séparée de ce qui peut sembler parfois être un petit monde étouffant et compétitif. Maintenant, enfin, j'ai pu parvenir à un équilibre, avec mes deux enfants, un mari musicien de jazz, et une carrière universitaire épanouissante.

Rétrospectivement, je réalise que j'ai toujours voué une passion à la pensée abstraite. J'ai été élevé dans une famille bilingue et j'allais dans des écoles publiques aussi loin que dans le Massachusetts, au Japon, et en France. J'ai appris à aimer les moments de compréhension qui peuvent émerger d'un chaos initial et ce qui semble être des contradictions entre des langages et des cultures différents. Je sais que ce qui est “clairement normal” dans un endroit est souvent “clairement étrange” dans un autre : les japonais mangent du poisson cru mais presque jamais des carottes crues ; les américains peuvent marcher à l'extérieur pieds nus et ne pas enlever leurs chaussures en entrant dans une maison.

Ma recherche mathématique a tourné autour du fait de trouver des nouvelles connexions entre des domaines semblant distants. Ces dernières années, je me suis intéressée aux entiers algébriques et aux homéomorphismes de surfaces. Nous pensons souvent aux nombres comme se dressant seuls et statiques, alors que les homéomorphismes de surfaces engendrent de la dynamique. Pourtant les deux ont une complexité bien définie, ou une distance pour les modes les plus simples. On peut poser des questions analogues dans chaque contexte. Comment se comporte la complexité ? Étant donné un objet complexe, y-en-a-t-il toujours un autre de complexité moindre ? S'il y a des objets de complexité minimale, à quoi ressemblent-ils ? J'ai approché ces questions en utilisant des constructions combinatoires qui donnent naissance à la fois à des entiers algébriques et à des homéomorphismes de surfaces, révélant les relations cachées qui existent entre eux.

Lorsque j'étais une jeune enfant, j'étais étonnée de la manière dont les formes et les structures peuvent sortir des sons d'une symphonie, ou à la manière dont les nombres peuvent sembler avoir des couleurs associées. Partant de là, il ne semble pas si éloigné de voir des caractéristiques communes entre les entiers algébriques, les variétés algébriques en basses dimensions et les singularités, les compléments des nœuds et les liens, les homéomorphismes des surfaces, et les systèmes de Coxeter. J'éprouve de la reconnaissance de pouvoir participer à un effort qui cadre si bien avec les choses que j'imaginais enfant. Et par-dessus tout, je me sens chanceuse de pouvoir expérimenter, à ma propre manière, des interrogations et plaisirs que je voyais chez mon père et ses étudiants alors qu'ils étaient assis près de la cheminée dans une ferme il y a tant d'années.

Frances Kirwan
Géométrie algébrique et symplectique
Professeure de Mathématiques, Université d'Oxford

C'est une chose que de faire de la recherche en mathématiques, et c'en est plutôt une autre de l'expliquer à des non-mathématiciens, ou même à d'autres mathématiciens travaillant dans des parties différentes du sujet. C'est un des aspects les plus frustrants du fait d'être une chercheuse en mathématiques, bien que cela soit partiellement contrebalancé par le fait que les mathématiques transcendent les frontières politiques et culturelles : les auteurs du prochain article de recherche que je piocherai pour le lire peuvent aussi bien être indiens, japonais, russes ou brésiliens que venir de mon propre pays. Aussi plutôt que d'essayer de décrire ce que ma recherche implique (l'étude des espaces modulaires en géométrie algébrique), voici quelques souvenirs qui montrent comment (je pense) je suis devenue mathématicienne.

Mon souvenir mathématique le plus ancien est celui de mon père m'expliquant la preuve du théorème de Pythagore sur les triangles à angle droit ; c'était la première fois que me venait l'idée qu'il est possible de prouver que quelque chose est toujours vrai. Le deuxième souvenir, beaucoup plus tard, me ramène à une première conférence à laquelle j'assistais comme étudiante de premier cycle à Cambridge : l'orateur (Tom Körner) enleva ses chaussures et ses chaussettes et essaya de les remettre dans le mauvais ordre pour nous montrer que la composition des opérations n'est en général pas commutative. J'ai honte de dire que c'est la seule conférence mathématique à laquelle j'assistai à Cambridge dont il me reste un souvenir précis de l'orateur et de ce qu'il (c'était toujours il, jamais elle, avec peut-être une exception) nous racontait.

Alors vint le moment où je me rappelle avoir ressenti que j'étais une chercheuse en mathématiques pour la première fois. C'était lors d'une de ces rencontres hebdomadaires à laquelle j'assistais comme étudiante diplômée à Oxford avec mon tuteur : Michael Atiyah. La fois précédente, nous avions parlé d'un cas particulier de ce qui deviendrait le sujet de ma thèse. Pendant la semaine entre nos deux rencontres, j'avais réalisé que ce que nous avions conjecturé avec désinvolture n'était pas vrai, et j'avais travaillé pour le corriger. Quand nous nous rencontrâmes à nouveau, je découvris que mon tuteur avait poursuivi les mêmes réflexions, ce qui était très satisfaisant.

La satisfaction d'une compréhension partagée de la solution à un problème difficile est l'une des raisons principales qui font que j'apprécie de collaborer dans mon travail de recherche. La première occasion, il y a plus de vingt ans, a été alors que j'étais à Harvard en tant que chercheuse junior (une position post-doctorale). J'ai donné un séminaire à Yale, où Ronnie Lee a suggéré que nous collaborions : cela a amené de nombreuses discussions, qui étaient à la fois divertissantes et pleines d'enseignements pour moi, et finalement, cela amena à quelques articles communs. C'est aussi gratifiant de travailler pour soi seul, mais quand l'inspiration pointe, elle s'accompagne en général d'une urgence à expliquer aux autres la nouvelle lumière qui a été apporté. Les collaborateurs, qui ont pensé dur aux mêmes questions, ont tendance à être très contents d'écouter (et peuvent même pointer une faille d'argumentation s'il y en a une). Sans eux, une audience adéquate n'est pas toujours facile à trouver : je peux exprimer mon excitation à faire quelques progrès à mon mari et à mes enfants, par exemple, et ils seront contents, mais ils ne veulent sûrement pas entendre l'explication de ce que j'ai fait !

Gerd Faltings
Théorie des nombres, géométrie algébrique
Médaillé Fields
Directeur de l'Institut Max Planck pour les Mathématiques, Bonn

J'ai grandi dans une ville minière de la ceinture de la rouille en Allemagne[3]. Mon père était un physicien travaillant comme technicien dans l'industrie chimique et de ce fait, je m'intéressais à la physique. Après quelques temps, je vins aux mathématiques parce que je les trouvais plus intéressantes. Tout est très logique en mathématiques, et cela m'a attiré.

[3]région industrielle du Nord-Est de l'Allemagne.

J'aime bien lorsque quelque chose est définitivement juste ou définitivement faux.

J'ai fait mes études à Münster, qui était proche de mon domicile. J'avais un très bon professeur qui m'encouragea à étudier le travail d'Alexander Grothendieck dans le domaine de la géométrie algébrique, bien que ça ait à l'époque passé de mode. Même maintenant, des personnes considèrent que c'est beaucoup trop abstrait ; pourtant, j'ai profité de ces solides fondements pendant toute ma carrière.

Je travaille en théorie des nombres et j'ai prouvé, à vingt-huit ans, quelque chose qu'on appelle la conjecture de Mordell, qui avait été une conjecture ouverte depuis 1924 ! À cause de cela, pratiquement en une nuit, je suis passé du statut de pur anonyme à celui de star de la profession. Et même mieux, alors que je prouvais la conjecture, j'ai trouvé un certain nombre de problèmes que j'ai résolus "à la main" mais leur résolution devint plus satisfaisante lorsque j'édifiai une théorie plus complète. Quelques années après, j'ai essayé de comprendre un article de Paul Vojta et j'ai fini par obtenir une théorie complètement nouvelle. De par mon expérience, je n'ai pas besoin de plan stratégique de recherche, mais ces problèmes intéressants et ces nouvelles méthodes tendent à venir par eux-mêmes. Je fais rarement des conjectures moi-même. Habituellement j'ai une idée qui peut marcher dans quelques cas et je l'essaie. Parfois ça marche. Souvent ça ne marche pas et alors, je dois en essayer une autre. Le travail que je fais est très gratifiant parce que je me trouve moi-même derrière le produit que je crée. C'est très satisfaisant si pouvez créer votre propre production et la terminer, en ayant accompli quelque chose que les autres n'auraient pas pu accomplir. Votre nom est alors attaché à votre œuvre, ce qui est plus satisfaisant que la plupart de ce que les gens expérimentent dans leur travail. Je pense être très privilégié.

J'ai une épouse et deux filles, qui ont maintenant dix-huit et vingt ans. Elles ont des inclinations pour les mathématiques. Nous aimons faire des puzzles et parfois nous jouons aux cartes ensemble. Elles aiment bien jouer à des jeux sur ordinateur qu'elles me montrent parfois et obtiennent que je les leur achète, aussi. Nous aimons aller à l'opéra, ou voir des ballets ou au moins, les regarder à la maison sur DVD.

Ingrid Chantal Daubechies
Mathématiques appliquées, ondelettes
Professeure de mathématiques William R. Kenan, Jr., professeure de mathématiques appliquées et de mathématiques computationnelles, Université de Princeton

Je suis née et j'ai grandi dans la région minière en Belgique. J'ai étudié la physique théorique et je n'ai donc pas seulement un diplôme en maths. J'ai commencé mon travail de recherche en physique mathématique, ce sont des mathématiques dirigées vers ou motivées par la physique. Quelques années après ma thèse, je devins intéressée par les mathématiques appliquées non seulement pour comprendre le monde physique autour de nous, mais également je me mis à m'intéresser à la technologie, quand vous construisez des choses. L'analyse mathématique peut aussi nous amener à construire les choses différemment, plutôt qu'à étudier le monde déjà existant.

Une chose marrante me frappa après que j'eus fait cette transition. J'avais contribué à la construction de bases d'ondelettes - de nouveaux outils pour analyser les signaux digitaux et les images - et je réalisai que tout le monde considérait que les nouveaux concepts mathématiques associés à ce travail comme "construits", c'est à dire construits par les mathématiciens qui les avait publiés les premiers. C'est différent de la manière dont la plupart des mathématiciens (purs) considèrent leur travail : ils se considèrent plus comme des découvreurs, qui mettent au jour un nouveau territoire ; ils sentent profondément que "c"'était déjà là, et qu'ils n'ont fait que le découvrir. Réaliser cela me fit penser - je savais exactement ce que les plus "purs" mathématiciens voulaient dire par là, parce que je l'avais ressenti moi-même : le sentiment de merveille à finalement comprendre la structure complète qui explique beaucoup d'observations effectuées plus tôt. J'avais ressenti cela dans le travail que j'avais fait précédemment, et beaucoup d'autres mathématiciens auraient été d'accord sur le fait que le travail est un travail de découverte. En travaillant sur les ondelettes, j'avais ressenti la même chose - ici, plutôt, la plupart des mathématiciens voyaient cela comme une "construction" plutôt que comme une découverte. Cette interrogation m'a fait souhaiter trouver la frontière entre ces deux parties des mathématiques. Je ne l'ai pas trouvé et je suis maintenant convaincue qu'elle n'existe pas : toutes nos mathématiques sont construites. C'est une construction que nous faisons dans le but de penser à propos du monde. Je n'irai pas jusqu'à dire que la pensée mathématique est la seule pensée que nous ayons pour penser logiquement au sujet des choses que nous observons. Il y a d'autres manières par lesquelles nous expérimentons le monde et nous interagissons avec lui - des manières qui ont davantage à voir avec les émotions et les délices sensuels et qui amènent à d'autres choses merveilleuses, comme l'amour et l'art - mais quand nous voulons penser logiquement, nous sommes ramenés à ce que sont essentiellement les mathématiques Par conséquent, je ne suis pas tout à fait d'accord avec Galilée : le livre de la nature n'est pas écrit en langage mathématique ; plutôt, les mathématiques sont le seul langage que *nous* connaissions pour expliquer logiquement la nature. Nous aimons la pensée logique comme une activité - comprendre ces choses nous donne du plaisir. C'est pourquoi des activités comme les puzzles mathématiques tels le Sudoku ou le Rubik's Cube sont devenus si populaires. Cela ne veut pas dire que nous soyons tous égaux pour apprécier les mathématiques hautement avancées - aimer les mathématiques et être bon en mathématiques au point de devenir un mathématicien professionnel est un peu comme devenir un athlète professionnel - mais cela signifie que vous n'êtes pas obligé d'exercer un talent bizarre pour "faire" des mathématiques, exactement comme vous pouvez apprécier un sport même si faire ce sport n'est pas votre profession.

De nombreux problèmes sur lesquels j'ai travaillé exploitent en quelque sorte l'idée que l'objet ou la solution qui est recherché(e) a une description "clairsemée". Ce que cela signifie, c'est que vous avez une collection de questions que vous pouvez poser à propos de cet objet, et vous savez qu'il y a une manière de complètement déterminer l'identité de l'objet en obtenant les réponses à seulement quelques (disons dix) questions, mais ce doit être les dix "bonnes" questions. Vous n'avez pas d'idée à l'avance des questions qui seront les bonnes questions étant donnée une requête particulière, cela pourrait être n'importe quelle petite collection de questions parmi elles. L'un des problèmes peut être qu'admettons que vous deviez tirer au hasard un ensemble de disons vingt questions *fixées* de telle manière que vous puissiez toujours savoir de quel objet il s'agit, indépendamment de ce qu'étaient les dix bonnes questions pour cet objet particulier. Les informaticiens savent depuis longtemps résoudre quelques problèmes de ce type, et leurs heuristiques sont utilisées par exemple dans la conception des algorithmes pour les moteurs de recherche sur la toile. Maintenant que la technologie a avancé au point que nous pouvons collecter plus de résultats de mesures que nous ne pouvons en gérer, des questions différentes d'un type similaire émergent dans de nombreux autres domaines. Pour le moment, dans trois collaborations dans lesquelles mes étudiants et moi-même sommes impliqués, dans trois domaines complètement différents que sont la géophysique, la biologie et les neurosciences, ont partout émergé des problèmes de données clairsemées de ce type. Il est important de développer des algorithmes qui permettent de gérer ces nouveaux problèmes et qui peuvent les gérer vite. Pour prouver la convergence de ces algorithmes pour presque toutes les solutions possibles qui peuvent vous intéresser, les domaines mathématiques qui entrent en jeu sont assez différents de ceux qui sont utilisés en mathématiques appliquées et de ce fait, je dois apprendre de nouvelles façons de penser. C'est une chose que j'aime beaucoup dans les mathématiques appliquées : dans une certaine mesure, le problème impose quels sous-domaines des mathématiques vous devez apprendre, et ainsi vous devez souvent apprendre de nouvelles connaissances. Et c'est ce que j'apprécie : apprendre à mon esprit à affronter de nouveaux obstacles, apprendre à maîtriser de nouvelles structures.

Joan S. Birman
Topologie, théorie des nœuds
Professeure émérite de Mathématiques, Lycée Barnard, Université de Columbia

Pourquoi ai-je choisi les mathématiques ? Je ne suis pas sûre que "choisir" est le bon mot, plutôt, les mathématiques m'ont choisie. Lorsque j'étais une petite enfant, je voulais toujours comprendre comment les choses marchaient : comment concevoir un moulin à vent robuste qui ne tomberait pas, avec des tiges et des bobines, était un exemple. Prédire les formes des tourbillons engendrés par de nombreuses billes roulant en était un autre. J'étais fascinée par de telles questions, appréciant une certaine forme de jeu solitaire, et souvent, je ne voulais pas quitter mon jeu pour aller manger quand on m'appelait, de la même manière que je trouve difficile d'arrêter de travailler sur un problème de maths aujourd'hui. Dès que j'ai réalisé que les mathématiques étaient pleines de telles questions provoquant la réflexion et vous donnent des outils pour leurs solutions, je me suis destinée à cette matière. Par exemple, un instituteur me demanda si le produit de deux nombres impairs est pair ou impair. Qu'est ce qu'un nombre impair, qu'est-ce qu'un nombre pair ? Pourquoi ? De telles questions étaient un défi et je relevais le défi. Ce qui est également important, c'est que j'y arrivais, et que réussir dans une matière renforce notre intérêt naturel pour elle. Donc de nombreuses façons, on peut dire que les mathématiques m'ont choisie, bien que j'aie pris de multiples détours avant de commencer une carrière en mathématiques, parce que les grands choix de vie ne sont jamais simples. Ma spécialité à l'intérieur des mathématiques m'a choisie aussi. Quand j'ai eu à choisir un sujet de thèse, j'ai essayé plusieurs coups, mais à un moment, j'ai entendu parler d'une question sans réponse dans laquelle il était question de tresses, ça m'a accrochée ! Les tresses et les nœuds sont omniprésents dans la nature. Il y a des images dans mes fichiers de tresses dans les anneaux de Saturne, de longues boucles attachées d'ADN, et même un nœud très visible dans le virus d'Ebola. Et quelque chose de plus important de mon point de vue, les tresses et les nœuds sont également omniprésents en mathématiques.

L'étude des nœuds fait partie d'une partie des mathématiques appelée la topologie. Voici encore un exemple, tiré de mon propre travail, d'une façon dont les nœuds apparaissent de façon inattendue dans une partie des mathématiques qui est loin de la topologie, notamment les équations différentielles. Dans les années 60, le météorologiste E. N. Lorenz s'intéressa à la prédiction de la météo. Il croyait qu'elle était gouvernée par un grand système d'équations différentielles, et si c'était le cas, elle serait précisément prévisible si quelqu'un connaissait les valeurs des paramètres à un moment donné. Hélas, c'était loin d'être le cas, car quand les météorologues savent où un ouragan démarre, ils ne peuvent pas, même avec les ordinateurs les plus puissants, prédire son chemin dans le futur à long terme ou bien sa sévérité avec une réelle quelconque précision. Dans le but de mieux comprendre, Lorenz chercha l'exemple le plus simple possible de cette imprévisibilité et fut amené à un système d'équations différentielles en trois variables qui illustrait le phénomène, même si elles n'étaient plus liées à la météo. Les solutions de ses équations s'avérèrent être le paradigme de ce que nous connaissons aujourd'hui comme le "chaos". Dans mon propre travail avec R. F Williams dans le milieu des années 80, nous avons appris que les orbites fermées de la solution des équations de Lorenz sont une vaste collection de nœuds infiniment nombreux ; et aussi, n'importe quel couple de deux de ces nœuds peut être séparé sans couper l'un des deux nœuds. Cela nécessite beaucoup de structure parce que tous ces nœuds doivent s'intégrer dans un flot lisse dans l'espace à trois dimensions. Maintenant, la théorie des nœuds et les équations différentielles sont des parties des mathématiques très éloignées, et personne ne pensait que des nœuds se cachent, en allant vite, dans n'importe quel système d'équations différentielles. Nous comprenons maintenant que, en allant vite, dans tout système d'équations différentielles qui gouverne un flot chaotique dans une région de l'espace à trois dimensions, le nombre et la variété de nœuds qui interviennent est une mesure du caractère chaotique du système considéré. Les implications des nœuds de Lorenz, sont, comme je l'ai écrit, un sujet qui est toujours étudié.

John Horton Conway
Théorie des groupes, théorie des nombres, géométrie, combinatoire, théorie des jeux
Professeur John von Neumann de mathématiques appliquées et computationnelle et Professeur de mathématiques, Université de Princeton

Je suis né à Liverpool en Angleterre, en 1937. Mon père était assistant de laboratoire dans une grande école de Liverpool que deux Beatles ont fréquentée. Mon père avait beaucoup de connaissances en science, et il était également très intéressé par la poésie. À la maison, il marchait de long en large, parfois nu, en récitant de la poésie pendant qu'il se rasait. Il avait un caractère étrange, c'était une personne intéressante, je pense. Mon père était aussi gardien de raids aériens. De temps à autres, les sirènes retentissaient. La guerre s'est enracinée en moi quand j'étais enfant. Parfois, des enfants ne venaient pas à l'école et nous apprenions que leur maison avait été bombardée et qu'ils avaient été tués. Un jour, j'ai été évacué vers le pays de Galles. Le schéma d'évacuation pour les enfants n'a jamais marché parce que leur mère les aimait trop et ils finissaient par revenir. Il me semble me souvenir qu'une fois, j'ai parlé galois.

Quand j'ai intégré une nouvelle école à l'âge de onze ans, j'ai eu une entrevue avec le directeur. Il m'a demandé ce que je voulais faire de ma vie et je lui ai dit que je voulais étudier les mathématiques à Cambridge. C'est ce que je fis sept ans plus tard. Quand j'étais dans cette école, j'étais justement aussi intéressé par les sciences, j'avais toujours été premier, second ou troisième dans toutes les matières, mais quand j'entrais dans la puberté, je ne pouvais plus m'y intéresser. Je commençais à traîner avec des enfants qui ne s'intéressaient à rien, les types du fond de la classe, parce qu'ils avaient des caractères intéressants (j'ai ce défaut depuis cette époque, j'aime les caractères intéressants). Je commençais à échouer et finalement, l'un de mes professeurs eut une conversation avec moi et alors, je changeais d'attitude et je redevins l'un des meilleurs élèves de la classe, en particulier en sciences. Je gravis les échelons académiques à Cambridge, et devins Sujet de la Société Royale. Peu de temps après ça, Princeton m'offrit un poste et je suis là depuis vingt-et-un ans.

Au sein de la communauté scientifique, je suis surtout connu pour le jeu de la vie, qui a été à l'origine du domaine des automates cellulaires. J'ai aussi découvert d'énormes groupes de symétrie divers. C'était assez difficile à faire et le sujet était très intéressant à ce moment-là. Je suis fier, cependant, d'avoir découvert tout un nouveau monde de nombres, que Donald Knuth a appelés les "nombres surréels". J'aurais aimé inventer ce nom. Il y a plus d'un siècle, un grand mathématicien allemand, Georg Cantor, découvrit la théorie des nombres infinis. Deux mille ans plus tôt, Archimède avait découvert la théorie des nombres réels que nous utilisons habituellement. Les nombres surréels incluent les deux. Certains d'entre eux sont infinis et sont égaux aux nombres de Cantor. Certains d'entre eux sont égaux aux nombres réels mais ils sont aussi un mélange entre eux et les nombres infinitésimaux. Quand je les ai découverts, je suis resté dans un rêve éveillé permanent pendant six semaines en pensant à la manière dont l'explorateur Hernando Cortez regarda au fond du Pacifique et vit un monde qu'aucun occidental n'avait jamais vu avant lui. Personne n'avait jamais vu ce que j'avais devant les yeux. Bien que cela soit complètement abstrait, c'était très réel. Les choses abstraites peuvent être réelles. Les nombres peuvent être plus réels que les objets physiques.

C'était un nouveau monde incroyable de nombres que je découvrais, plus que des nombres.

Il y eut un temps aux alentours de mes vingt ans où j'étais assez déprimé parce que j'avais obtenu très facilement un poste à l'Université de Cambridge et je pensais alors que je n'avais pas fait assez pour justifier que j'obtienne un tel poste. Alors je fis plusieurs découvertes les unes après les autres, la première étant celle des "gros groupes" dont le mathématicien technique pense que ces choses ont été ma meilleure réalisation. Dans un laps de temps très court, j'ai découvert le "jeu de la vie", les nombres surréels. Après un petit temps, il sembla que tout ce que je touchais se transformait en or, si ce n'est que peu de temps plus tard, plus rien de ce que je touchais ne se transforma en or.

C'est une chose marrante qui arrive aux mathématiciens. Quelle est l'ontologie des objets mathématiques ? Comment existent-ils ? En quel sens existent-ils ? Il ne fait aucun doute qu'ils existent mais vous pouvez en parler et les produire sauf en y pensant. C'est assez étonnant et je continue de ne pas comprendre cela, en ayant été un mathématicien toute ma vie. Comment les choses peuvent-elles être là sans vraiment être là ? Il n'y a aucun doute que 2 est là, ou 3 ou la racine carrée de Omega. Ce sont des choses très réelles. Je ne sais toujours pas en quel sens les objets mathématiques existent, mais c'est un fait. Bien sûr, il est difficile de dire en quel sens un chat est là dehors, également, mais nous savons que le chat est là, définitivement. Les chats ont une réalité entêtée mais peut-être que les nombres sont têtus aussi. Vous ne pouvez pas faire aller un chat dans une direction qu'il ne veut pas suivre. Vous ne pouvez pas faire ça non plus avec un nombre. J'utilise seulement le mot "nombre" parce que vous avez une vague idée dans la tête de ce que je veux dire. Les objets qu'un mathématicien étudie sont plus abstraits que les nombres mais très réels.

Je pense souvent aux chats. Je pense aux arbres. Je pense aux chiens occasionnellement mais je ne pense pas trop à eux parce que les chiens sont agréables. Ils font ce que vous souhaitez qu'ils fassent en quelque sorte. Certaines personnes pensent que les mathématiques sont ce que vous croyez qu'elles sont et qu'elles sont créées par nos esprits. Je ne le crois pas. Je suis un platonicien de cœur, bien que je sache qu'il y a de très grandes difficultés à adopter ce point de vue.

Jean-Pierre Serre
Algèbre, géométrie, théorie des nombres, topologie
Médaillé Fields, Prix Abel
Professeur honoraire, Collège de France

Je préfère fermer les yeux quand je pense aux mathématiques. Je fais mon meilleur travail de nuit, dans un demi-sommeil. Parfois je vais me coucher en pensant, "Ah, j'ai un joli lemme à prouver - ou réfuter." (Devrais-je expliquer ce qu'est un lemme ? Un grimpeur en montagne doit s'accrocher à des prises pour passer d'un niveau au suivant. Les lemmes sont les prises du mathématicien.) Bien sûr, on doit écrire les choses plus tard, ne serait-ce que pour la publication. Parfois vous trouvez alors que ce que vous aviez pensé était faux, mais c'est assez rare.

Ma thèse est un cas typique. Il y avait une nouvelle idée simple au premier abord mais plutôt puissante (la "fibration d'un espace bouclé" trouvée de nuit, dans un train). Cette idée de base n'était pas suffisante : il y avait une partie technique qui nécessitait un lemme plutôt difficile. Pendant trois jours, je ne pouvais voir la preuve de ce lemme que lorsque j'étais étendu dans mon lit, yeux fermés. Après ça, je le compris suffisamment pour pouvoir l'écrire et ma thèse était essentiellement terminée.

À ce moment-là, je travaillais dans une branche des mathématiques appelée topologie. Deux ans après, je commençais à faire quelque chose d'autre : les équations à plusieurs variables complexes (le sujet favori de mon tuteur de thèse Henri Cartan). Cela ne dura pas longtemps. Après une année, je fus attiré par la géométrie algébrique, et alors par la théorie des nombres, la théorie des groupes, etc. Le résultat final est que, même maintenant, je ne suis un expert d'aucun sujet !

Je crois que je devrais vous parler des quelques conjectures que j'ai faites dans la fin des années cinquante. Qu'est-ce qu'une conjecture ? C'est quelque chose qui l'on ne peut pas prouver mais dont on s'attend à ce que ça soit vrai et intéressant. J'en ai fait quelques-unes, dont certaines complètement fausses quand j'avais moins de trente ans. Je suis devenu plus précautionneux avec l'âge. Quelques unes de ces conjectures ont été beaucoup étudiées par de nombreuses personnes. Parmi elles, il y a celles sur la cohomologie de Galois qui sont appelées "conjecture I" et "conjecture II." La conjecture I est maintenant un théorème (elle a été prouvée trois ans après que je l'ai faite). Tandis que la conjecture II est toujours ouverte quarante-cinq ans après, mais la plupart des cas particuliers ont été démontrés. Peut-être s'avèrera-t-elle fausse dans les autres cas ? Je ne pense pas que cela soit, mais ce que j'espère vraiment, c'est qu'elle sera résolue : oui ou non !

Si vous cherchez sur le web "conjecture de Serre", vous en trouverez probablement une différente (sur les représentations de Galois) que j'ai faite au début des années 70 (et dont j'ai proposé une forme plus restreinte dans le milieu des années 80).

Elle est devenue très populaire pour deux raisons : elle est reliée au dernier théorème de Fermat (la mauvaise raison) et c'est une première marche vers le "programme de Langlands en caractéristique p" (la bonne raison). Elle semblait hors d'atteinte jusqu'à il y a environ cinq ans, quand soudainement, quelqu'un eut une brillante idée et en résolut une grosse partie. Maintenant, avec l'aide de différentes personnes, il semblerait que cette conjecture soit morte : c'est devenu un théorème ! En effet, dans quelques semaines, j'assisterai à une conférence de deux semaines près de Marseille pendant laquelle la preuve sera résumée et expliquée (même deux semaines ne sont pas suffisantes pour donner les détails complets).

Quand j'ai fait cette conjecture, dans sa forme restreinte, j'ai décidé de l'écrire dans un formalisme avec lequel j'étais familier, je savais que ça devrait être fait autrement. Les deux expressions étaient bien sûr similaires, mais non a priori équivalentes. Il y avait un conflit entre ma décision consciente de rendre les choses "faciles" et mon désir inconscient de ce que ça n'était pas "le bon chemin". Ce conflit m'a hanté ; cela m'a rendu très mécontent. Il y eut même une nuit horrible pendant laquelle j'eus l'impression qu'il y avait deux parties de mon cerveau qui se battaient l'une contre l'autre et que ça tournait mal. Ensuite, quelques mois plus tard, je trouvai un exemple montrant que les deux points de vue ne sont pas équivalents, et que le point de vue correct n'est pas celui que j'avais choisi. Mais j'ai aussi vu que, dans tous les cas vraiment intéressants, ils sont équivalents. Curieusement, trouver ce "contre-exemple" m'a rendu incroyablement heureux : les deux côtés de mon cerveau s'étaient réconciliés. Happy end.

Kate Adebola Okikiolu
Géométrie analytique, géométrie spectrale
Professeure de mathématiques, Université de Californie, San Diego

Ma mère est britannique, d'une famille syndicaliste et très intéressée par la lutte des classes ; elle a rencontré mon père, qui est Nigérien, quand ils étaient tous les deux étudiants en mathématiques à Londres. Mon père était un mathématicien très talentueux, et après que mes parents se soient mariés, il a obtenu un poste dans le département de mathématiques de l'Université d'Est Angleterre. Pendant mon enfance, l'école que je fréquentais était très homogène d'un point de vue ethnique. Je ne pus échapper à de lourds problèmes de racisme, alors que ma mère expliquait tout de manière politique. Mes parents se séparèrent après que mon père ait démissionné de son poste universitaire pour se focaliser sur ses inventions, et ma mère termina ses études et devint professeur dans une école de mathématiques. Nous partîmes habiter dans la banlieue très cosmopolite de Londres, ce qui fut comme une nouvelle naissance pour moi ; c'est là que mon intérêt pour les mathématiques a réellement commencé. J'ai appris les mathématiques en autodidacte, en lisant des livres, ce qui est peut-être étrange dans la mesure où mes deux parents étaient impliqués dans cette matière. En même temps, je consacrais beaucoup de temps à étudier l'art et je voulais mener une carrière dans cette direction jusqu'à ce que je sois finalement convaincue par ma famille que je devrais d'abord travailler pour obtenir des diplômes en mathématiques pour assurer que je pourrais gagner ma vie. J'allai à Cambridge, ce qui représente un second changement majeur dans ma vie. Comme j'apprenais davantage de mathématiques, je vis qu'elles constituaient un monde entier dans lequel de nombreuses personnes choisissaient de vivre, un monde en bien des manières plus réel que le monde réel : il semble permanent, éternel, et offre un sens profond de sécurité parce que presque toutes les personnes qui le comprennent s'accordent sur ce qu'est la vérité.

Lorsque je finis à Cambridge, j'étais très impliquée dans les mathématiques et je ne souhaitais plus d'autre carrière. Je partis à UCLA pour un travail diplômant, ce qui représente encore un changement radical dans ma vie. Après mes diplômes, j'obtins un poste à l'Université de Princeton, où je restais quatre ans et où je rencontrai mon mari, qui est aussi un mathématicien. Après ça, je passai deux années au MIT, et ces dix dernières années, mon mari et moi avons travaillé à UCSD. Nous avons deux enfants.

Mon champ de recherches est le domaine de la géométrie spectrale, l'étude de la façon donc la forme d'un objet affecte ses modes de résonance. Une question célèbre de ce domaine est "peut-on entendre la forme d'un tambour ?". La géométrie spectrale fait se rejoindre différentes parties de la science, incluant l'ingénierie et la physique, aussi bien qu'un certain nombre de domaines différents des mathématiques. Pourtant, des questions de nature assez différentes sont étudiées dans chaque discipline. Je suis une mathématicienne analyste, ce qui me permet d'apprécier l'infini et l'infinitésimal. En ce moment, une des choses sur lesquelles je travaille est de comprendre quelle est la longueur d'onde totale d'une surface comme une sphère, ou quelque chose de complexité plus grande, comme la surface d'un bagel ou d'un bretzel. Quelle est sa longueur d'onde totale ? Si vous frappez une surface, elle peut résonner à n'importe laquelle d'une des fréquences d'une liste, et la longueur d'onde du son produit par la vibration est inversement proportionnelle à la fréquence. Dans un modèle mathématique idéalisé, il y a un nombre infini de longueurs d'onde possibles. La longueur d'onde totale devrait être la somme de toutes ces longueurs d'onde individuelles sauf que la somme infinie est égale à l'infini. Heureusement, un nombre fini peut lui être assigné par un processus légèrement élusif appelé régularisation. (Ce processus est aussi utilisé en physique pour mystérieusement obtenir des réponses justes à des formules qui n'ont vraiment pas de sens !). Je me suis d'abord intéressée à la longueur d'onde totale comme modèle lié à une question qui peut être rapidement dite comme "peut-on entendre la forme de l'univers ?". Pourtant, la longueur d'onde totale est un concept que l'on retrouve dans différentes parties des mathématiques et ces relations m'intriguent.

Bien que je ne puisse dire qu'il est facile d'équilibrer mes ambitions en recherche mathématique avec le désir d'être de bons parents, des enseignants inspirants, ou des personnes qui participent à un changement social positif du monde, je me sens très chanceuse de pouvoir passer ma vie à affronter ces défis, qui sont extrêmement intéressants et importants pour moi.

Karen Keskulla Uhlenbeck
Équations différentielles partielles, théorie de gauge
Prix Abel
Professeure de mathématiques Sid W. Richardson Regents, Université du Texas, Austin

Il serait facile de dire soit trop peu soit trop à propos du passé. J'ai été une enfant chanceuse, grandissant dans le climat du monde de l'après-seconde guerre mondiale. Nous jouions dans les collines rurales du nord du New Jersey, en nous préparant avec chance au grand monde de la culture : art, musique, science, et intellect. Ma mère, une artiste, reste une influence majeure de ma vie bien qu'elle soit morte il y a de nombreuses années. À travers elle, j'ai reçu exactement la bonne dose d'introduction à des styles de vie non traditionnels et d'ambition intellectuelle.

Nous devrions nous rappeler qu'une fille ne devenait pas mathématicienne en faisant ce que l'on attendait d'elle dans les banlieux du New Jersey. Je découvris, par mon père ingénieur, les livres populaires du physicien George Gamow et de l'astronome Frederick Hoyle. Je souhaitais en moi-même que ma vie future incluât des activités à la fois scientifiques et d'extérieur. J'aurais aimé tout faire ; c'est peut-être seulement accidentellement si je suis devenue si forte en mathématiques et si j'ai tant aimé cette matière.

J'ai appris les mathématiques en tant qu'étudiante de première année à l'Université du Michigan. Je me rappelle encore le frisson de prendre les limites pour calculer les dérivées, et les petites boîtes utilisées pour prouver le théorème de Heine-Borel. La structure, l'élégance, et la beauté des mathématiques m'ont frappée immédiatement, et j'ai perdu mon cœur pour elles. Je me rappelle très vivement les premiers théorèmes que j'ai compris, et même les théorèmes que j'ai prouvés moi-même... en regardant juste dans le livre, en y pensant, et en inventant sans même jeter un coup d'œil rapide au texte. De là, la marche d'escalier vers la recherche mathématique n'a pas été très haute. Je me régale toujours à la minute et j'aime ces petites réussites personnelles, même si de grandes structures compliquées et très impersonnelles construites sur ces petites idées continuent de me remplir d'admiration.

J'ai eu le privilège d'être l'une des actrices d'un des plus grands développements des mathématiques des trente dernières années. Durant cette période, la théorie et la structure des équations différentielles partielles ont été utilisées et développées dans le but d'étudier la géométrie. Beaucoup d'idées centrales viennent de la physique théorique. J'ai eu une vie intellectuelle excitante. Expliquer le pouvoir et la beauté des mathématiques à des personnes extérieures à la discipline est difficile. Les mathématiques prennent des idées dans le monde extérieur et elles les rendent abstraites, jonglent avec pour créer de la structure, et ensuite les recrachent avec des conséquences incroyablement larges et utiles. La meilleure comparaison que la plupart d'entre nous faisons est une comparaison avec la structure musicale. De nombreux mathématiciens sont des musiciens sérieux.

Que faut-il pour être mathématicien ? Mon expérience a été que l'ingrédient essentiel est la fascination pour la théorie et la manipulation des structures. Cela ne requiert pas d'être brillant, mais plutôt d'aimer ce grand jeu !

Je ne suis pas sûre d'être heureuse que les mathématiques soient utiles. L'utilité fait souvent plus de mal que de bien (pour citer ma mère). Je suis contente d'obtenir des récompenses esthétiques.

Sir Michael Francis Atiyah
Topologie algébrique, géométrie algébrique
Médaillé Fields, Prix Abel
Premier maître du Trinity College, Université de Cambridge; Premier directeur de l'Institut Isaac Newton, Cambridge ; et Professeur honoraire de mathématiques, Université d'Edinburgh

De nombreux scientifiques du vingtième siècle émergèrent de contextes complexes, forcés d'émigrer à cause de l'oppression de l'Allemagne nazie. Ce cosmopolitanisme forcé peut avoir élargi leurs perspectives et aidé à la suite de leur carrière. Alors que je n'étais pas, quant à moi, un réfugié d'Hitler, j'ai effectivement fait des allers-retours dans mon enfance, entre l'Europe et le Moyen-Orient. Ma mère était écossaise, mon père libanais, et nous vivions à Khartoum. J'ai fait mes études secondaires jusqu'à l'âge de seize ans en Egypte, et ma grand-mère vivait au Liban.

En 1945, nous sommes partis en Angleterre, et après mes études à Cambridge, nous avons passé la plupart du temps aux États-Unis. Je trouve difficile de répondre à la question "D'où êtes-vous originaire ?". De la même façon, je trouve une difficulté identique à répondre à la question "Quel genre de mathématicien êtes–vous ?". En général, j'élude la question en disant simplement que je suis un géomètre au sens large, sécurisé par le confortable "Dieu est un géomètre". Pour moi, il y a juste un monde, même si des parties de lui nous sont plus familières que d'autres, de la même façon, il y a une seule mathématique. Je n'aime pas les frontières, politiques ou intellectuelles et je trouve que les ignorer est un catalyseur essentiel de la pensée créative. Les idées peuvent ainsi circuler sans obstacle à leur libre cours.

Ma propre trajectoire mathématique a commencé en géométrie algébrique et je suis passé par petites étapes naturelles vers la topologie et la géométrie différentielle et vers l'analyse et finalement vers la physique théorique. À chaque étape, c'était un processus très social, dans lequel des amitiés soudées se sont formées, qui ont élargi mes horizons. Fritz Hirzebruch à Bonn fut mon premier collègue et mentor, et sa rencontre annuelle Arbeitstagung devint un grand lieu de rencontres pour ma génération. Jean-Pierre Serre à Paris et Princeton m'a éduqué par la clarté et l'élégance de sa pensée et de son enseignement.

À Princeton et plus tard, à Harvard et au MIT, j'ai forgé de proches partenariats avec Raoul Bott et Is Singer, qui m'apprit les groupes de Lie et l'analyse fonctionnelle. De retour à Oxford, je fis ma première tentative vers la physique moderne sous le parrainage de mon vieil ami Roger Penrose. Cette modeste incursion se développa ensuite en une préoccupation majeure sous la stimulation et le guidage d'Edward Witten. Les années suivantes, j'eus la chance d'attirer de nombreux étudiants très brillants, dont certains devinrent, finalement, des collègues ou des collaborateurs. J'ai beaucoup appris d'eux, réalisant en même temps comment le goût mathématique et les compétences sont le reflet de la personnalité, les perspectives doivent être accueillies et la créativité s'épanouit mieux avec un minimum de guidage et un maximum de liberté et d'encouragement.

Les mathématiciens sont généralement perçus comme des sortes de machines intellectuelles, de gros cerveaux qui mangent des nombres et recrachent des théorèmes. En fait, nous ressemblons, comme le disait Hermann Weyl, davantage à des artistes créatifs. Bien qu'extrêmement constraints par les règles de la logique et les expérimentations physiques, nous utilisons notre imagination pour faire de grands sauts dans l'inconnu. Le développement des mathématiques pendant des milliers d'années est l'une des plus grandes réalisations de la civilisation. Quelques mathématiciens, notamment G. H. Hardy, glorifièrent leur "pureté" et dédaignèrent tout ce qui était utile et appliqué. Je prends le parti opposé et je suis très content si quelque chose que j'ai fait s'avère avoir une utilité pratique. Plus généralement, je vois les mathématiques comme contribuant à la science et à la société et comme une partie intégrante de l'éducation et de l'apprentissage.

Comme résultat de cela, j'ai toujours considéré que c'est une responsabilité que d'endosser des rôles généraux comme la présidence de la Société Royale, la direction du Trinity College, Cambridge ou la présidence de Pugwash[4]. Nous mathématiciens dépendons en fin de compte de la société pour subsister et avons le privilège de travailler sur un sujet qui nous passionne. En retour, nous devons de diverses manières, rendre ce tribut et encourager nos concitoyens à regarder notre étrange profession de manière amicale et tolérante.

Manjul Bhargava
Algèbre, théorie des nombres
Professeur de mathématiques, Université de Princeton

J'ai toujours aimé les mathématiques. Enfant, j'aimais les formes et j'aimais les nombres. L'un de mes plus anciens souvenirs mathématique, je devais avoir environ huit ans, est l'empilement d'oranges (qui était destinées au robot à jus à la maison !) en large pyramides. Je voulais savoir combien d'oranges il fallait pour fabriquer une pyramide triangulaire avec n oranges sur un côté. J'y ai beaucoup pensé, et finalement, j'ai trouvé que la réponse était $n(n+1)(n+2)/6$ oranges. Ça a été un moment très marrant et excitant pour moi ! J'ai aimé pouvoir prédire exactement combien il fallait d'oranges pour une pyramide de taille donnée.

Mes plus grandes influences pendant mon enfance furent celles de mon grand-père, un professeur de sanskrit renommé et un historien de l'Inde ancienne, et ma mère, une mathématicienne étant également profondément intéressée par la musique et la linguistique. Comme résultat, j'ai aussi développé beaucoup d'intérêt pour le langage, et la littérature, particulièrement pour la poésie sanskrite, et pour la musique classique indienne. J'ai appris à jouer d'un certain nombre d'instruments, comme la cithare, la guitare, le violon, et le clavier. Mais par dessus tout, ce que j'aime le plus, ce sont les percussions ! Mon instrument favori était le tabla, une paire de tambours, que j'ai commencé à apprendre enfant et dont je continue à jouer aujourd'hui, en pratiquant dès que j'ai du temps. J'ai toujours trouvé ces trois sujets - la musique, la poésie et les mathématiques - très proches. C'est vrai, dans une large mesure, pour tous les praticiens en mathématiques pures. À l'école, les mathématiques sont en général regroupées avec les sciences. Mais pour les mathématiciens, les mathématiques, comme la musique, la poésie ou la peinture, sont un art créatif. Tous ces arts impliquent - et également nécessitent - un certain feu créatif. Tous ces arts s'efforcent d'exprimer des vérités qui ne peuvent pas l'être dans le langage de tous les jours. Et ils tendent aussi vers la beauté.

La connexion entre la musique / poésie et les mathématiques n'est pas seulement juste une connexion abstraite. En grandissant, j'ai appris de mon grand-père que des mathématiques incroyables avaient été découvertes dans l'ancien temps par des savants qui ne se considéraient pas eux-mêmes comme des mathématiciens, mais plutôt comme des poètes (ou des

[4]Pugwash est une organisation de figures publiques influentes dont le but est de réduire les conflits armés et de rechercher des solutions coopératives aux problèmes globaux.

linguistes). Les linguistes comme Panini, Pingala, Hemachandra, et Narayana découvrirent des concepts mathématiques merveilleux et profonds en étudiant la poésie : les histoires que mon grand-père me racontait à leur sujet étaient très inspirantes.

Il y a un exemple qui m'a particulièrement fasciné à la fois comme mathématicien et comme batteur. Dans les rythmes de la poésie sanskrite, il y a deux sortes de syllabes, les longues et les courtes. Une longue syllabe dure deux temps, une courte un seul. Une question qui émergea naturellement à l'esprit des anciens poètes était “combien de rythmes différents y a-t-il contenant (disons) huit temps, en utilisant des syllabes longues et des courtes ?” (Par exemple, on peut avoir long-long-long-long, ou court-court-court-long-long-court.)

La réponse a été donnée par le travail classique de Pingala Chandashaastra, un travail qui remonte environ aux années 500 avant J-C. Voici cette élégante solution. Vous construisez une séquence de nombres comme ceci : d'abord vous écrivez les nombres 1 et 2. Et ensuite, chaque nombre suivant à écrire est obtenu en ajoutant les deux nombres précédents. Cela résulte en la séquence de nombres 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89... Le n-ième nombre écrit vous dit le nombre total de rythmes, constitué de syllabes courtes et longues, durant n temps. Ainsi pour huit temps, la réponse est qu'il y a trente-quatre tels rythmes au total.

Ces nombres sont appelés les nombres de Hemachandra, d'après le linguiste du onzième siècle qui le premier prouva leur méthode d'engendrement. Ils sont aussi connus sous le nom de nombres de Fibonacci en Occident, d'après un mathématicien qui écrivit à leur sujet au douzième siècle. Ces nombres jouent un rôle important maintenant dans tant de parties des mathématiques ! Ils surgissent aussi en botanique et en biologie. Par exemple, le nombre de pétales d'une marguerite tend toujours à être l'un des nombres de Hemachandra, comme le nombre des spirales sur une pomme de pin (pour des raisons que les mathématiciens comprennent maintenant !).

Cette histoire m'a inspiré quand j'étais enfant parce qu'elle est un merveilleux exemple d'un concept simple se développant en quelque chose de si omniprésent, si important et si profond. En un certain sens, c'est le genre de mathématiques qui m'inspirent encore aujourd'hui, et vers lesquelles j'essaie de diriger mes efforts, quand je mène mes recherches en théorie des nombres. Je pense que la même chose est vraie pour tous les mathématiciens. Il s'agit de trouver de simples questions et idées qui amènent à explorer des royaumes inattendus - et à de profondes, élégantes et durables mathématiques.

Marie-France Vigneras
Théorie algébrique des nombres, programme de Langlands
Professeure de mathématiques, Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris

J'ai grandi au Sénégal. Je le mentionne parce que j'ai reçu un prix des années plus tard en prouvant qu'on ne peut pas entendre la forme d'un tambour : au sens mathématique, il existe des tambours différents qui ne peuvent pas être distingués par leur son. La question a été soulevée alors que j'assistais à une conférence en Californie en 1977 et cela m'a rappelé les nuits en Afrique lorsque j'écoutais les Sénégalais jouant du tambour et dansant au dehors de notre maison ; j'avais essayé de deviner quels instruments c'étaient à partir de leur son.

D'heureuses coïncidences comme celle-ci sont souvent responsables de théorèmes. Les idées viennent alors qu'on est couché dans son lit ou en train d'assister à une conférence ou lors d'un concert, quand il n'y a pas de contrariétés, pas d'enseignement ou de ménage, pas de stress. Imaginez-vous dans une forêt. Vous appréciez la beauté de la nature et il ne fait pas froid, mais la lumière baisse et il est temps de quitter la forêt. Vous essayez un chemin étroit mais il se termine rapidement. Vous revenez en arrière et en essayez un autre ; ils semblent tous les mêmes et il fait de plus en plus sombre. Vous vous arrêtez et restez immobile. Vous attendez et attendez, avec vos sens en alerte pour voir l'invisible, pour ressentir l'indescriptible, pour écouter le silence. Et cela arrive soudainement : une direction devient plus dense, ou plus lumineuse. C'est pour expérimenter ces moments intenses que je suis devenue mathématicienne. Il faut de l'énergie, de la concentration et travailler dur pour écrire des preuves. Vous devez faire attention. Les erreurs ont vite fait de s'y glisser. En tant que mathématiciens, vous jouez et rêvez mais vous ne trichez pas. Vous ne pouvez pas tricher en mathématiques. La vérité est si importante. Résoudre un problème par une preuve est excitant et gratifiant parce que c'est vrai pour toujours.

Je suis devenue mathématicienne par chance (à commencer par le fait d'avoir eu un bon professeur à Dakar, Damon, et d'avoir reçu l'excellente éducation française de l'époque) et je vis une vie simple. J'enseigne quatre mois par an et je fais des mathématiques le reste de l'année. J'adore les deux. Les mathématiques sont la chose la plus profonde de ma vie et elles m'influencent beaucoup. Je pense que je suis différente de, disons, mes voisins, mais pas si différente des historiens, des écrivains, des poètes et des artistes.

Mikhael Leonidovich Gromov
Théorie géométrique des groupes, géométrie différentielle
Professeur Jay Gould de mathématiques, Institut Courant de Sciences mathématiques, Université de New York, et Professeur, Institut des Hautes Études Scientifiques

L'empreinte du monde dans nos esprits n'est pas photographique ; tous les cerveaux savent que le monde extérieur est une séquence chaotique d'impulsions électriques et en dehors de cela, notre cerveau crée l'entité structurelle qui est notre perception de ce que nous voyons et entendons. La plupart du temps, un cerveau d'adulte se parle à lui-même et crée de plus en plus de structures raffinées en lui-même. Le mot "structure" signifie une structure mathématique, quelque chose qui devient de plus en plus abstrait et de mieux en mieux organisé logiquement au cours de cette auto-conversation. La capacité mathématique du cerveau de chaque personne excède de très loin celle des plus grands génies de tous les temps. Personne, étant données les entrées avec lesquelles le cerveau commence, ne pourrait être capable de parvenir à un tel niveau d'abstraction, par exemple à la symétrie à cinq feuillets (d'une étoile de mer) que vous, ou plutôt votre cerveau, reconnaît instantanément indépendamment de la taille, de la forme ou de la couleur particulière de l'objet considéré.

Et alors, à un certain moment, ce processus de création de structures par le cerveau entre en contact avec la partie linguistique du cerveau et génère des pensées qui peuvent être perçues et dirigées par notre cerveau conscient. Là commencent les mathématiques. Votre cerveau, de façon inhérente, est dirigé pour une raison inconnue et par un processus inconnu, vers la création de structures qui sont des abstractions des données en entrée que le cerveau reçoit. Quand de telles entrées reflètent les structures déjà créées par le cerveau à partir du monde extérieur, le cerveau commence à analyser ces structures. Quand ce processus atteint la surface (le minuscule fragment de votre activité cérébrale que nous appelons la conscience), cela devient des mathématiques.

Nous sommes tous fascinés par les schémas structurels : la périodicité d'un morceau de musique, la symétrie d'une décoration, l'auto-similarité des images par ordinateur de fractales. Et les structures déjà préparées en nous-mêmes sont les plus fascinantes de toutes. Hélas, la plupart d'entre elles nous sont cachées. Quand nous réussissons à mettre ces structures-dans-les-structures en mots, elles deviennent des mathématiques. Elles sont abominablement difficiles à exprimer et à faire comprendre aux autres. Pensez à un village de personnes sourdes où la musique serait communiquée en écrivant des partitions. Petit à petit, vous apprenez comment entendre la musique écrite dans les partitions et votre cerveau l'entendant reçoit un fantastique choc ; alors le cerveau en demande de plus en pus. Les cerveaux sont nos maîtres, avec seulement 2 pour cent du poids total de notre corps, ils nécessitent 20 pour cent de nos ressources en oxygène ; vous ne pouvez résister à leurs commandes. Vous devenez un mathématicien, un esclave de cette insatiable faim de votre cerveau, des cerveaux de tout le monde, pour mettre en structures tout ce qu'il reçoit comme données.

Maryam Mirzakhani
Théorie ergodique, théorie de Teichmüller
Médaillée Fields
Professeure de Mathématiques, Université de Princeton

J'ai grandi en Iran et j'ai eu une enfance heureuse. Il n'y avait pas de scientifiques dans ma famille, mais j'ai appris beaucoup d'un frère plus âgé, qui était toujours intéressé par les maths et les sciences. Autour de moi, les femmes étaient encouragées à être indépendantes et à développer leurs centres d'intérêt. Je me rappelle de programmes à la télé à propos de femmes célèbres et fortes, comme Marie Curie et Helen Keller: j'admirais les personnes qui étaient passionnées par leur travail, et j'étais impressionnée par des livres comme *La lutte pour la vie*, à propos de Vincent Van Gogh. Pourtant, lorsque j'étais petite fille, je rêvais de devenir écrivain, et écrire des romans était mon passe-temps favori.

Plus tard, j'ai participé à des compétitions de maths et je suis devenue de plus en plus intéressée par le fait de faire des mathématiques. J'avais beaucoup de bons amis qui étaient aussi intéressés par les mathématiques, ce qui a rendu mes années de premier cycle universitaire très excitantes et inspirantes. J'ai majoré en maths et je suis allée à Harvard en second cycle universitaire. Lorsque j'ai travaillé à Harvard avec Curt McMullen, je me suis intéressée à différentes parties des mathématiques liées à la dynamique et à la géométrie des surfaces de Riemann. Sa grande culture et sa perspicacité ont eu une grande influence sur moi.

Les départements de maths ont tendance à être très dominés par les hommes et parfois cela est intimidant pour de jeunes femmes. Après avoir dit ça, cependant, je n'ai jamais rencontré de problèmes parce que je suis une femme, et j'ai eu des collègues d'un grand soutien. Cependant, la situation est loin d'être idéale. Je crois que les femmes sont capables de faire le même travail que les hommes, mais leur temps est différent. Il peut être plus facile pour un homme de se concentrer sur de longues périodes et de faire plus de sacrifices pour son travail. Également, ce que la société attend des femmes est différent de ce que nécessite la recherche. Il est très important de rester confiante et motivée.

J'ai surtout travaillé sur des problèmes liés à la géométrie des surfaces et j'ai barboté dans les domaines liés à ça. L'analyse complexe et la théorie ergodique m'ont toujours fascinée.

J'apprécie d'apprendre différentes parties des mathématiques et de comprendre les connexions entre elles. Le merveilleux aspect des problèmes concernant les surfaces de Riemann est la connexion avec tant de champs des mathématiques, incluant la théorie ergodique, la géométrie algébrique et la géométrie hyperbolique.

Je suis très lente pour faire de la recherche. Je ne crois pas aux frontières entre les différentes parties des mathématiques. J'aime penser à des problèmes stimulants qui m'excitent, et suivre le chemin où ils me mènent. Cela me permet d'interagir avec de très nombreux sympathiques collègues et d'apprendre d'eux. D'une certaine façon, faire des mathématiques, c'est comme écrire un roman dans lequel votre problème évolue comme un personnage vivant. Pourtant, vous devez être très précis dans ce que vous dites : tout s'emboîte bien ensemble comme les engrenages dans une horloge.

Marina Ratner
Théorie ergodique
Professeure de mathématiques, Université de Californie, Berkeley

Je suis née et j'ai grandi à Moscou. Je suis tombée amoureuse des mathématiques en cinquième classe[5]. Traditionnellement le niveau d'enseignement dans les grandes villes de Russie était très élevé. Le programme scolaire en math était rigoureux et stimulant. J'étais fasciné par le raisonnement mathématique en algèbre et en géométrie, raisonnement qui était beau et excitant. Les maths sont venues naturellement à moi et je ressentais une satisfaction incomparable à résoudre des problèmes difficiles.

Il n'y avait pas de mathématiciens dans ma famille. Mon père était un physiologiste des plantes très connu et ma mère était chimiste. À la fin des années 40, ma mère fut licenciée de son travail pour avoir correspondu avec sa mère en Israël, qui était considéré par le régime soviétique comme un état ennemi. Ce furent des années terribles, pour les juifs soviétiques. En 1952, l'anti-sémitisme de l'union soviétique était à son pic. On pouvait être licencié ou arrêté à tout moment. Mon père faillit être licencié également, mais la mort de Staline en 1953 lui permit de conserver son travail.

En 1956 j'essayai d'entrer à l'université d'état de Moscou. Ce fut l'année où Staline fut dénoncé et un dégel relatif temporaire du régime soviétique ramena à la vie le peuple soviétique. Pour la première (et courte) fois, l'université de l'état de Moscou ouvrit ses portes à des candidats juifs. Le département de math de l'université d'état de Moscou était l'un des meilleurs du monde. À mon examen d'entrée, on me demanda de résoudre onze problèmes au tableau. J'en résolus seulement dix. Je quittai l'examen convaincue que j'avais échoué et que je ne serais pas admise. Mais je l'étais, et cela fut un tournant dans ma vie.

J'ai principalement étudié les mathématiques et la physique et les cours obligatoires de marxisme et d'histoire du parti communiste. Je me spécialisai en théorie des probabilités, ce qui à ce moment était une partie des mathématiques très à la mode et inspirée par le grand mathématicien russe A. N. Kolmogorov. Il y avait beaucoup d'étudiants très talentueux et de jeunes étudiants travaillant avec lui alors, et la vie mathématique autour de lui était nourissante et stimulante.

Après l'obtention de mon diplôme, je travaillai pendant quatre ans avec le professeur Kolmogorov dans son groupe de statistiques appliquées et j'enseignais dans son école pour des étudiants de lycée doués. J'eus beaucoup de chance de connaître et de travailler avec ce si grand homme, qui éleva et inspira des générations de mathématiciens.

Par la suite, j'allai en école diplômante sous la supervision de Yakov G. Sinai, un des plus importants étudiants de Kolmogorov. Bien que très jeune à ce moment-là, Sinai avait déjà apporté des contributions fondamentales à la théorie ergodique, une partie des mathématiques reliée à la théorie des probabilités qui trouvait son origine dans la thermodynamique

[5] correspondant à la première année de collège, la classe de sixième en France.

et la physique statistique. Sinai demandait que ses étudiants aient une éducation mathématique large. Cela m'aida énormément dans mes recherches futures. Dans ma thèse, j'étudiai la théorie ergodique des flots géodésiques sur les surfaces à courbure négative, émergeant géométriquement des systèmes dynamiques ayant un comportement extrêmement aléatoire.

En 1971, peu de temps après avoir obtenu mon PhD[6], j'émigrai en Israël et commençai à travailler comme assistant à l'université hébraïque de Jérusalem. Les étudiants en Israël étaient brillants et motivés. J'ai immensément apprécié d'être leur enseignant. Pendant ces années, je continuai mon travail sur les systèmes dynamiques géométriques et je correspondais régulièrement avec Rufus Bowen, un jeune mathématicien de Berkeley qui travaillait dans le même domaine. Bientôt je reçus et acceptai une invitation du département de math de Berkeley pour joindre cette faculté. La vie mathématique y était florissante. Presque chaque jour quelqu'un venait avec une nouvelle idée ou faisait une nouvelle découverte.

J'en fis quelques unes, aussi. J'étudiais ce qu'on appelle les flots horocycles sur les surfaces courbées négativement, qui était reliés de très près aux flots géodésiques que j'étudiai plus tard : je découvris que contrairement aux flots géodésiques d'égale entropie, les flots horocycles sont statistiquement très différents et sont liés de manière rigide à la structure géométrique des surfaces sous-jacentes. Il se trouva que les idées que j'introduisis dans ce travail étaient fondamentales et qu'elles permettaient vraiment d'aller plus loin, spécialement pour les applications à la théorie des nombres. Je réalisai cela en 1984 à une conférence en Hongrie, où G. A. Margulis me dit qu'il avait été influencé par mes idées dans sa preuve de la conjecture d'Oppenheim en théorie des nombres. Ce fut un moment très heureux pour moi. Ensuite, ces idées m'amenèrent à trouver des preuves des conjectures de S. G. Dani et M. S. Raghunatan concernant les flots unipotents sur des quotients de groupes de Lie. Cela me donna un grand plaisir de voir mes théorèmes si largement appliqués pour résoudre beaucoup d'autres problèmes importants.

Pour moi, les maths font partie de la beauté de la Nature et je suis reconnaissant d'être capable de le voir. Quelles que soient les math qu'il m'arrive d'enseigner, j'aime communiquer leur beauté à mes étudiants.

Michèle Vergne
Représentations des groupes, géométrie différentielle
Directrice de Recherche, Centre National de la Recherche Scientifique, France

Qu'ai-je fait dans ma vie de mathématicienne ? Je pourrais regarder ma liste de publications et discuter de quelques-uns de mes vieux résultats. Pourtant le passé ne compte pour rien. Si je ne suis pas capable de démontrer quelque chose de nouveau maintenant, le fait que je l'aie eu fait avant est sans valeur. Et donc me voici, jour après jour, travaillant pendant des heures à la poursuite d'un but infiniment distant.

J'essaie de "comprendre". Je n'essaie pas de découvrir quelque chose de nouveau, mais plutôt de voir les "raisons essentielles" pour lesquelles quelques résultats sont vrais. Je retourne à la source, dans une tentative pour découvrir "la mère de toutes les formules". Les nouvelles idées des autres mathématiciens sont irritantes. J'aimerais tellement montrer qu'il y a une raison simple pour laquelle "tout ça" est vrai (au moins, quand j'étais jeune, j'avais cette arrogance).

[6]ma thèse.

Parfois, je suis parvenue à trouver de “plus hautes raisons” pour lesquelles un résultat était valide : une idée jaillit de mon travail passé et atterrit juste là devant moi, m’ordonnant de faire quelque chose. Pourquoi était-ce si facile de comprendre la formule de Plancherel pour les groupes nilpotents et si difficile pour les groupes réductifs ? J’ai été intriguée par cette question longtemps.

Tout à coup, une voix intérieure me parle et me dit que ça n’est pas plus difficile. Et la voix continue à me donner des ordres : “ajoute juste des termes et applique la formule de Poisson.” Le protagoniste invisible disparaît de la scène, me laissant avec tout ce travail. Merveilleux miracle, je vois le pont de lumière et le travail est facile à faire, je suis enchantée. Le résultat devient une conséquence logique d’un autre fait que je connais, et en un éclair, je peux annexer une petite partie des mathématiques à “mon monde”. Mais souvent, ce sentiment fugace de satisfaction disparaît et je réalise qu’il y a davantage de cas profonds que mes idées perspicaces sont incapables d’expliquer : j’ai “expliqué” la mesure de Plancherel d’Harish Chandra pour les groupes réductifs, mais qu’en est-il de la mesure de Plancherel pour les espaces symétriques ? Pour affronter ce cas plus général, ma nouvelle idée est impuissante. Je suis incapable de la prouver, ce qui fait que la valeur de ce que j’ai prouvé précédemment est réduite à néant.

Aujourd’hui, je peux voir une faible lumière sur un problème que j’ai eu à l’esprit longtemps. C’est l’assertion : *la quantisation commute avec la réduction.* C’est une belle conjecture de Guillemin-Sternberg, qui était clairement vraie, mais qui s’avéra difficile à démontrer dans le cas général. J’ai pu en prouver un cas facile. Un cas beaucoup plus difficile a été prouvé par un autre mathématicien il y a dix ans, en utilisant de la chirurgie. Pour moi, sa méthode par des cuts est laide. J’aurais aimé prouver cette conjecture avec mes propres méthodes. Longtemps après que la preuve complète ait été trouvée, je continuais de réorganiser mes propres arguments de toutes les manières possibles. Si je les répétais, encore et encore, les difficultés seraient forcées de disparaître. Mais elles ne disparurent pas. Ces tentatives infructueuses incessantes laissent une cicatrice. Je continue d’espérer découvrir où la difficulté était exactement, et aujourd’hui, je crois que je sais quel est le petit trou dans lequel la difficulté se cachait. Je crois qu’il peut être bouché facilement. Alors, peut-être, je pourrai reformuler et prouver le théorème d’une façon plus générale. Vraiment, pour ça, il me faut l’idée de quelqu’un d’autre, mais très récemment, en utilisant une idée brillante de l’un de mes étudiants pour expliquer un phénomène très similaire, je crois qu’on peut aussi l’utiliser pour comprendre ce cas. En tous cas, j’essaierai. Demain.

Noam D. Elkies
Théorie des nombres
Professeur de Mathématiques, Université d’Harvard

J’ai joué avec les nombres et la musique aussi loin que je puisse m’en souvenir avant d’avoir trois ans, selon les enregistrements de mes parents. La musique était omniprésente à la maison, du fait de la profession de ma mère qui était professeur de piano, mais elle se rappelle que ce furent les nombres qui piquèrent d’abord mon réel intérêt dans la musique. Dans les livres d’apprentissage du piano pour débutants, chaque note est souvent marquée d’un chiffre, son doigté, 1, 2, 3, 4 ou 5, pour le pouce, l’index, le majeur, l’annulaire et l’auriculaire, et au début, les doigtés correspondent exactement aux notes (parce que la main de l’étudiant ne bouge pas), et souvent aussi aux “degrés de l’échelle” (d’abord à travers les cinq notes de l’échelle) quand les notes sont jouées avec la main droite. Par exemple, l’“Ode à la joie” aurait pour doigté 334554321 123322 pour la main droite, et 332112345543344 pour la main gauche, avec la somme des doigtés correspondant des deux mains valant toujours

6. Bientôt, la musique devint une passion en elle-même, d'une part du fait de ma passion pour les nombres, mais aussi pour elle-même : alors que la musique partage certains outils de l'arithmétique de base (comme les rythmes ou l'harmonie, pas seulement les doigtés) et les préoccupations de hautes mathématiques (comme certaines formes et une économie des moyens), elles ont différents desseins.

Après avoir reçu tôt l'enseignement de mon père (ingénieur de métier) en math et de ma mère et de ma grand-mère maternelle en musique, j'eus la chance tout au long de mon enfance d'avoir accès à de merveilleux mentors, pairs, et autres ressources dans ces deux domaines, à la fois en Israël, où je vécus de la maternelle jusqu'au collège, et à New York après que nous y soyions retournés. Du côté math, ces ressources inclurent un "math lab" dans une classe élémentaire multi-cours et une introduction hébraïque à la géométrie euclidienne pendant mes années en Israël. De retour à New York, je lisais les colonnes de Martin Gardner dans le Scientific American ainsi que ses livres et je participai à l'équipe de math Stuyvesant au lycée, ce qui m'amena aux circuits des concours de maths locaux, nationaux, et internationaux pendant mes années de lycée. Je fus aussi introduit, ou le serais bientôt, à ce qui est devenu l'un des thèmes-clefs de mon travail de recherche jusqu'à aujourd'hui : la théorie des nombres - en particulier les courbes elliptiques - et les empilements de sphères dans différents espaces.

Vers la fin du lycée, j'avais déjà atteint une reconnaissance initiale à la fois en mathématiques (score parfait aux olympiades internationales de math, progrès sur un problème ouvert d'Erdös) et en musique (concerts Juilliard et BMI, enregistrements musicaux Broadcast Music Inc., récompenses pour mes compositions), mais il devint clair que je ne pourrais viser une carrière à la fois dans les deux domaines. Une raison pour laquelle j'ai choisi les mathématiques est que je m'attendais à pouvoir vivre de ce métier et continuer encore à jouer de la musique à un haut niveau, alors que la carrière d'un musicien professionnel ne m'aurait vraisemblablement pas permis de continuer à faire des mathématiques si ce n'est de façon récréative.

Un mathématicien professionnel mène une recherche originale pour créer de nouvelles mathématiques. J'avais déjà eu quelque expérience en recherche, mais pendant longtemps, mes meilleurs résultats n'étaient pas nouveaux : à chaque fois, je trouvais que Gauss, peut-être, ou Poisson, les avaient obtenus avant moi. Plus tard, c'était comme si j'avais tout de même progressé parce que les théorèmes que je redécouvrais dataient seulement d'une génération en arrière, et plus d'un siècle ou deux. Même lorsque je finis par trouver un nouveau résultat en théorie des nombres, c'était en partie parce que je n'étais pas familier avec les traditions classiques : dans ma thèse de doctorat, je prouvai une conjecture sur les courbes elliptiques qui était inaccessible parce que le plan standard d'attaque de cette conjecture commençait par une preuve de l'hypothèse de Riemann ! Ne sachant pas cela, j'essayais de mieux comprendre pourquoi cette conjecture pourrait être vraie et je finis par la prouver en combinant des éléments de théorie des nombres prouvés récemment avec une idée qui datait littéralement de l'époque d'Euclide..

Quelques mois plus tard, je trouvai le premier exemple d'une puissance quatrième d'un entier naturel qui est la somme de trois autres puissances quatrièmes d'autres nombres, ce dont Euler avait conjecturé en 1769 que c'était impossible. Plus de vingt ans et des douzaines d'articles après, cela reste mon résultat le plus connu. Alors que mes autres résultats sont d'une portée mathématique plus grande, la question des puissances quatrièmes est un de ces problèmes de théorie des nombres qui combine un énoncé attirant simple avec une difficulté de résolution bien plus grande.

J'ai eu de la chance de résoudre un tel problème, en particulier si tôt dans ma carrière, et je reste chanceux de pouvoir gagner ma vie en me consacrant à l'une de mes deux passions dans la vie. En mathématiques comme en musique, j'ai appris beaucoup plus de la littérature et des techniques des années intermédiaires, mais même quand j'utilise des outils modernes, je le fais non pour leur propre intérêt, mais au service de difficultés et beautés traditionnelles qui m'ont amené initialement à vouer tant de mon temps de vie à ce domaine.

Viscount Pierre Deligne
Géométrie algébrique, formes modulaires
Médaillé Fields
Professeur émérite de mathématiques, Institut d'Études Avancées, Princeton

Je suis né à Bruxelles. On m'a dit que quand j'étais petit, je surprenais les gesns parce que j'avais compris ce que sont les nombres négatifs. Pourquoi étaient-ils surpris ? Un thermomètre vous en donne une bonne image. J'avais de la chance parce que mon frère et ma sœur sont plus vieux que moi. Quand mon frère était à l'université, je pouvais regarder quelques-uns de ses livres et j'ai appris comment résoudre une équation du troisième degré. J'ai aussi eu de la chance de rencontrer M. Nijs, un professeur de lycée qui, voyant que j'étais intéressé, me donna de très bons livres à lire. Je voyais les maths à ce moment-là seulement comme un très joli jeu. Ce fut une merveilleuse surprise d'apprendre qu'on pouvait en même temps jouer et gagner sa vie.

Il y a un dicton qui dit que la géométrie, c'est l'art de penser juste sur des figures fausses. Je suis d'accord, en insistant sur le pluriel. Vous avez plus d'un dessin pour chaque objet mathématique. Chacun d'eux est faux mais nous savons comment chacun d'eux est faux. Cela nous aide à déterminer ce qui devrait être vrai. Cela nous permet de sauter d'une assertion à une autre. En mathématiques, c'est un plaisir quand vous réalisez que deux choses qui semblent n'avoir rien en commun, en fait, sont reliées : créer un dictionnaire entre deux questions est un outil puissant. Souvent quelque chose sera évident selon un certain point de vue mais vous donnera une information surprenante si vous le regardez selon un autre point de vue. En mathématiques, j'ai pu établir de telles connexions quelquefois.

Il y a des façons de penser très différentes parmi les mathématiciens. Certaines personnes sont très algébriques, elles peuvent penser avec des formules, et elles sont très rapides en calcul. D'autres pensent en termes d'images. D'autres peuvent être extrêmement précises. D'autres sont très vagues et peuvent seulement donner des idées. La diversité est utile parce que chaque manière de penser est complémentaire des autres.

En mathématiques, nous ne voyons pas les énormes collaborations que l'on voit en physique ou en biologie avec quarante participants. J'ai un certain nombre d'articles écrits conjointement, mais seulement un article avec quatre auteurs, et nous avons tous fait quelque chose de différent. La collaboration peut prendre la forme de l'écriture d'un article commun, mais elle peut aussi consister à parler avec les gens. Ils peuvent vous dire ce qui est évident pour eux qui n'est pas évident pour vous comme être conscients des écarts ou pointer ce que je ne comprends pas. J'ai eu la chance d'apprendre beaucoup de géométrie algébrique d'Alexander Grothendieck et les formes modulaires d'autres personnes. Les mathématiciens dans ces deux sujets souvent ne se parlaient pas les uns aux autres, mais j'ai pu utiliser une idée de Robert Rankin à propos des formes modulaires pour prouver quelque chose que les géométriciens algébriques voulaient vraiment savoir.

En mathématiques, il n'y a pas seulement des théorèmes. Il y a ce que nous appelons des "philosophies" ou "yogas," qui restent vagues. Parfois nous pouvons deviner la saveur de ce qui devrait être vrai mais nous ne pouvons faire une assertion précise. Quand je veux comprendre un problème, j'ai d'abord besoin d'avoir un panorama de ce qu'il y a autour. Une philosophie crée un panorama où vous pouvez mettre les choses en place et comprendre que si vous pouvez faire quelque chose là, vous pouvez faire des progrès autre part. C'est comme ça que les choses commencent à s'emboîter.

Quand j'étais étudiant à Paris, j'allais au séminaire de Grothendieck à l'IHES et au séminaire de Jean-Pierre Serre au Collège de France. Comprendre ce qui était fait dans chaque séminaire me prenait la semaine. J'ai ainsi appris beaucoup comme ça. Grothendieck me demandait d'écrire quelques-uns des séminaires et me donnait ses notes. Il était extrêmement généreux avec ses idées. Il ne fallait pas être paresseux ou il vous rejetait. Mais si vous étiez vraiment intéressé et que vous faisiez des choses qu'il aimait, alors il vous aidait beaucoup. J'ai beaucoup apprécié l'atmosphère autour de lui. Il avait les idées principales et l'objectif était de prouver les théories et de comprendre un secteur des mathématiques. Nous ne nous préoccupions pas trop de priorités parce que c'était Grothendieck qui avait les idées sur lesquelles nous travaillions et la priorité n'aurait rien signifié du tout. J'ai plus tard travaillé dans des domaines des mathématiques où les gens étaient très préoccupés par le fait de trouver un résultat les premiers et ils cachaient ce qu'ils faisaient aux autres. Je n'aimais pas ça. Il y a toutes sortes de mathématiciens, y compris des mathématiciens qui font de la compétition.

Paul Malliavin
Probabilité, analyse harmonique
Professeur émérite de mathématiques, Université de Paris VI: Pierre et Marie Curie

Je suis né dans une famille d'intellectuels qui étaient profondément investis en politique depuis plusieurs générations, soit en écrivant des livres, soit en exerçant des responsabilités politiques à un niveau national en France. J'avais un très grand respect pour la vie de lutte de mes parents, oncles et grands-parents ; j'avais souvent vu leurs désillusions après s'être battus pour des propositions politiques soigneusement planifiées qui étaient finalement retirées. Une des raisons de mon choix des mathématiques a été qu'une fois que la vérité est découverte, elle entre immédiatement dans la réalité.

J'ai fini mes études et obtenu mes diplômes en mathématiques à la Sorbonne à Paris en 1946. J'avais la grande chance d'avoir suivi des cours enseignés par de grands maîtres de l'école française du début du vingtième siècle : Emile Borel pour l'intégration et Elie Cartan pour la géométrie. Une nouvelle "Révolution française" naquit à Paris en 1947. Elle était menée par Henri Cartan et Jean Leray. J'ai aussi une dette particulière à l'égard de Szolem Mandelbrojt, avec qui j'écrivis ma thèse.

Marston Morse et Ame Beurling m'invitèrent à l'Institut des études avancées pour quelques années (1954-1955 et 1960-1961). Mon séjour là-bas était une opportunité terrible pour établir des interactions sur le long cours avec des mathématiciens, d'abord de Princeton et également de Chicago, du MIT, de Stanford, et de New York, suivies de contacts avec des mathématiciens de Barcelone, Stockholm, Moscou, Lisbonne, Kyoto, Wuhan, Pise, et Bonn. Ces interactions m'amenèrent à être l'un des créateurs du *Journal d'analyse fonctionnelle*, qui vient de publier son 252ème volume.

Je suis profondément convaincu de l'unité fondamentale des mathématiques, que je pensais pouvoir servir en établissant des relations entre des domaines qui semblaient relativement déconnectés. En 1954, j'ai résolu un problème sur les séries de Fourier en développant le calcul fonctionnel symbolique sur les distributions, en 1972 j'initiai un nouveau domaine, la géométrie différentielle stochastique, en mélangeant la géométrie d'Elie Cartan avec la théorie des processus stochastique de Kiyoshi Itō ; en 1978, j'initiai un nouveau domaine, le calcul des variations stochastiques ; en 2001, sous l'impulsion de Pierre-Louis Lions, je développai le calcul stochastique des variations dans le contexte des mathématiques financières ; l'année passée, j'ai travaillé sur les équations classiques d'Euler de la dynamique déterministe des fluides incompressibles en utilisant des outils de géométrie différentielle stochastique.

Mon errance mathématique a été rendue possible par mon salaire de professeur permanent à l'âge de trente ans, ce qui m'a permis de poursuivre ma carrière dans une liberté relative. La difficulté de cette errance provient plutôt de la difficulté à être considéré comme un collègue plutôt que comme un amateur étrange pénétrant dans un nouveau domaine, la difficulté d'être perçu comme quelqu'un dont les publications doivent être considérées sérieusement. Dans cette connexion, je dois une lourde dette à Daniel W. Stroock, qui par son intense travail, soutint mon calcul stochastique des variations, dont il inventa le nom, calcul de Malliavin. Finalement, j'ai toujours pris le plus grand soin que mes activités scientifiques soient indépendantes de toute considération politique ou géographique, en ayant le sentiment que les mathématiques sont une vérité universelle.

Peter Clive Sarnak
Analyse et théorie des nombres
Professeur Eugene Higgins de Mathématiques, Université de Princeton, et Professeur de mathématiques, Institute pour les études avancées, Princeton

Durans ma scolarité élémentaire et au lycée, les mathématiques étaient ma matière préférée, en partie parce que c'était un sujet dans lequel j'avais des facilités. Pourtant, en dehors des intérêts habituels de tout adolescent, ma passion était les tournois d'échecs où j'obtenais du succès aux niveaux junior et senior en Afrique du Sud. Mon père encourageait beaucoup notre implication, à moi et à mes frères dans les échecs lorsque nous étions enfants, mais il fut beaucoup moins enthousiaste pour mon départ en Europe à l'âge de dix-sept ans pour essayer de devenir joueur d'échecs professionnel. Il insista pour que j'obtins d'abord une éducation universitaire et c'est ce qui définit mon futur.

Lors de ma première année à l'Université de Witwatersrand à Johannesburg, avec l'appétence et l'enthousiasme du très jeune homme que j'étais, je fus exposé aux mathématiques modernes (et aux mathématiques appliquées), en particulier aux travaux de mathématiciens comme Carl Friedrich Gauss, Johann Lejeune Dirichlet, et Bernhard Riemann. La beauté et la profondeur de leurs découvertes me convainquirent que je voulais en apprendre et comprendre davantage et, si possible, contribuer au développement des mathématiques modernes. Je pris tous les cours liés aux mathématiques que je pus trouver. En analysant cette expérience rétrospectivement, l'un des avantages que l'éducation de premier cycle offre dans un endroit reculé mathématiquement est que cela m'a donné des bases étendues en mathématiques. Après avoir obtenu mon diplôme de premier cycle, j'ai quitté l'Afrique du Sud pour l'Université de Stanford pour étudier avec Paul Cohen. La renommée de son génie et de sa réputation ont atteint tous les coins du monde mathématique et je vécus à la hauteur de ces histoires. En particulier, il me transmit sa vision, que j'ai conservée jusqu'à aujourd'hui (et fait passer à mes étudiants), que les mathématiques sont un sujet unifié et que même avec toutes les spécialisations qui sont advenues, on peut toujours travailler effectivement dans différents champs à l'intérieur des mathématiques. Souvent, les avancées les plus intéressantes viennent précisément d'une telle étendue et de l'interaction entre les différents domaines.

J'ai travaillé dans des parties des mathématiques allant de l'analyse à la théorie des nombres et à la physique mathématique. Un thème récurrent à travers tout ce travail est le rôle de la symétrie et de la théorie des groupes. La théorie moderne de la fonction zeta et des fonctions L, qui a son origine dans les travaux de Dirichlet et Riemann, a des applications profondes en arithmétique et pour comprendre les nombres premiers, ainsi que dans le domaine des équations Diophantiennes telles que la solution des équations quadratiques à plusieurs variables entières, dans la combinatoire et l'informatique théorique, et même dans la compréhension de la quantisation de certains systèmes Hamiltoniens chaotiques définis arithmétiquement. Trouver et exploiter ces applications pour résoudre des problèmes basiques de ces sortes a toujours été l'une des plus grandes motivations de mon travail.

La plupart du temps, j'ai travaillé en collaboration avec d'autres, ce qui m'a permis de faire des choses que je n'aurais pas faites tout seul. La collaboration est aussi un moyen de digérer de nouveaux domaines et techniques selon une base pratique en faisant un pas après l'autre. En particulier, j'ai beaucoup appris de mes travaux conjoints avec Ralph Phillips, Ilya Piatetsky-Shapiro, Nicholas Katz, Henryk Iwaniec, et Alexander Lubotzky. Il y a un autre bel aspect psychologique de la collaboration. Je trouve, comme je pense que le font la plupart des mathématiciens, qu'en faisant de la recherche, on est coincé 95 pour cent du temps. Vivre avec ça, et avoir des collaborateurs qui partagent à la fois la frustration, mais également la réussite quand une percée a lieu, rend les choses plus lisses. La chance joue un rôle dans un certain nombre de ces avancées, au sens où la percée critique est parfois semée d'embûches, et même d'incompréhensions, alors qu'on essaye de faire quelque chose d'un peu différent.

J'ai été comblé par de très nombreux étudiants de thèse, un certain nombre d'entre eux étaient assez exceptionnels et ils ont marqué le domaine. J'ai souvent appris d'eux, comme ils ont appris de moi. Les étudiants ont joué un grand rôle pour me permettre de réaliser beaucoup de mes rêves.

Le soutien continu de ma famille proche à travers les hauts et les bas que l'on rencontre en travaillant sur des problèmes mathématiques insaisissables a été essentiel pour me permettre de tenir bon. Comme beaucoup l'ont dit avant moi, je me sens chanceux de pouvoir gagner ma vie en travaillant dans un domaine que j'apprécie autant et pour lequel je n'ai jamais perdu mon enthousiasme.

Sir Roger Penrose
Physique mathématique, géométrie
Professeur Rouse Ball émérite de mathématiques, Université d'Oxford

Mes premiers sentiments pour les mathématiques ont été très stimulés par mon père, Lionel Penrose, un physicien qui s'est spécialisé dans l'hérédité des désordres mentaux, et qui est devenu plus tard professeur de génétique humaine à l'University College de Londres. C'était un homme aux multiples talents, d'une famille de quakers, son père ayant été un artiste professionnel. Il aimait beaucoup les puzzles, les échecs, la peinture, la musique, la biologie, l'astronomie et les mathématiques. Je me rappelle de nombreuses promenades en forêt avec lui, ma mère, et mes deux frères - et plus tard ma jeune sœur aussi - ce qui lui donnait des occasions de nous expliquer des choses à propos de la nature.

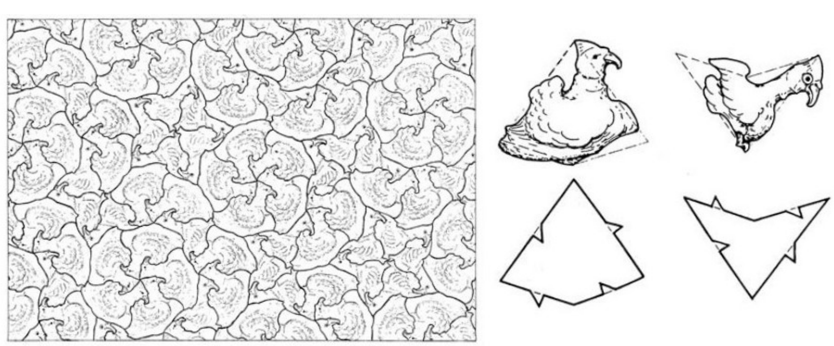
Mes deux frères étaient tous les deux des experts du jeu d'échecs (mon plus jeune frère Jonathan a été un champion d'échecs britannique le nombre record de dix fois). Pendant de nombreuses promenades avec mon père et mes frères, avec un frère loin devant, et l'autre loin derrière et mon père au milieu, je me rappelle d'eux en train de jouer de tête à un jeu de guerre, une forme du jeu d'échecs où les deux adversaires (en l'occurrence mes frères) connaissaient juste les localisations de leurs propres pièces, et ils devaient inférer de la validité de leurs tentatives de mouvements, où pouvaient être les pièces de l'autre. Seul l'empereur (ici mon père) connaissait la totalité des positions. Mon travail était juste d'être le coureur, transportant les mouvements (suggérés) d'un frère à mon père et dans l'autre sens - pas vraiment une activité mentale sérieuse, mais un bon exercice physique !

Bien que ce travail nécessite des mathématiques (surtout des statistiques), c'était le *régal* de mon père à ce jeu qui fit une forte impression sur moi. À un assez jeune âge (environ dix ans), il m'apprit les polyèdres réguliers et semi-réguliers, et nous faisions beaucoup de modèles. Un événement me frappa particulièrement quand j'avais seize ans. J'avais dit à mon père que notre maître d'école allait commencer à nous apprendre le calcul le jour suivant. Semblant quelque peu alarmé, mon père me demanda immédiatement de m'asseoir à côté de lui et il me démontra de façon experte les éléments essentiels et l'élégance du calcul. Je pense que ce qui m'impressionna le plus, c'était son désir d'être le premier à me révéler la profonde beauté du sujet, et je réalisai combien est précieux le sujet des mathématiques. Ironiquement, quand je décidai plus tard d'étudier les mathématiques (à l'University College de Londres), il fut d'abord contre ce choix, parce qu'il voyait une carrière dans ce sujet comme appropriée seulement pour ceux sans compétences dans un autre domaine scientifique!

Ensuite, j'allai à Cambridge pour préparer un PhD en mathématiques pures (en géométrie algébrique), mais là, je fus inspiré par les exposés de Hermann Bondi sur la relativité générale et la cosmologie, par Paul Dirac en théorie quantique, et par mon chaleureux ami Dennis Sciama pour aller faire de la physique théorique. Les grandes influences que je rencontrai à Cambridge, associées à des interactions depuis toujours avec mon père et mon plus vieux frère Oliver, m'aidèrent à développer une approche peut-être plutôt individuelle des questions basiques de la physique. J'étais particulièrement attiré par la théorie de l'espace-temps courbe d'Einstein et sa relativité générale, et j'inventai des techniques géométriques pour démontrer l'inévitabilité des singularités (des situations si extrêmes que la physique habituelle "laisse tomber") dans ce que nous appelons maintenant les "trous noirs". Ces techniques furent ensuite adoptées par Stephen Hawking.

Les idées géométriques ont été centrales à mon introduction de la théorie des twisteurs, qui analyse l'espace-temps et la physique quantique selon une perspective inhabituelle. Elles ont également été centrales à quelques-unes de mes propositions ultérieures concernant la cosmologie.

Faire des dessins a toujours été très important pour moi, à la fois dans la recherche et dans l'exposition. Cela m'a aidé à développer des ensembles de formes géométriques (parfois appelées "tuiles de puzzles de Penrose") qui pavent intégralement le plan comme sur la figure ci-dessous.



Sun-Yung Alice Chang
Analyse géométrique
Professeure de mathématiques, Université de Princeton

Je suis née en Chine dans l'ancienne capitale de Xian. C'était pendant la révolution chinoise, et alors ma famille est partie à Hong Kong, puis à Taiwan quand j'avais deux ans. Mon père était architecte et ma mère comptable. J'ai grandi à Taiwan et j'ai étudié à l'Université nationale de Taiwan.

Pendant mon enfance, j'étais fascinée par la littérature chinoise mais également très bonne en mathématiques. Après la première guerre mondiale, l'environnement économique à Taiwan était terriblement dur, alors il était plus facile pour les jeunes gens ayant un certain bagage en sciences et technologie d'obtenir de bons métiers et de devenir indépendants. Je décidai de prendre comme majeure les mathématiques au lycée en partie pour des considérations pratiques. Il semblait que ma classe en premier cycle d'université était une classe très particulière - sur les quarante étudiants de la classe, il y avait douze filles. Dès la première année, cinq d'entre nous avons formé un groupe et nous étudiions et jouions ensemble. On était le groupe bruyant de la classe et on se marrait bien. C'est seulement quand je suis allée en second cycle à Berkeley que j'ai commencé à réaliser qu'être une femme mathématicienne peut être une expérience très solitaire.

En troisième cycle à UC Berkeley, ma thèse était dans le domaine de l'analyse classique. En omettant les détails, grosso modo, disons qu'il y a trois branches des mathématiques, l'analyse, la géométrie, et l'algèbre. En analyse, on divise habituellement les choses en petits morceaux ; on analyse chaque morceau séparément et alors on combine l'information.

J'épousai l'un de mes camarades de classe pendant la dernière année de troisième cycle. Mon mari, Paul Yang, est un géomètre qui voit les choses en termes de formes et images. Dans les premières années de notre mariage, nous discutions mathématiques de façon générale mais nous discutions rarement de nos propres sujets de recherche l'un avec l'autre. Graduellement, nous réalisâmes que certains des problèmes sur lesquels nous travaillions pouvaient être regardés à la fois d'un point de vue géométrique et d'un point de vue analytique. Nous avons commencé à travailler en commun après dix ans de mariage ! Le domaine dans lequel nous travaillons maintenant qui s'appelle analyse géométrique, est un domaine dans lequel on utilise les méthodes de l'analyse pour gérer des problèmes géométriques. L'un des principaux problèmes est de trouver la classe de variétés quatre-dimensionnelles. Ce problème est très lié à des problèmes en physique puisque le monde dans lequel nous vivons est tri-dimensionnel, mais avec la dimension supplémentaire du temps.

J'ai toujours eu le sentiment que les mathématiques sont un langage, comme la musique. Pour l'apprendre systématiquement, il est nécessaire de maîtriser ses petits éléments et graduellement d'ajouter une pièce à une autre. Dans un certain sens, les mathématiques - comme la langue chinoise classique - sont très policées et élégantes. Écouter assis un bon exposé de mathématiques est comme écouter un bon opéra. Tout vient à la fois. On va droit au cœur du problème et j'aime ça !

William Timothy Gowers
Analyse fonctionnelle, combinatoire
Médaillé Fields
Professeur Rouse Ball de mathématiques, Université de Cambridge

J'ai grandi dans une famille de musiciens : mon père était compositeur et ma mère était professeur de piano. À l'école, j'étais bon dans la plupart des matières. Bien que les mathématiques aient toujours été ma matière favorite, il y avait quelques autres matières que j'aimais presque autant, et ce n'est pas avant onze ou douze ans qu'il devint clair que ce serait bien que je me spécialise en mathématiques, et que quelques années après ça, j'abandonne toute velléité de devenir musicien. Si j'en étais devenu un, j'aurais probablement essayé de marcher dans les traces de mon père et d'écrire de la musique. Et si j'avais fait ça, alors d'une certaine manière, ma principale activité dans la vie aurait été similaire à ce qu'elle devint finalement. Comme pour une preuve mathématique, une pièce substantielle de musique est une entité abstraite qui doit satisfaire des contraintes strictes, et créer une telle entité implique une planification précautionneuse à tous les niveaux, de la structure globale jusqu'aux petits sous-problèmes qui surgissent quand vous essayez de faire que vos idées de haut niveau marchent. Mon père a toujours eu un intérêt prononcé pour les mathématiques, et c'est comme si j'avais pris le chemin d'une autre vie qu'il aurait aimé avoir lui-même.

Jusqu'à ce que je sois en premier cycle universitaire, je n'avais absolument aucune idée de ce qu'une carrière de mathématicien pouvait être, et même, quand j'arrivais à Cambridge et commençai à recevoir les enseignements de mathématiciens professionnels, j'avais une très petite idée de ce qu'ils faisaient d'autre que d'enseigner. Je finis comme mathématicien non parce que je décidai à un jeune âge que je voulais être mathématicien - à cette étape, je ne savais même pas que de telles personnes existaient - mais plutôt parce qu'à chacune des multiples opportunités que le système éducatif m'a données de me spécialiser, j'étais toujours content de faire davantage de mathématiques et moins des autres disciplines. Cela a aidé que j'aie eu une succession de professeurs bons et inspirants qui ne nous confinaient pas dans l'enseignement standard.

C'est seulement une fois que j'ai commencé mon PhD, en ayant clarifié tous les obstacles que je devais clarifier pour en arriver là, que j'ai enfin vu à quoi ressemblait un problème réel de mathématiques. Avant ça, les problèmes auxquels je m'étais intéressé étaient soit des problèmes ouverts illustres, comme le dernier théorème de Fermat, soit des problèmes soigneusement calibrés avec des solutions intelligentes, tels que ceux qu'on peut trouver dans les olympiades de mathématiques. Mais les problèmes sur lesquels j'ai travaillé en premier, dans un domaine connu qu'on appelle la géométrie des espaces de Banach, étaient très différents. Ils n'étaient pas célèbres, et pour les résoudre, il ne suffisait pas d'avoir une étincelle de génie. Au lieu de ça, je devais utiliser les méthodes les plus communes de la recherche mathématique, qui consistaient à prendre un argument existant, qui utilisait une technique à laquelle je n'aurais jamais pensé par moi-même, et à la modifier.

Alors que mes recherches progressaient, je commençais à comprendre que les compétences mathématiques sont davantage que le simple pouvoir de résoudre des problèmes : la sélection des problèmes sur lesquels travailler est également très importante et la manière dont quelqu'un convainc quelqu'un d'autre que sa recherche est intéressante. Dans les deux cas, ça aide beaucoup s'il y a un projet plus gros auquel le travail de la personne contribue. Mon domaine courant de recherche est relativement nouveau et on l'appelle la "combinatoire arithmétique", c'est un mélange très intéressant de théorie des nombres, d'analyse harmonique, et d'optimisation combinatoire. La combinatoire arithmétique a commencé comme une collection de problèmes et résultats isolés qui se ressemblaient, mais petit à petit, il est devenu clair que ces problèmes et résultats étaient reliés par des ponts complètement fascinants et inattendus. Le plus gros projet auquel je contribue maintenant consiste à comprendre ces connexions, à développer les techniques existantes en un corps de théorie plus cohérent, et à développer de nouvelles idées pour résoudre certains problèmes-clefs qui semblent nécessiter pour être résolus des techniques au-delà de celles que nous connaissons.

Une manière plus directe d'intéresser les autres à son travail est de résoudre un problème célèbre, une chose que j'ai faite une fois. Même là, cependant, une stratégie générale de recherche est essentielle. Quand on travaille sur un problème que beaucoup d'autres personnes ont essayé de résoudre, une petite voix dans notre oreille est sans arrêt en train de dire "si cette approche marchait, alors le problème aurait été résolu il y a longtemps.". Et la voix a raison 99.9 pour cent du temps. Mais si l'on se plonge suffisamment profondément dans un problème, on réussit parfois à identifier et à isoler l'obstacle fondamental à résoudre, et occasionnellement on découvre une technique qui a récemment été développée qu'on peut utiliser pour contourner l'obstacle. De tels moments de sérendipité sont rares, mais avec l'aide d'une bonne stratégie, on peut essayer de les rendre moins rares. Pour moi, ils sont les plus grands plaisirs mathématiques.

Terence Chi-Shen Tao
Analyse harmonique, équations différentielles partielles, théorie des nombres, combinatoire
Médaillé Fields
Professeur de mathématiques, Université de Californie, Los Angeles

J'ai toujours aimé les maths. Je me rappelle quand j'avais deux ou trois ans et je flânais avec ma grand-mère. Elle lavait les fenêtres et s'amusait à un jeu avec moi, elle m'avait demandé de choisir un nombre, comme 3. Elle vaporisait un gros 3 sur la fenêtre et après, elle le nettoyait. Je trouvais que c'était vraiment marrant. J'avais des devoirs à faire à la maison quand j'étais enfant. Ils étaient simples, avec des équations comme $3 + \Box = 7$. Qu'y a-t-il dans la boîte ? Je pensais que c'était vraiment marrant. Les maths étaient toujours la seule chose qui avait vraiment du sens pour moi : 3 plus 4 vaut exactement 7, un point, c'est tout. Personne ne viendra jamais nous dire il y a une nouvelle mode et ça n'est plus vrai dorénavant. J'aimais cette clarté et je pensais aux maths comme à un jeu abstrait auquel jouer. C'est seulement plus tard que j'ai réalisé comment les maths étaient liées au monde réel et comment elles pouvaient être utilisées pour toutes sortes de choses.

J'ai grandi en Australie. Mes parents m'avaient fait tester enfant et une fois qu'ils réalisèrent que j'avais des potentialités, ils organisèrent des cours spéciaux pour moi. Je sautais quelques classes, bien que de façon décalée. Par exemple, j'étais en huitième, j'avais des cours d'anglais et d'éducation physique mais je suivais les cours de maths de douzième et les cours de onzième en physique. Quand j'étais en douzième année au collège, j'avais des cours de maths au lycée. Plus tard, ma mère devait venir me chercher au lycée pour m'amener à l'université locale. C'était très compliqué. Dans certains cours, j'étais avec des personnes qui avaient à peu près le même âge que moi, mais dans d'autres classes, j'étais avec des gens qui avaient cinq ans de plus. La plupart de mes camarades de classe étaient plus grands et plus vieux que moi. Cela a été un choc de donner mon premier cours à l'UCLA à l'âge de vingt-et-un ans parce que pour la première fois, j'étais la personne la plus vieille dans la salle.

J'étudie les nombres premiers. Ce sont des nombres qui ne peuvent être divisés par un autre nombre qu'eux mêmes sauf 1. Comme 2, 3, 5, 7, 11, et etc. Une des choses que j'ai démontrées avec Ben Green est que vous pouvez trouver un certain motif parmi eux qu'on appelle une progression arithmétique. Quelque part parmi les nombres premiers, vous pouvez trouver cinq nombres premiers ou dix nombres premiers ou vingt nombres premiers ou autant de nombres premiers que vous voulez, qui sont régulièrement espacés. Les nombres premiers ont été étudiés pendant trois milliers d'années, par curiosité. Le quidam de la rue n'a pas besoin de ces nombres premiers pour quoi que ce soit. Mais la chose marrante est qu'il y a une trentaine ou une quarantaine d'années, on a découvert que les nombres premiers étaient très bons pour la cryptographie ; en fait, ils étaient bien meilleurs que les autres codes que les gens avaient inventés. De nos jours, si nous utilisons une machine ATM ou une carte de crédit pour acheter sur internet, ils brouillent toutes vos données par un certain code qui est basé sur les propriétés des nombres premiers, parce qu'is constituent l'un des meilleurs codes de sécurité que nous connaissions.

Les mathématiques peuvent être un peu comme l'archéologie. Vous pouvez trouver un coin de quelque chose et décider qu'il a de l'intérêt. Alors vous creusez à un autre endroit et vous trouvez un autre coin qui ressemble vraiment au premier et vous pensez qu'il y a peut-être une connexion profonde entre eux. Vous continuez à creuser et finalement vous découvrez la structure sous-jacente. Vous avez un frisson de découverte quand quelque chose fait soudain sens.

Je travaille avec de nombreuses personnes très sympathiques et intelligentes et j'ai appris beaucoup de ces personnes. Mais ça ne sert à rien de penser que vous devez être un super-génie pour réussir. Si quelqu'un pose inopinément un problème de math à de nombreux mathématiciens vraiment bons, ils tarderont à lui répondre. Vous pouvez les voir en train de réfléchir. Après cinq ou dix minutes, ils viendront avec de vraiment bonnes suggestions. Elles peuvent ne pas être très rapides mais elles peuvent être très profondes. Tous ont des compétences différentes. C'est comme en athlétisme. Il y a des sprinters et il y a des coureurs de marathons. Un sprinter fera un piètre coureur de marathon et vice versa, mais ils sont tous deux très talentueux dans leur spécialité.

Il y a de nombreux problèmes que j'aimerais résoudre dans ma vie, mais beaucoup d'entre eux sont comme des falaises et je ne vois pas de chemin par où en faire l'ascension. Je travaille sur des choses qui sont plus à ma portée et j'espère accumuler suffisamment de trucs et d'outils et d'idées. Alors je reviendrai aux problèmes que je souhaite vraiment résoudre et je verrai si quelque chose a changé. Occasionnellement, ça les fera bouger un peu. C'est un peu comme à la pêche. Vous pouvez être un bon pêcheur et être à un endroit où il y a beaucoup de poissons mais il faut aussi attendre que ça morde.

Vaughan Frederick Randal Jones
Algèbres de von Neumann, topologie géométrique
Médaillé Fields
Professeur de mathématiques, Université de Californie, Berkeley

J'ai grandi en Nouvelle-Zélande, j'étais l'un des deux enfants d'une famille n'ayant aucun lien universitaire ou quoi que ce soit. Mon père avait vaguement commencé à étudier le droit, mais la seconde guerre mondiale est arrivée et il n'est jamais retourné étudier. Je me rappelle que ma mère était bonne avec les nombres, et depuis tout petit, j'étais désireux d'apprendre l'arithmétique. Je me rappelle avoir inventé mes propres tables de multiplication pour décompenser si on m'envoyait dans ma chambre parce que je ne m'étais pas bien comporté.

Mon éducation formelle a été assez normale pour la Nouvelle-Zélande, où les écoles à cette époque étaient d'une qualité exceptionnelle, et j'ai commencé à étudier les mathématiques et la physique à l'université d'Auckland quand j'ai eu dix-sept ans. Ma réelle vocation a commencé quand j'ai démarré mes recherches après mon diplôme de maîtrise. Ces recherches me rendaient heureux, contrairement aux cours que je trouvais plutôt ennuyeux. La véritable recherche que je faisais était dans un domaine quelque peu marginal des mathématiques, mais c'est incroyable comme ces idées se sont avérées utiles dans mon travail maintenant plus central en mathématiques. Bien que j'ai raté la plupart des cours habituels en allant étudier à l'étranger, le gouvernement suisse est venue au secours de ma carrière de recherche en m'offrant une bourse de recherches pour étudier en Suisse. L'offre venait avec la condition attractive que je passe trois mois à apprendre le français dans les Alpes suisses avant de commencer mes études scientifiques. Je suis resté finalement six ans à Genève et j'y suis revenu en visite de nombreuses, très nombreuses fois depuis. J'ai rencontré mon épouse en skiant dans les Alpes.

Mon PhD fus marqué par ma rencontre avec mon tuteur de thèse André Haefliger et Alain Connes, dont le travail a fait tomber mes chaussettes. J'avais juste à contribuer quelque peu le long de ces lignes, je ne maîtrisais qu'une très petite partie de l'œuvre de Connes et je fis un peu de progrès. Mais ce fut une année plus tard environ que je pus me débrouiller seul et je fis quelque chose de vraiment original. J'eus vraiment de la chance parce que bien que mon résultat, connu comme "le théorème de l'index pour les sous-facteurs", ait l'air très technique, il s'avéra quelques années plus tard avoir de nombreuses connexions avec plusieurs domaines différents des mathématiques et de la physique. Peut-être que l'impact le plus grand a été en théorie des nœuds.

Comment déterminer si deux nœuds d'une ficelle fermée sont essentiellement le même nœud est une question difficile, et les premières réponses rigoureuses n'ont émergé qu'au début du vingtième siècle. Mon théorème de l'index pour les sous-facteurs m'amena de la manière de découvrir une manière de calculer un "polynôme" à partir des sous-facteurs, à la manière de calculer un polynôme pour le dessin d'un nœud, un polynôme qui s'est avéré utile dans des domaines aussi divers que la théorie quantique des champs, la biologie mathématique (nœuds d'ADN), et le calcul quantique. Les mathématiques derrière ce polynôme sont relativement faciles mais sa signification profonde est encore quelque chose de totalement mystérieux. On ne sait pas comment le relier de façon satisfaisante à des approches plus géométriques des nœuds. Mais il y a de nombreuses conjectures.

Quand je ne suis pas impliqué dans les mathématiques, j'aime bien faire du sport, comme le golf, le squash, les sports de raquettes, le tennis, et le ski. J'avais l'habitude de jouer au rugby et au cricket pendant mon enfance en Nouvelle-Zélande et j'aime toujours regarder des matchs de rugby. Mais ma passion sportive principale ces quinze dernières années a été la planche à voile, et plus récemment le kitesurf, que j'ai trouvé un peu plus facile pour mes articulations. De façon amusante, j'ai dû dans ma carrière académique m'interroger sur de nombreux problèmes de nœuds associés à ces sports et à la voile en général. Je suis probablement le seul kitesurfer alentour qui pense vraiment en termes de tresses et de leurs inverses quand j'accroche les lignes de mon kitesurf.

La musique est un autre de mes centres d'intérêt. J'aime chanter et nos trois enfants sont impliqués dans la musique. Il y a beaucoup d'éléments communs entre les mathématiques et la musique. Ma vie est pleine de surprises et j'espère être surpris encore de nombreuses fois.

Traduction d'un article concernant l'utilisation d'ondes sphéroïdales prolates pour visualiser des régions limitées de la sphère, (Denise Vella-Chemla, 12.11.2020)

Concentration spatio-spectrale sur une sphère

Frederik J. Simons [1]   F. A. Dahlen [2]   Mark A. Wieczorek [3]

Résumé

Nous posons et résolvons l'analogue du problème de la concentration temps-fréquence de Slepian sur la surface de la sphère unité pour déterminer une famille de fonctions orthogonales à bande temporelle strictement limitée, qui sont concentrées de façon optimale dans une région fermée de la sphère, ou, alternativement, de fonctions à bande spatiale strictement limitée qui sont concentrées de façon optimale dans le domaine harmonique de la sphère. Une telle base de fonctions concentrées simultanément spatialement et spectralement devrait être un outil utile pour l'analyse des données et leur représentation dans de nombreuses applications géophysiques et planétaires, aussi bien qu'en imagerie médicale, informatique, cosmologie et analyse numérique. Les fonctions de Slepian peuvent être trouvées soit en résolvant un problème de recherche de valeurs propres algébriques ou en résolvant une équation intégrale de Fredholm dans le domaine spatial. Les valeurs propres associées sont une mesure de la concentration spatio-spectrale. Quand la région de concentration est une calotte polaire symétrique par rapport à l'axe, l'opérateur de projection spatio-spectral commute avec l'opérateur de Sturm-Liouville ; cela permet de calculer les fonctions propres extrêmement précisément et efficacement, même quand leur produit surface-largeur-de-bande, ou nombre de Shannon, est grand. A la limite asymptotique d'une petite région de concentration et d'une large bande harmonique sphérique, le problème de la concentration sphérique approche son équivalent dans le plan, qui présente une auto-similarité quand le nombre de Shannon est conservé invariant.

1 Introduction

Dans une série d'articles classiques publiés dans les années 60, David Slepian et ses collègues ont résolu un problème fondamental en ingénierie des communications, notamment le problème de concentrer un signal de façon optimale à la fois dans les domaines du temps et de la fréquence [32; 33; 53; 54; 56]. La famille orthogonale des fenêtres de données, ou des cônes, qui surviennent dans un tel contexte, et leurs extensions multi-dimensionnelles [20; 36] ont été utilisées comme base d'une méthode multi-cônes d'analyse spectrale [46; 61], et pour l'analyse et la représentation des données d'une grande variété d'applications en physique, informatique et biomédecine (e.g., en géodésie, sismologie, optique, théorie de l'information, neurologie, et reconnaissance vocale). Les opérateurs de concentration de fréquence temporelle et d'échelle temporelle ont été étudiés dans des contextes plus généraux et dans une variété de géométries uni- ou multi-dimensionnelles par plusieurs auteurs [e.g., 10; 11; 13; 15; 35; 41; 42].

Dans cet article, nous considérons la concentration spatiale et spectrale simultanée d'une fonction à valeurs réelles de positionnement géographique sur la sphère unité. Les multi-cônes sphériques que nous en dérivons devraient être utiles dans un grand nombre d'applications d'analyse de données géophysiques et planétaires ; c'est la première motivation qui sous-tend notre présente étude. En particulier, nous notons que les propriétés physiques, telles que l'épaisseur ou la force élastique de la lithosphère planétaire, peuvent être estimées à partir des propriétés spectrales croisées de la topologie de la surface et du champ gravitationnel associé [63]. De telles données sont accessibles la plupart du temps à partir de coefficients harmoniques sphériques à bande limitée, mesurés par des satellites artificiels ou des vaisseaux spatiaux. Dans la plupart sinon dans toutes les applications, la courbure de la Terre empêche d'utiliser des approximations localement plates [65]. De ce fait, la détermination d'estimations spatialement localisées des propriétés planétaires nécessite des méthodes de localisation spatio-temporelle qui sont au-delà de celles utilisables dans le plan [e.g., 50]. Des fenêtres sphériques simples et des cônes ont été développés et appliqués dans un certain nombre d'études récentes [e.g., 16; 17; 29; 52] ; pourtant, ils ne sont ni concentrés de façon optimale, ni aussi fiables qu'une famille orthogonale de multi-cônes dans l'extraction d'une information statistique localisée robuste à partir des données sphériques en bande limitée [66].

À la suite d'une analyse intiale et extrêmement perspicace par Grünbaum et ses collègues [19], le problème de la concentration de Slepian sur la sphère n'a, à notre connaissance, été réétudié qu'assez rarement, par des chercheurs intéressés par la géodésie [1], l'imagerie par résonance magnétique du cerveau humain [47] et l'analyse spectrale planétaire [66]. Chacune de ces études traite un cas particulier. Dans notre article, nous posons et résolvons le problème de la concentration spatio-spectrale dans sa forme plus générale, nous discutons d'une certain nombre de méthodes d'implémentation numériques, et nous analysons la limite asymptotique de la Terre plate, dans laquelle le problème de la concentration sphérique se rapproche du problème correspondant sur un plan.

2 Le problème de la concentration de Slepian

Nous commençons par un bref rappel du problème de la concentration en temps-fréquence, unidimensionnel, continu-continu. Les résultats sont bien connus et donc nous pourrons les combiner sans aucun détour ; notre seul objectif est de fournir un modèle pour le problème de la concentration sur la sphère, que nous étudierons dans le reste de l'article. Nous utilisons t et ω pour dénoter le temps et la fréquence angulaire, respectivement, et nous adoptons une convention de normalisation dans laquelle un signal variable en fonction de la variable réelle temps, $f(t)$ et sa transformée de Fourier $F(\omega)$ sont reliés par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega, \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt. \tag{1}$$

Le problème spécifique considéré par Slepian [56] est celui de concentrer de manière optimale dans une bande strictement limitée un signal $g(t)$, avec un spectre $G(\omega)$ qui s'évanouit pour les fréquences $|\omega| > W$, dans un intervalle de temps $|t| \le T$. Aucun tel signal sur bande limitée $g(t)$ ne peut être complètement concentré dans un intervalle fini en vertu du principe d'incertitude de Heisenberg [14; 39] ; le signal optimalement concentré est considéré comme étant celui avec la moindre énergie en dehors de l'intervalle :

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_{-T}^{T} g^2(t)\,dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)\,dt} = \text{maximum}. \tag{2}$$

Les signaux à bande limitée $g(t)$ satisfaisant le problème variationnel (2) ont des spectres $G(\omega)$ qui ont des valeurs propres qui satisfont l'équation intégrale de convolution du domaine de fréquences

$$\int_{-W}^{W} \frac{\sin T(\omega - \omega')}{\pi(\omega - \omega')} G(\omega')\, d\omega' = \lambda G(\omega), \quad |\omega| \leq W. \tag{3}$$

Un problème très relié est celui de concentrer le spectre $H(\omega)$ d'une fonction strictement limitée dans le temps $h(t)$, qui s'évanouit pour certains temps donnés $|t| > T$, vers un intervalle spectral $|\omega| \leq W$. La concentration de mesure appropriée dans ce cas est

$$\lambda = \frac{\int_{-W}^{W} |H(\omega)|^2\, d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2\, d\omega} = \text{maximum.} \tag{4}$$

Les signaux limités dans le temps $h(t)$ dont le spectre satisfait le problème variationnel (4) satisfont eux-mêmes l'équation des valeurs propres du domaine temporel

$$\int_{-T}^{T} \frac{\sin W(t - t')}{\pi(t - t')} h(t')\, dt' = \lambda h(t), \quad |t| \leq T. \tag{5}$$

Ces deux sortes d'équations (3) et (5) ont les mêmes valeurs propres $1 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > 0$, avec des cônes de domaine temporel associés $g_1(t), g_2(t), \ldots$ et $h_1(t), h_2(t), \ldots$ qui coïncident dans l'intervalle $|t| \leq T$, et les spectres propres $G_1(\omega), G_2(\omega), \ldots$ et $H_1(\omega), H_2(\omega), \ldots$ qui coïncident dans l'intervalle $|\omega| \leq W$.

Un changement des variables dépendantes et indépendantes transforment à la fois (3) et (5) en la même équation de valeur propre sans dimension

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin TW(x - x')}{\pi(x - x')} \psi(x')\, dx' = \lambda \psi(x), \quad |x| \leq 1. \tag{6}$$

L'équation (6) montre que les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et les fonctions propres convenablement mises à l'échelle $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ dépendent seulement du produit à largeur de bande temporelle. La somme des valeurs propres est reliée à ce produit par

$$N = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \lambda_\alpha = \frac{2TW}{\pi}. \tag{7}$$

À cause de la forme caractéristique étagée du spectre des valeurs propres [30; 57], le nombre qu'on appelle nombre de Shannon [46] est une bonne estimation du nombre de valeurs propres significatives, ou, pour le dire rapidement, le nombre de signaux $f(t)$ qui peuvent être simultanément concentrés vers un intervalle fini de durées $|t| \leq T$ et un intervalle fini de fréquences $|\omega| \leq W$.

L'opérateur intégral agissant sur ψ du côté gauche de l'équation (6) commute avec un opérateur différentiel du second ordre,

$$\mathcal{P} = \frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{d}{dx} - T^2W^2x^2, \tag{8}$$

qui advient dans la séparation de l'équation d'onde tri-dimensionnelle en coordonnées sphéroïdales prolates [55].

À cause de cela, il est également possible de trouver des fonctions propres mises à l'échelle $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ en résolvant l'équation de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d\psi}{dx} + (\chi - T^2W^2x^2)\psi = 0, \quad |x| \leq 1, \tag{9}$$

quand $\chi \neq \lambda$ est la valeur propre associée.
Les cônes propres sphéroïdaux prolates à bande limitée peuvent être choisis de façon à être orthonormaux sur l'intervalle infini de temps $|t| \leq \infty$ et orthogonaux sur l'intervalle fini de temps $|t| \leq T$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha g_\beta \, dt = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \int_{-T}^{T} g_\alpha g_\beta \, dt = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \tag{10}$$

Presque tous les résultats ci-dessus peuvent être étendus au problème analogue de concentration spatio-spectrale pour les fonctions définies sur une surface de la sphère unité. Comme nous le verrons, le problème en deux dimensions est enrichi par la forme de la région de concentration spatiale.

3 Préliminaires

La géométrie de la sphère unité $\Omega = \{\hat{\mathbf{r}} : \|\hat{\mathbf{r}}\| = 1\}$ est montrée sur la Figure 1. On note la colatitude [4] d'un point $\hat{\mathbf{r}}$ par $0 \leq \theta \leq \pi$ et la longitude par $0 \leq \phi < 2\pi$, de telle façon que $\hat{\mathbf{r}} = (\theta, \phi)$ représente une position géographique sur la sphère. La distance angulaire géodésique entre deux points $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\mathbf{r}}'$ sera notée Δ, où

$$\cos\Delta = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi'). \tag{11}$$

Nous utilisons R pour dénoter une région de Ω d'aire A, dans laquelle nous cherchons à concentrer une fonction à bande de position limitée $\hat{\mathbf{r}}$. La région peut consister en un certain nombre de sous-régions disconnectées, $R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots$, et elle peut avoir une frontière de forme irrégulière, comme montré. La région complémentaire à R sera dénotée $\Omega - R$.

3.1 Harmoniques sphériques

Puisque nous nous restreignons aux fonctions à valeurs réelles, nous utilisons les harmoniques réelles de surface sphérique $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = Y_{lm}(\theta, \phi)$ définies par [9; 12]

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \begin{cases} \sqrt{2}X_{l|m|}(\theta)\cos m\phi & \text{si } -l \leq m < 0 \\ X_{l0}(\theta) & \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2}X_{lm}(\theta)\sin m\phi & \text{si } 0 < m \leq l, \end{cases} \tag{12}$$

$$X_{lm}(\theta) = (-1)^m \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} P_{lm}(\cos\theta), \tag{13}$$

$$P_{lm}(\mu) = \frac{1}{2^l l!}(1-\mu^2)^{m/2}\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{l+m}(\mu^2-1)^l. \tag{14}$$

La quantité $0 \leq l \leq \infty$ est connue comme étant l'harmonique sphérique de degré angulaire, et $-l \leq m \leq l$ est son ordre angulaire. Le nombre asymptotique d'ondes $l \to \infty$ associé à une harmonique de degré l est $\sqrt{l(l+1)} \approx l + 1/2$ [5; 26]. La fonction $P_{lm}(\mu)$ définie dans (14) est la

4. rappel : c'est l'angle complémentaire de la latitude d'un lieu, i.e. la différence entre 90 et la latitude.

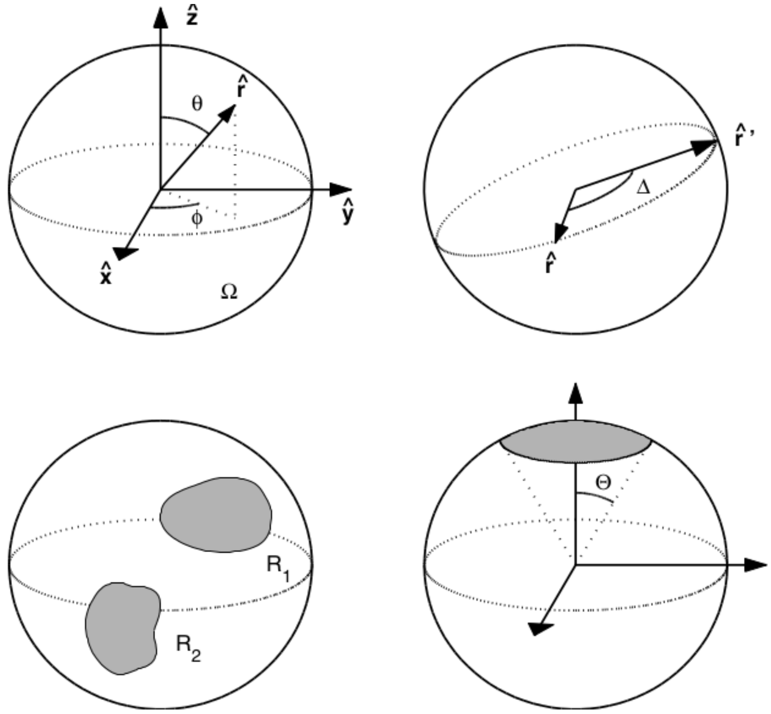


FIGURE 1 – *Schéma illustrant la géométrie du problème de concentration sphérique. En bas à droite est montrée une calotte polaire asymétrique de rayon colatitudinal Θ, traité à la Section 5. L'aire de la région de concentration, $R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots$, est dénotée par la lettre A.*

fonction de Legendre de degré entier l et d'ordre m. Les harmoniques sphériques $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ sont des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami,

$$\nabla^2 = \partial_\theta^2 + \cot\theta\,\partial_\theta + (\sin\theta)^{-2}\partial_\phi^2, \tag{15}$$

avec des valeurs propres associées $-l(l+1)$. Notre choix de constantes multiplicatives dans les équations (12) et (13) orthonormalise les harmoniques sur la sphère unité :

$$\int_\Omega Y_{lm} Y_{l'm'}\, d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{16}$$

Les relations d'orthogonalité d'ordre fixé correspondantes pour $X_{lm}(\theta)$ et $P_{lm}(\mu)$ sont

$$\int_0^\pi X_{lm} X_{l'm} \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\,\delta_{ll'}, \tag{17a}$$

$$\int_{-1}^1 P_{lm} P_{l'm}\, d\mu = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{ll'}. \tag{17b}$$

L'intégrale de Legendre d'un polynôme $P_l(\mu) = P_{l0}(\mu)$ sur une calotte $\cos\Theta \leq \mu \leq 1$ est [6]

$$\int_{\cos\Theta}^1 P_l\, d\mu = \frac{1}{2l+1}[P_{l-1}(\cos\Theta) - P_{l+1}(\cos\Theta)],, \tag{18}$$

où $P_{-1}(\mu) = 1$, et le produit des fonctions de Legendre au même argument est

$$X_{lm}(\theta)X_{l'm}(\theta) \;=\; (-1)^m \sum_{n=|l-l'|}^{l+l'} \sqrt{\frac{(2n+1)(2l+1)(2l'+1)}{4\pi}}$$

$$\times \begin{pmatrix} l & n & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & n & l' \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} X_{n0}(\theta), \tag{19}$$

où les tableaux d'indices sont des symboles de Wigner 3-j [12; 39]. Parmi les nombreuses relations récurrentes à trois termes incluant les fonctions de Legendre associées et leurs dérivées, nous utilisons les deux suivantes dans cet article, notamment

$$(2l+1)\mu P_{lm} = (l-m+1)P_{l+1,m} + (l+m)P_{l-1,m}, \tag{20a}$$

$$(1-\mu^2)\frac{dP_{lm}}{d\mu} = (l+1)\mu P_{lm} - (l-m+1)P_{l+1,m}. \tag{20b}$$

Finalement, il y a deux relations impliquant des sommes de produits de fonctions de Legendre évaluées en différents arguments qui sont utiles dans la discussion qui suit.

La première est le célèbre théorème de l'addition harmonique sphérique [12]

$$\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'), \tag{21}$$

et la seconde est la version de Legendre de l'identité de Christoffel-Darboux [59; 60]

$$\begin{aligned}(\mu-\mu')\sum_{l=m}^{L}(2l+1)\left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]P_{lm}(\mu)P_{lm}(\mu') \\ = \frac{(L-m+1)!}{(L+m)!}[P_{L+1,m}(\mu)P_{Lm}(\mu') - P_{Lm}(\mu)P_{L+1,m}(\mu')].\end{aligned} \tag{22}$$

Une application de la règle de L'Hôpital dans l'équation (22) couvre le cas dans lequel $\mu = \mu'$.

3.2 Fonctions sur la sphère

Soit $f(\hat{\mathbf{r}})$ une fonction à valeurs réelles de carré intégrable sur la sphère unité Ω. Toute telle fonction peut être développée en une série d'harmoniques sphériques :

$$f = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_{lm}Y_{lm}, \qquad f_{lm} = \int_\Omega f\, Y_{lm}\, d\Omega. \tag{23}$$

Les équations (23) sont les analogues sphériques de la tranformation paire de Fourier en une dimension (1). Le caractère fini de la sphère unité quantifie les “fréquences” colatitudinales et longitudinales $0 \le l \le \infty$ et $-l \le m \le l$. Nous utilisons des caractères sans serif f pour noter le vecteur colonne ordonné des coefficients des harmoniques sphériques :

$$\mathsf{f} = \begin{pmatrix} \vdots \\ f_{lm} \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{24}$$

La norme d'une fonction $f(\hat{\mathbf{r}})$ dans le domaine spatial sera notée

$$\|f\|_\Omega^2 = \int_\Omega f^2\, d\Omega, \tag{25}$$

et la norme de son domaine spectral équivalent f sera notée

$$\|\mathsf{f}\|_\infty^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f_{lm}^2. \tag{26}$$

En utilisant cette notation, la relation de Parseval [46] peut s'écrire sous la forme $\|f\|_\Omega^2 = \|\mathsf{f}\|_\infty^2$.

La densité de la puissance spectrale ou la variance par le degré sphérique harmonique l et par unité d'aire d'une fonction $f(\hat{\mathbf{r}})$ est définie par

$$\langle f_l^2 \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} f_{lm}^2. \tag{27}$$

Nous utilisons $\delta(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$ pour la fonction delta de Dirac sur la sphère, avec la propriété de réplication

$$\int_\Omega \delta(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') f(\hat{\mathbf{r}}')\, d\Omega' = f(\hat{\mathbf{r}}). \tag{28}$$

Nous pouvons écrire $\delta(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$ dans chacune des formes alternatives

$$\begin{aligned}
\delta(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') &= (\sin\theta)^{-1} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'). \qquad (29)
\end{aligned}$$

Le degré de variance d'une fonction delta est constant ; sa densité de puissance spectrale est blanche :

$$\langle \delta_l^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \quad \text{pour tout } 0 \le l \le \infty. \tag{30}$$

3.3 Fonctions à temps dans une bande limitée et à espace dans une bande limitée

Nous nous intéressons à deux sous-espaces des fonctions de carré intégrable de la sphère unité Ω. Nous utilisons

$$\mathcal{S}_L = \{g \colon \langle g_l^2 \rangle = 0 \ \text{ pour } L < l \le \infty\} \tag{31}$$

pour noter l'espace des fonctions à bande limitée,

$$g = \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=-l}^{l} g_{lm} Y_{lm}, \tag{32}$$

qui n'ont pas de puissance au-dessus d'un degré harmonique sphérique maximum L, et nous utilisons

$$\mathcal{S}_R = \{h \colon h = 0 \ \text{ dans } \Omega - R\} \tag{33}$$

pour noter l'espace de toutes les fonctions à espace limité $h(\hat{\mathbf{r}})$ qui sont strictement contenues dans une région R. L'espace $\mathcal{S}_R$ est de dimension infinie, mais la dimension de l'espace des fonctions à bande limitée est

$$\dim \mathcal{S}_L = \sum_{l=0}^{L} (2l+1) = (L+1)^2, \tag{34}$$

puisque le vecteur colonne ordonné des coefficients harmoniques sphériques

$$\mathsf{g} = \begin{pmatrix} g_{00} \\ \vdots \\ g_{LL} \end{pmatrix} \tag{35}$$

associé à une fonction $g(\hat{\mathbf{r}})$ de la forme (32) a $(L+1)^2$ entrées. Les semi-normes spatiale et spectrale analogues à (25) et (26) sont définies ainsi

$$\|f\|_R^2 = \int_R f^2 \, d\Omega, \qquad \|\mathsf{f}\|_L^2 = \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=-l}^{l} f_{lm}^2. \tag{36}$$

Dans l'espace $\mathcal{S}_R$ des fonctions à espace limité, $\|h\|_R^2$ est une norme, et dans l'espace $\mathcal{S}_L$ des fonctions à bande-limitée, $\|\mathsf{g}\|_L^2$ est une norme ; plus généralement, pourtant, à la fois $\|f\|_R^2$ et $\|\mathsf{f}\|_L^2$ sont des semi-normes.

4 Concentration dans une région de forme arbitraire

Le principe d'incertitude [14; 39] stipule qu'aucune fonction ne peut à la fois être strictement limitée en espace et strictement limitée en bande, i.e., aucune $f(\hat{\mathbf{r}})$ ne peut à la fois être présente dans les deux sous-espaces $\mathcal{S}_R$ et $\mathcal{S}_L$ simultanément. L'objectif de notre article est de déterminer ces fonctions à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ qui sont aussi contraintes que possible dans une région donnée R, et ces fonctions à espace limité $h(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_R$ dont le spectre de puissance est aussi bien concentré que possible dans l'intervalle $0 \leq l \leq L$. Comme dans le cas de la fréquence temporelle, ces deux concentrations spacio-temporelles s'avèreront être le dual l'une de l'autre. Pour raccourcir l'exposé, nous utiliserons fréquemment les abréviations

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} = \sum_{lm}^{\infty} \quad \text{et} \quad \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=-l}^{l} = \sum_{lm}^{L}. \tag{37}$$

4.1 Concentration spatiale d'une fonction à bande limitée

Pour maximiser la concentration spatiale d'une fonction à bande limiltée $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ dans une région R, nous maximisons le rapport des (semi-)normes :

$$\lambda = \frac{\|g\|_R^2}{\|g\|_\Omega^2} = \frac{\displaystyle\int_R g^2 \, d\Omega}{\displaystyle\int_\Omega g^2 \, d\Omega} = \text{maximum}. \tag{38}$$

Le problème variationnel à deux dimensions (38) est analogue au problème à une dimension (2). Ici, comme là, la quantité $0 < \lambda < 1$ est une mesure de la concentration spatiale. En insérant la représentation (32) de $g(\hat{\mathbf{r}})$ dans (38), et en interchangeant les ordres de sommation et d'intégration, on peut exprimer λ par la forme

$$\lambda \;=\; \frac{\displaystyle\int_R \left(\sum_{lm}^{L} g_{lm} Y_{lm} \sum_{l'm'}^{L} g_{l'm'} Y_{l'm'} \right) d\Omega}{\displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{lm}^{L} g_{lm} Y_{lm} \sum_{l'm'}^{L} g_{l'm'} Y_{l'm'} \right) d\Omega}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\displaystyle\sum_{lm}^{L} g_{lm} \sum_{l'm'}^{L} \left(\int_R Y_{lm} Y_{l'm'} \, d\Omega \right) g_{l'm'}}{\displaystyle\sum_{lm}^{L} g_{lm} \sum_{l'm'}^{L} \left(\int_\Omega Y_{lm} Y_{l'm'} \, d\Omega \right) g_{l'm'}} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{lm}^{L} g_{lm} \sum_{l'm'}^{L} D_{lm,l'm'} \, g_{l'm'}}{\displaystyle\sum_{lm}^{L} g_{lm}^2},
\end{aligned} \tag{39}
$$

où dans la dernière étape, on a utilisé la relation d'orthonormalité (16), et défini la quantité quadruplement indexée

$$
D_{lm,l'm'} = \int_R Y_{lm} Y_{l'm'} \, d\Omega. \tag{40}
$$

En introduisant la matrice $(L+1)^2 \times (L+1)^2$

$$
\mathsf{D} = \begin{pmatrix} D_{00,00} & \cdots & D_{00,LL} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{LL,00} & \cdots & D_{LL,LL} \end{pmatrix}, \tag{41}
$$

d'éléments $D_{lm,l'm'}$, où $0 \leq l \leq L$ et $-l \leq m \leq l$, on peut réécire l'équation (38) comme un problème classique de variation de matrice [22] dans l'espace $\mathcal{S}_L$:

$$
\lambda = \frac{\mathsf{g}^\mathsf{T} \mathsf{D} \mathsf{g}}{\mathsf{g}^\mathsf{T} \mathsf{g}} = \text{maximum}. \tag{42}
$$

Les vecteurs colonnes g qui rendent le quotient de Rayleigh λ stationnaire dans l'équation (42) sont les solutions du problème de recherche des valeurs propres algébriques dans $(L+1)^2 \times (L+1)^2$

$$
\mathsf{D}\mathsf{g} = \lambda \mathsf{g}. \tag{43}
$$

L'équation (43) est l'analogue discret sphérique de l'équation de domaine spectral à une dimension (3). La matrice D est réelle, symétrique et définie positive

$$
\mathsf{D}^\mathsf{T} = \mathsf{D} \quad \text{et} \quad \mathsf{g}^\mathsf{T} \mathsf{D} \mathsf{g} > 0 \quad \text{pour tout } \mathsf{g} \neq \mathsf{0}, \tag{44}
$$

de telle façon que les $(L+1)^2$ valeurs propres λ et les vecteurs propres associés g sont toujours réels [22]. Nous ordonnons les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{(L+1)^2}$ et les vecteurs propres $\mathsf{g}_1, \mathsf{g}_2, \ldots, \mathsf{g}_{(L+1)^2}$ de telle façon que

$$
1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_{(L+1)^2} > 0. \tag{45}
$$

Chaque vecteur propre du domaine spectral g_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, (L+1)^2$ donne naissance à une fonction associée à bande limitée spatiale $g_\alpha(\hat{\mathbf{r}})$, définie par l'équation (32). La première inégalité dans (45) est stricte parce que la fonction à bande limitée peut être complètement confinée dans une région R, et la dernière inégalité est stricte à cause du caractère défini positif de la matrice D.

La symétrie $\mathsf{D}^\mathsf{T} = \mathsf{D}$ garantit aussi que les vecteurs propres $\mathsf{g}_1, \mathsf{g}_2, \ldots, \mathsf{g}_{(L+1)^2}$ sont mutuellement orthogonaux [22]. Nous les choisissons orthonormés :

$$
\mathsf{g}_\alpha^\mathsf{T} \mathsf{g}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \mathsf{g}_\alpha^\mathsf{T} \mathsf{D} \mathsf{g}_\beta = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \tag{46}
$$

Les fonctions propres spatiales associées $g_1(\hat{\mathbf{r}}), g_2(\hat{\mathbf{r}}), \ldots, g_{(L+1)^2}(\hat{\mathbf{r}})$ sont dans ce cas à la fois orthonormées sur la totalité de la sphère Ω et orthogonales sur la région R :

$$\int_\Omega g_\alpha g_\beta \, d\Omega = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \int_R g_\alpha g_\beta \, d\Omega = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \tag{47}$$

Les deux relations du domaine spatial dans l'équation (47) sont équivalentes aux relations spectrales matricielles (46), et elles sont analogues aux relations uni-dimensionnelles d'orthogonalité (10). La fonction propre $g_1(\hat{\mathbf{r}})$ associée avec la plus grande valeur propre λ_1 est l'élément de l'espace $\mathcal{S}_L$ des fonctions à bande limitée qui est la plus concentrée dans la région R, la fonction propre $g_2(\hat{\mathbf{r}})$ est la fonction suivante (la seconde fonction) la plus concentrée dans $\mathcal{S}_L$ orthogonal à $g_1(\hat{\mathbf{r}})$ à la fois sur Ω et R, et etc.

Écrit complètement en utilisant les notations, l'équation matricielle de valeur propre (43) est

$$\sum_{l'm'}^{L} D_{lm,l'm'} g_{l'm'} = \lambda \, g_{lm}. \tag{48}$$

En multipliant l'équation (48) par $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ et en sommant sur tous les $0 \leq l \leq L$ et $-l \leq m \leq l$, le côté droit fournit $\lambda g(\hat{\mathbf{r}})$, et le côté gauche peut être manipulé de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{lm}^{L} \left(\sum_{l'm'}^{L} D_{lm,l'm'} g_{l'm'} \right) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) &= \sum_{lm}^{L} \sum_{l'm'}^{L} \left(\int_R Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{r}}') \, d\Omega' \right) g_{l'm'} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \\
&= \int_R \left(\sum_{lm}^{L} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \right) \left(\sum_{l'm'}^{L} g_{l'm'} Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{r}}') \right) \, d\Omega' \\
&= \int_R D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') \, g(\hat{\mathbf{r}}') \, d\Omega',
\end{aligned} \tag{49}$$

où dans la dernière étape, nous avons défini la fonction delta de Dirac à bande limitée

$$D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') = \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') = \sum_{l=0}^{L} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'). \tag{50}$$

Les calculs ci-dessus démontrent que l'équation matricielle du domaine spectral (43) est équivalente à l'équation des valeurs propres entières du domaine spatial

$$\int_R D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') \, g(\hat{\mathbf{r}}') \, d\Omega' = \lambda g(\hat{\mathbf{r}}), \quad \hat{\mathbf{r}} \in \Omega. \tag{51}$$

L'équation (51) est une équation d'intégrale de Fredholm de seconde espèce, avec un noyau symétrique, séparable [28; 62].

Après avoir inséré les représentations (32) et (50) dans l'équation (51), nous retrouvons l'équation matricielle (43), de telle façon que le problème de la valeur propre du domaine spectral pour g et le problème de la valeur propre dans le domaine spatial pour une $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ limitée en bande sont complètement équivalents.

En résumé, nous pouvons trouver une famille orthogonale de fonctions propres à bande limitée qui sont concentrées de manière optimale dans une région R sur la sphère unité Ω soit en résolvant le problème matriciel $(L+1)^2 \times (L+1)^2$ de valeurs propres (43) pour les vecteurs propres du domaine spectal $\mathsf{g}_1, \mathsf{g}_2, \ldots, \mathsf{g}_{(L+1)^2}$, soit en résolvant l'équation intégrale de Fredholm du domaine spatial (51) pour les fonctions propres associées du domaine spatial $g_1, g_2, \ldots, g_{(L+1)^2}$.

Chacune des deux méthodes détermine les fonctions propres optimalement concentrées en tout point $\hat{\mathbf{r}} \in \Omega$, i.e., à la fois dans la région R, où elles sont concentrées, et dans la région complémentaire, $\Omega - R$, où elles montrent un (évitement) leakage flagrant.

4.2 Concentration spectrale d'une fonction à espace limité

Plutôt que de chercher à concentrer une fonction à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ dans une région spatiale R, on peut chercher à concentrer une fonction limitée en espace $h(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_R$ dans un intervalle spectral $0 \leq l \leq L$. Une mesure adéquate de la concentration est alors le rapport de norme analogue en dimension 1 au rapport (4) :

$$\lambda = \frac{\|\mathsf{h}\|_L^2}{\|\mathsf{h}\|_\infty^2} = \frac{\displaystyle\sum_{l=0}^{L} \sum_{m=-l}^{l} h_{lm}^2}{\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} h_{lm}^2} = \text{maximum}. \tag{52}$$

Après avoir inséré la représentation des coefficients d'expansion sphérique harmonique

$$h_{lm} = \int_R h\, Y_{lm}\, d\Omega, \tag{53}$$

et avoir interchangé l'ordre de sommation et d'intégration, nous pouvons réécrire le rapport (52) sous la forme

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\displaystyle\sum_{lm}^{L} \int_R h(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\, d\Omega \int_R h(\hat{\mathbf{r}}') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}')\, d\Omega'}{\displaystyle\sum_{lm}^{\infty} \int_R h(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\, d\Omega \int_R h(\hat{\mathbf{r}}') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}')\, d\Omega'} \\
&= \frac{\displaystyle\int_R \int_R h(\hat{\mathbf{r}}) \left(\sum_{lm}^{L} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \right) h(\hat{\mathbf{r}}')\, d\Omega'\, d\Omega}{\displaystyle\int_R \int_R h(\hat{\mathbf{r}}) \left(\sum_{lm}^{\infty} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \right) h(\hat{\mathbf{r}}')\, d\Omega'\, d\Omega} \\
&= \frac{\displaystyle\int_R \int_R h(\hat{\mathbf{r}}) D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') h(\hat{\mathbf{r}}')\, d\Omega\, d\Omega'}{\displaystyle\int_R h^2(\hat{\mathbf{r}})\, d\Omega},
\end{aligned} \tag{54}$$

où dans la dernière étape nous avons utilisé la propriété de réplication (28) de la fonction delta (29) et la définition (50) du noyau $D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$. Les fonctions $h(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_R$ qui rendent le quotient de Rayleigh (54) stationnaire sont les solutions valeurs propres entières de l'équation de Fredholm

$$\int_R D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') h(\hat{\mathbf{r}}')\, d\Omega' = \lambda h(\hat{\mathbf{r}}), \quad \hat{\mathbf{r}} \in R. \tag{55}$$

L'équation (55) est l'analogue sphérique de l'équation des valeurs propres à domaine temporel à une dimension (5). En fait, cette équation pour $h(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_R$ est identique à l'équation (51) pour $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$. La seule différence est que l'équation (51) est applicable sur la sphère complète Ω, alors que le domaine de l'équation (55) est limité à la région R, dans laquelle $h(\hat{\mathbf{r}}) \neq 0$. De façon évidente, les fonctions popres $h(\hat{\mathbf{r}})$ qui maximisent le rapport de norme spectral (52) sont identiques dans la région R, aux fonctions propres $g(\hat{\mathbf{r}})$ qui maximisent le rapport de norme spatial (38) :

$$h(\hat{\mathbf{r}}) = \begin{cases} g(\hat{\mathbf{r}}) & \text{if } \hat{\mathbf{r}} \in R \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{56}$$

Chacune des $(L+1)^2$ fonction à bande limitée $g_\alpha \in \mathcal{S}_L$ engendre une fonction propre à espace limité $h_\alpha \in \mathcal{S}_R$, définie par la restriction (56). Les valeurs propres associées λ_α sont une mesure à la fois de la concentration des fonctions propres à bande limitée dans la région R et de la concentration spectrale des fonctions propres à espace limité dans l'intervalle $0 \le l \le L$. L'énergie spatiale fractionnelle $1 - \lambda_\alpha$ évitée par une certaine fonction $g_\alpha(\hat{\mathbf{r}})$ vers la région $\Omega - R$ est identique à l'énergie spectrale fractionnelle évitée par $h_\alpha(\hat{\mathbf{r}})$ dans les hauts degrés $L < l \le \infty$. Si nous avions commencé avec la prescription variationnelle (52) plutôt que (38), nous aurions obtenu l'équation intégrale (51) qui régit une fonction à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ en étendant simplement le domaine de solution de l'équation (55) à la sphère complète Ω.

Les fonctions à espace limité définies par l'équation (56) sont orthogonales mais non orthonormales sur la sphère complète Ω et sur la région R :

$$\int_\Omega h_\alpha h_\beta \, d\Omega = \int_R h_\alpha h_\beta \, d\Omega = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \tag{57}$$

Les coefficients harmoniques sphériques h_{lm}, avec $0 \le l \le \infty$ et $-l \le m \le l$, sont donnés en fonction de ceux de g_{lm}, avec $0 \le l \le L$ et $-l \le m \le l$, par

$$h_{lm} = \sum_{l'=0}^{L} \sum_{m'=-l'}^{l'} D_{lm,l'm'} g_{l'm'}, \tag{58}$$

qui se réduit à $h_{lm} = \lambda g_{lm}$ pour $0 \le l \le L$. En plus des $(L+1)^2$ fonctions propres avec valeurs propres non nulles associées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{(L+1)^2}$, l'équation (55) a un espace nul de dimension infinie de fonctions propres avec valeurs propres associées $\lambda = 0$. Chaque fonction $h(\hat{\mathbf{r}})$ qui s'évanouit en $\Omega - R$ et qui n'a pas d'énergie nulle part dans l'intervalle $0 \le l \le L$ est un élément de cet espace nul.

4.3 Valeurs propres significatives et non significatives

La somme des valeurs propres de la matrice D définie dans l'équation (41) est

$$N = \sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} \lambda_\alpha = \operatorname{tr} \mathsf{D} = \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=-l}^{l} D_{lm,lm}. \tag{59}$$

En substituant les éléments de la matrice diagonale $D_{lm,lm}$ de l'équation (40) et en utilisant le théorème d'addition des harmoniques sphériques (21), cela se simplifie en

$$\begin{aligned} N &= \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=-l}^{l} \int_R Y_{lm} Y_{lm} \, d\Omega \\ &= \sum_{l=0}^{L} \int_R \left(\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm} Y_{lm} \right) d\Omega \\ &= \sum_{l=0}^{L} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) \int_R P_l(1) \, d\Omega \\ &= (L+1)^2 \, \frac{A}{4\pi}, \end{aligned} \tag{60}$$

où dans la dernière étape, nous avons utilisé l'identité $P_l(1) = 1$ pour exprimer le résultat en fonction de l'aire de la surface, $A = \int_R d\Omega$, de la région de concentration R.

Nous pouvons alternativement obtenir le résultat (59) en commençant avec l'équation des valeurs propres spatiales (51).

Le noyau $D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$ peut être exprimé en fonction des valeurs propres spatiales $g_1, g_2, \ldots, g_{(L+1)^2}$, qui constituent une base pour $\mathcal{S}_L$, dans la formule

$$D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') = \sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} g_\alpha(\hat{\mathbf{r}}) g_\alpha(\hat{\mathbf{r}}'). \tag{61}$$

La représentation (61) est l'analogue sphérique du théorème de Mercer [28; 62]. Algébriquement, nous pouvons regarder la relation (61) comme ayant été obtenue à partir de la représentation originale (50) par une transformation orthogonale à partir d'une base Y_{lm}, $0 \le l \le L$ et $-l \le m$, vers une autre g_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, (L+1)^2$. En posant $\hat{\mathbf{r}}' = \hat{\mathbf{r}}$ dans l'équation (61), et en intégrant sur la région R, on obtient

$$\int_R D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}})\, d\Omega = \sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} \int_R g_\alpha^2(\hat{\mathbf{r}})\, d\Omega = \sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} \lambda_\alpha. \tag{62}$$

Alternativement, poser $\hat{\mathbf{r}}' = \hat{\mathbf{r}}$ dans l'équation (50) et intégrer sur R amène à

$$\int_R D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}})\, d\Omega = \sum_{l=0}^{L} \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right) \int_R P_l(1)\, d\Omega = (L+1)^2\, \frac{A}{4\pi}. \tag{63}$$

En comparant les équations (59)–(60) et (62)–(63), on voit que l'on peut écrire la somme des valeurs propres (59) dans chacune des formes équivalentes

$$N = \sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} \lambda_\alpha = \mathrm{tr}\, \mathsf{D} = \int_R D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}})\, d\Omega = (L+1)^2\, \frac{A}{4\pi}. \tag{64}$$

La quantité N est l'analogue sphérique du nombre de Shannon (7) dans le problème de concentration en une dimension de Slepian. Les fonctions propres $g_\alpha(\hat{\mathbf{r}})$ qui sont bien concentrées dans la région R auront des valeurs propres associées λ_α qui sont proches de l'unité, alors que celles qui sont peu concentrées auront des valeurs propres associées λ_α qui seront proches de zéro. Si, comme dans le problème à une dimension, le spectre des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{(L+1)^2}$ a une bande de transition étroite des valeurs proches de l'unité aux valeurs proches de zéro, alors le nombre total de valeurs propres significatives ($\lambda_\alpha \approx 1$) sera bien approximé par la somme (arrondie) (59). Pour cette raison, nous nous attendons à ce que N soit une bonne approximation du nombre de valeurs propres significatives. Pour dire ça rapidement, le nombre de Shannon sphérique (64) est la dimension de l'espace des fonctions à deux dimensions $f(\hat{\mathbf{r}})$ qui sont à la fois approximativement limitées dans le domaine spectral aux degrés sphériques harmoniques $0 \le L$ et approximativement limitées dans le domaine spatial à une région de forme arbitraire R d'aire A [30; 31].

Plutôt que de chercher une fonction à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ qui est optimalement concentrée dans une région spatiale R, nous pourrions avoir décidé d'en chercher une qui est optimalement exclue de R, i.e. une fonction qui est optimalement concentrée dans une région complémentaire d'une région R, cette région complémentaire de R étant notée $\Omega - R$. Dans ce cas, nous pourrions souhaiter minimiser plutôt que maximiser le rapport de Rayleigh (38). En fait, tout ce que nous avons trouvé, ce sont les fonctions à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ qui rendent la valeur propre λ stationnaire, et ainsi nous avons vraiment résolu le problème de confinement (38) et le problème de l'exclusion simultanément. Les fonctions propres optimalement concentrées et les fonctions propres optimalement exclues sont identiques, mais d'indices d'ordre inversés, i.e., la fonction à bande limitée qui est la plus exclusive de R et la plus concentrée dans $\Omega - R$ est $g_{(L+1)^2}(\hat{\mathbf{r}})$, avec la valeur propre associée la plus petite $\lambda_{(L+1)^2}$. À chaque fois que l'aire A de la région R est une petite fraction de l'aire de la sphère $A \ll 4\pi$, il y aura beaucoup plus de fonctions propres correctement exclues avec des valeurs propres non significatives ($\lambda_\alpha \approx 0$), que de fonctions propres concentrées avec des valeurs propres significatives, $\lambda_\alpha \approx 1$), i.e., $N \ll (L+1)^2$.

La somme des carrés des fonctions propres à bande limitée $(L+1)^2$ $g_\alpha(\hat{\mathbf{r}})$ est une constante, indépendante de la position $\hat{\mathbf{r}}$ sur la sphère Ω. Ceci est une autre conséquence du théorème de Mercer (61) et de la définition (50) :

$$\sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} g_\alpha^2(\hat{\mathbf{r}}) = D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}) = \frac{(L+1)^2}{4\pi} = \frac{N}{A}. \tag{65}$$

Si les N premières fonctions propres $g_1, g_2, \ldots, g_N$ ont des valeurs propres proches de l'unité et sont pour la plupart dans R, et que les autres $g_{N+1}, g_{N+2}, \ldots, g_{(L+1)^2}$ ont des valeurs propres proches de zéro et sont principalement dans $\Omega - R$, alors nous nous attendons à ce que la somme des carrés pondérée par les valeurs propres soit

$$\sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} \lambda_\alpha g_\alpha^2(\hat{\mathbf{r}}) \approx \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha g_\alpha^2(\hat{\mathbf{r}}) \approx \begin{cases} N/A & \text{si } \hat{\mathbf{r}} \in R \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{66}$$

Les termes avec $N+1 \leq \alpha \leq (L+1)^2$ devraient être négligeables, le fait qu'ils soient ou non dans la somme n'est donc pas matérialisé (66).

Pris ensemble, les N premières fonctions propres orthogonales $g_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, N$, avec des valeurs propres significatives $\lambda_\alpha \approx 1$, fournissent un recouvrement essentiellement uniforme de la region R. C'est vraiment l'essence du problème de la concentration spatio-spectrale ; le nombre de degrés de liberté est réduit de $\dim \mathcal{S}_L = (L+1)^2$ au nombre de Shannon $N = (L+1)^2 A/(4\pi)$.

4.4 Formulation par opérateur abstrait

Nous concluons cette section sur le problème de la concentration dans le cas d'une région de forme arbitraire en réitérant la formulation des résultats ci-dessus mais en utilisant maintenant une notation d'opérateurs abstraits. On utilise $\mathcal{H}$ pour dénoter l'opérateur qui agit sur les fonctions à carré intégrable $f(\hat{\mathbf{r}})$ dans le domaine spatial pour produire les vecteurs colonnes f infini-dimensionnels associés aux coefficients harmoniques sphériques f_{lm} dans le domaine spectral, et nous utilisons $\mathcal{H}^{-1}$ pour dénoter son inverse, de telle façon que

$$\mathcal{H}f = \mathsf{f} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{-1}\mathsf{f} = f. \tag{67}$$

Nous introduisons aussi deux opérateurs de projection, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$, qui projettent respectivement sur l'espace $\mathcal{S}_R$ des fonctions à espace limité et sur l'espace $\mathcal{S}_L$ des fonctions à bande limitée, respectivement.

Le premier de ces opérateurs agit sur les fonctions $f(\hat{\mathbf{r}})$ restreintes dans le domaine spatial,

$$\mathcal{R}f(\hat{\mathbf{r}}) = \begin{cases} f(\hat{\mathbf{r}}) & \text{if } \hat{\mathbf{r}} \in R \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{68}$$

tandis que le second agit sur les vecteurs colonnes dans le domaine spectral,

$$\mathcal{L}\,\mathsf{f} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} f_{00} \\ \vdots \\ f_{\infty\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{00} \\ \vdots \\ f_{LL} \end{pmatrix}. \tag{69}$$

Finalement, nous introduisons une notation pour le produit intérieur standard dans les deux domaines simultanément :

$$\langle f, f' \rangle_\Omega = \int_\Omega f f' \, d\Omega \quad \text{et} \quad \langle \mathsf{f}, \mathsf{f}' \rangle_\infty = \mathsf{f}^\mathsf{T}\mathsf{f}'. \tag{70}$$

La relation de Parseval peut être écrite en utilisant cette notation selon la forme suivante $\langle f, f' \rangle_\Omega = \langle \mathsf{f}, \mathsf{f}' \rangle_\infty$. Les normes spatiales et spectrales introduites dans les équations (25) et (26) sont données par $\|f\|_\Omega^2 = \langle f, f \rangle_\Omega$ et $\|\mathsf{f}\|_\infty^2 = \langle \mathsf{f}, \mathsf{f} \rangle_\infty$.

Le problème variationnel de la concentration spatiale (38) et le problème variationnel de la concentration spectrale (52) peuvent être écrits en utilisant cette notation par opérateurs de la façon suivante

$$\lambda = \frac{\langle \mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\,\mathsf{f}, \mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\,\mathsf{f} \rangle_\Omega}{\langle \mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\,\mathsf{f}, \mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\,\mathsf{f} \rangle_\Omega} = \text{maximum}, \tag{71a}$$

$$\lambda = \frac{\langle \mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}f, \mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}f \rangle_\infty}{\langle \mathcal{H}\mathcal{R}f, \mathcal{H}\mathcal{R}f \rangle_\infty} = \text{maximum}. \tag{71b}$$

Les équations des valeurs propres associées aux domaine spectral et spatial sont

$$(\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L})(\mathcal{L}\,\mathsf{f}) = \lambda(\mathcal{L}\,\mathsf{f}), \tag{72a}$$

$$(\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R})(\mathcal{R}f) = \lambda(\mathcal{R}f), \tag{72b}$$

où nous avons fait usage des faits que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^{-1}$ sont les transposés l'un de l'autre, de telle façon aussi qu'à la fois $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ sont leur propre transposée, et que $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$ et $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$. Les équations (72) sont les opérateurs équivalents à l'équation des valeurs propres algébriques (43) et à l'équation intégrale des valeurs propres (55). Toute solution de l'équation (72a) est un vecteur colonne à bande limitée de la forme $\mathsf{g} = \mathcal{L}\,\mathsf{f}$, alors que toute solution de l'équation (72b) est une fonction à espace limité de la forme $h = \mathcal{R}f$. À la fois l'opérateur du domaine spectral $\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}$ et l'opérateur du domaine spatial $\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}$ sont symétriques de visu.

L'application de l'opérateur produit $\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{H}$ agit sur une fonction arbitraire f à bande limitée, selon une opération qu'on appelle le filtrage à résolution uniforme ou sphérique, ou la troncature triangulaire en analyse numérique [4; 25; 44; 59].

5 Concentration dans une calotte polaire symétrique par rapport à l'axe

Nous tournons maintenant notre attention vers le cas important dans lequel la région de concentration est une calotte symétrique circulaire de rayon colatitudinal Θ, centrée sur le pôle Nord, comme illustré dans la partie basse à droite de la Figure 1 :

$$R = \{\theta : 0 \leq \theta \leq \Theta\}. \tag{73}$$

Dans les applications pratiques, les fonctions propres qui sont optimalement concentrées dans une telle calotte polaire peuvent être tournées sur une calotte positionnée arbitrairement sur la sphère unité en utilisant la formule habituelle de rotation sphérique harmonique [3; 9; 12; 37].

5.1 Problème de la décomposition en valeurs propres du domaine spectral

Les éléments de la matrice (40) se réduisent, dans les cas (73), à

$$D_{lm,l'm'} = 2\pi\, \delta_{mm'} \int_0^{\Theta} X_{lm} X_{l'm'} \sin\theta \, d\theta. \tag{74}$$

Le delta de Kronecker $\delta_{mm'}$ rend la matrice D dans l'équation (41) diagonale par blocs :

$$\mathsf{D} = \begin{pmatrix} \mathsf{D}_0 & & & & & \\ & \mathsf{D}_{\pm 1} & & & & \\ & & \mathsf{D}_{\pm 1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathsf{D}_{\pm L} & \\ & & & & & \mathsf{D}_{\pm L} \end{pmatrix}, \tag{75}$$

où toute $(L-m+1) \times (L-m+1)$ sous-matrice $\mathsf{D}_{\pm m} \neq \mathsf{D}_0$ apparaît deux fois comme résultat de la dégénérescence du doublet associé à $\pm m$.

Plutôt que de résoudre l'équation complète des valeurs propres $(L+1)^2 \times (L+1)^2$ (43), nous pourrions plutôt résoudre une série d'équations de valeurs propres plus petites, $\mathsf{D}_{\pm m}\mathsf{g}_{\pm m} = \lambda_{\pm m}\mathsf{g}_{\pm m}$, une pour chaque ordre $\pm m$.

Nous éliminons désormais l'indice d'identification et réécrivons dans un ordre fixe, le problème des valeurs propres algébriques de domaine spectral $\mathsf{D}_{\pm m}\mathsf{g}_{\pm m} = \lambda_{\pm m}\mathsf{g}_{\pm m}$ comme, simplement,

$$\mathsf{D}\mathsf{g} = \lambda \mathsf{g}. \tag{76}$$

La matrice $(L-m+1) \times (L-m+1)$ D et le vecteur colonne $(L-m+1)$-dimensionnel $\mathsf{g} \in \mathcal{S}_L$ sont de la forme

$$\mathsf{D} = \begin{pmatrix} D_{mm} & \cdots & D_{mL} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{Lm} & \cdots & D_{LL} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{g} = \begin{pmatrix} g_m \\ \vdots \\ g_L \end{pmatrix}, \tag{77}$$

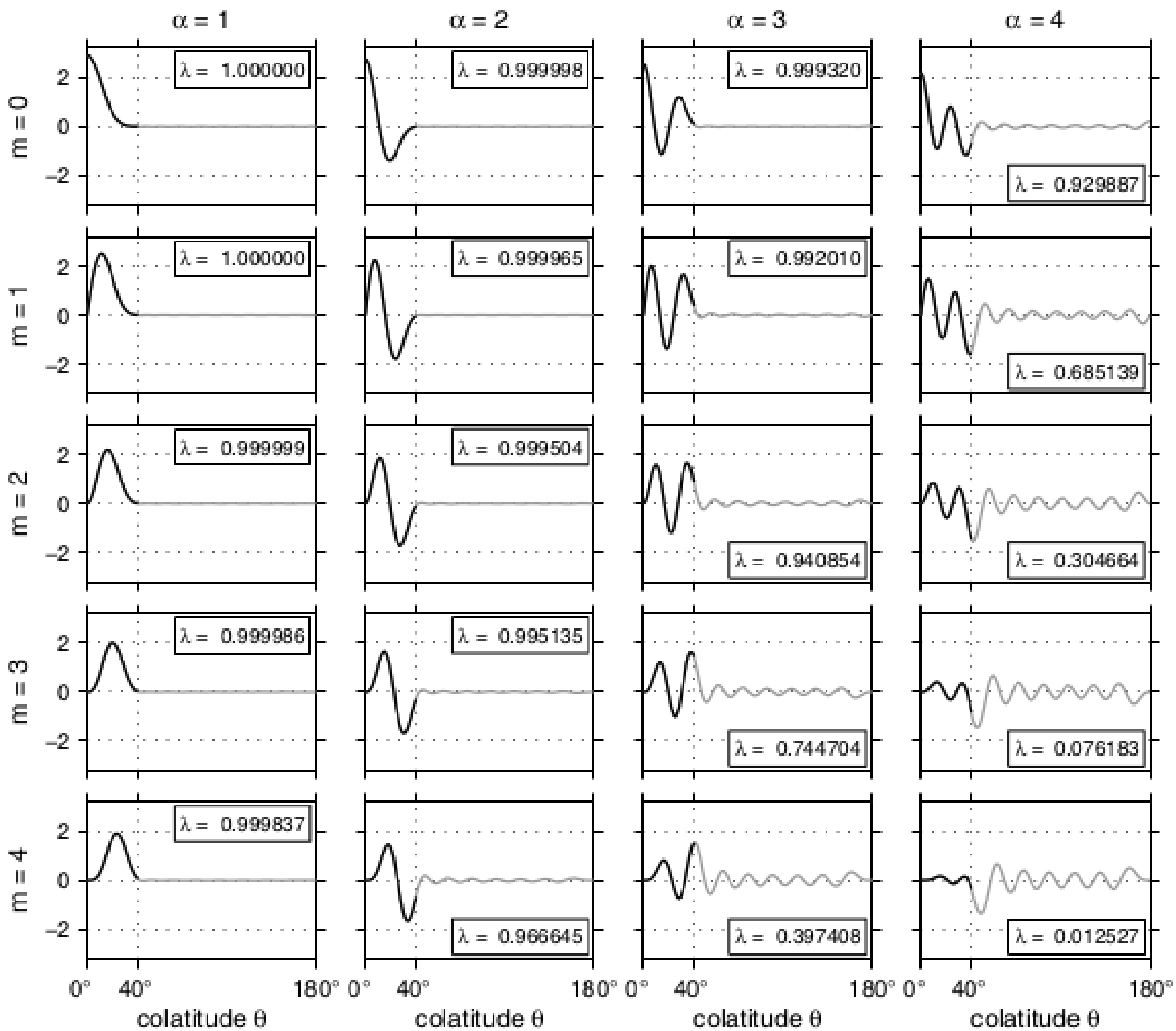


FIGURE 2 – *Dépendance colatitudinale des 4 premières fonctions propres du domaine spatial $g_1(\theta), g_2(\theta), g_3(\theta), g_4(\theta)$ d'ordre fixe $m = 0$ (en haut) vers $m = 4$ (en bas). Le rayon de la calotte polaire est $\Theta = 40°$, et le degré harmonique maximal est $L = 18$. Les courbes noires montrent la concentration dans la calotte $0 \leq \theta \leq 40°$; les courbes grises soulignent le leakage (évitement) dans le reste de la sphère, $40° < \theta \leq 180°$. Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ exprimant la qualité de la concentration spatiale sont indiquées. Le leakage correspondant dans le domaine spectral est illustré sur la Figure 3.*

où, pour un ordre particulier m,

$$D_{ll'} = 2\pi \int_0^{\Theta} X_{lm} X_{l'm} \sin\theta \, d\theta. \tag{78}$$

L'intégrale dans l'équation (78) peut être évaluée à l'aide des équations (18)–(19) :

$$D_{ll'} = (-1)^m \frac{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}}{2} \sum_{n=|l-l'|}^{l+l'} \begin{pmatrix} l & n & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & n & l' \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} \times [P_{n-1}(\cos\Theta) - P_{n+1}(\cos\Theta)]. \tag{79}$$

Nous rangeons les $L - m + 1$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{L-m+1}$ obtenues en résolvant le problème des valeurs propres d'ordre fixe (76) de telle façon que

$$1 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{L-m+1} > 0, \tag{80}$$

et nous orthonormalisons les vecteurs propres $(L-m+1)$-dimensionnels $\mathsf{g}_1, \mathsf{g}_2, \ldots, \mathsf{g}_{L-m+1}$ ainsi

$$\mathsf{g}_\alpha^{\mathsf{T}}\mathsf{g}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \mathsf{g}_\alpha^{\mathsf{T}}\mathsf{D}\mathsf{g}_\beta = \lambda_\alpha\delta_{\alpha\beta}. \tag{81}$$

Les fonctions propres à bande limitée $g_1(\theta), g_2(\theta), \ldots, g_{L-m+1}(\theta)$, définies par

$$g(\theta) = \sum_{l=m}^{L} g_l X_{lm}(\theta), \tag{82}$$

satisfont alors les relations d'orthogonalité colatitudinale

$$2\pi \int_0^\pi g_\alpha g_\beta \sin\theta \, d\theta = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad 2\pi \int_0^\Theta g_\alpha g_\beta \sin\theta \, d\theta = \lambda_\alpha\delta_{\alpha\beta}. \tag{83}$$

Les fonctions propres optimalement concentrées spatialement $g(\hat{\mathbf{r}})$ pour un m donné sont exprimées en fonction des fonctions d'ordre fixé colatitudinales (82) par

$$g(\theta,\phi) = \begin{cases} \sqrt{2}\, g(\theta)\cos m\phi & \text{si} \;\; -L \le m < 0 \\ g(\theta) & \text{si} \;\; m = 0 \\ \sqrt{2}\, g(\theta)\sin m\phi & \text{si} \;\; 0 < m \le L. \end{cases} \tag{84}$$

Les quatre fonctions propres les mieux concentrées $g_1(\theta), g_2(\theta), g_3(\theta), g_4(\theta)$, pour les ordres $0 \le m \le 4$ sont dessinées sur la Figure 2. Le rayon de la calotte polaire dans cet exemple est $\Theta = 40°$, et le degré harmonique sphérique est $L = 18$. La fonction propre de la première zone $(m = 0)$, $g_1(\theta)$, n'a aucun point dans la calotte $0° \le \Theta \le 40°$; la seconde, $g_2(\theta)$, en a un, et etc. Les fonctions propres hors zone $(m > 0)$ s'évanouissent toutes au pôle Nord, $\Theta = 0°$. Les quatre premières fonctions propres dans la zone, les trois premières fonctions propres $m = 1$ et $m = 2$, et les deux premières $m = 3$ et $m = 4$ sont toutes très bien concentrées $(\lambda > 0.9)$, tandis que les quatrièmes $m = 3$ et $m = 4$ fonctions propres montrent un leakage significatif $(\lambda < 0.1)$. Les méthodes numériques utilisées pour calculer les résultats montrés ici et permettant la visualisation des résultats sont résumées dans l'appendice A.

5.2 Problème de la décomposition en valeurs propres du domaine spatial

Le problème des valeurs propres entières (51) dans le domaine spatial se décompose également en une séries d'équations d'ordre fixe de valeurs propres de Fredholm en une dimension,

$$\int_0^\Theta D(\theta,\theta')\, g(\theta') \sin\theta' \, d\theta' = \lambda\, g(\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi, \tag{85}$$

chacune avec un noyau m-dépendant, séparable, symétrique,

$$D(\theta,\theta') = 2\pi \sum_{l=m}^{L} X_{lm}(\theta) X_{lm}(\theta'). \tag{86}$$

Les résultats (85) et (86) peuvent soit être obtenus en multipliant la forme de l'indice $D_{ll'}g_{l'} = \lambda g_l$ de l'équation (76) par $X_{lm}(\theta)$ et en faisant la somme sur $m \le l \le L$, soit en substituant la

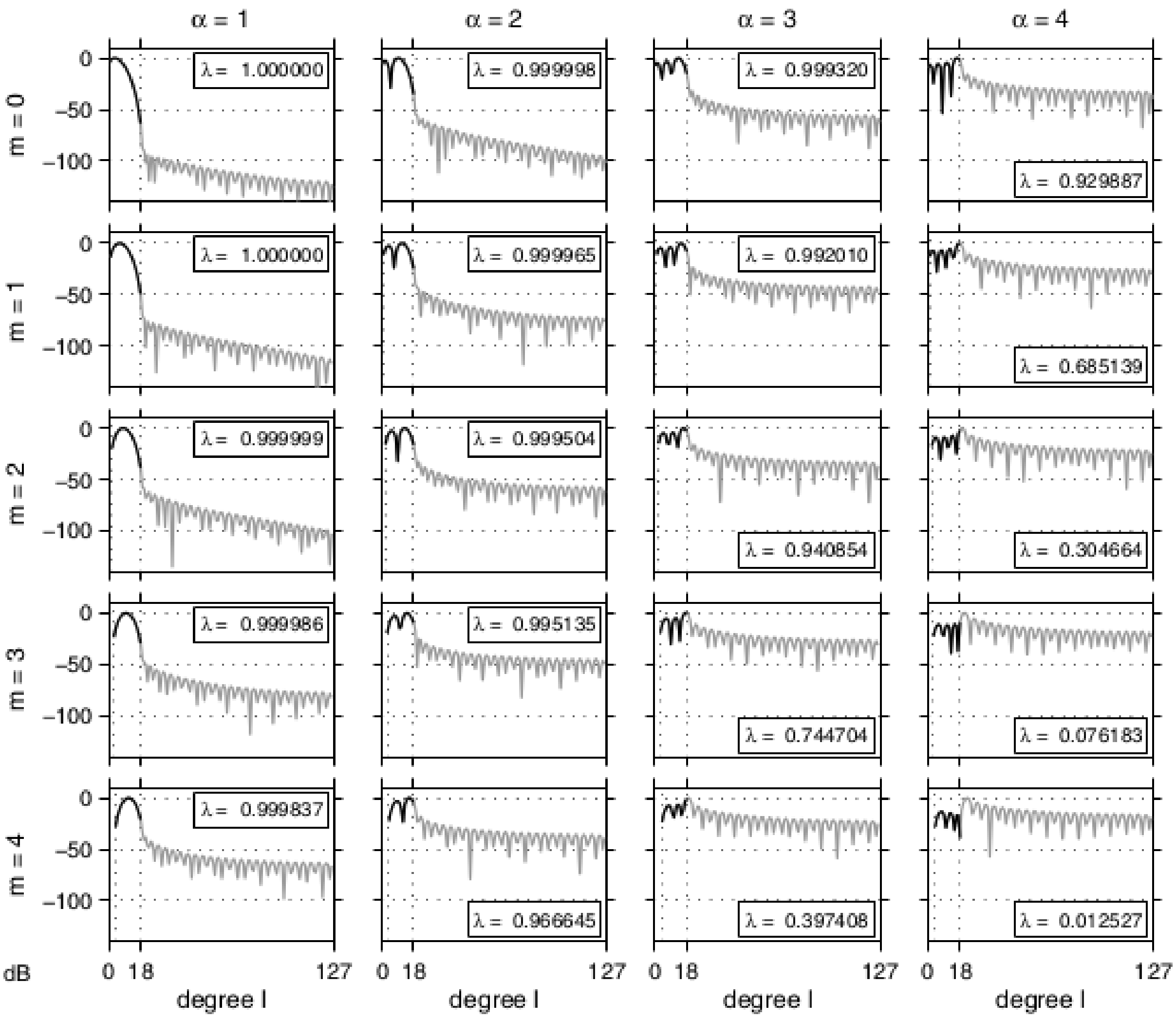


FIGURE 3 – *Coefficients au carré h_l^2 des quatre premières fonctions propres spatialement limitées $h_1(\theta)$, $h_2(\theta)$, $h_3(\theta)$, $h_4(\theta)$ d'ordre fixe $m = 0$ (en haut) à $m = 4$ (en bas). Le rayon de la calotte polaire est $\Theta = 40°$, et le degré harmonique sphérique maximal est $L = 18$. Les courbes noires montrent la puissance dans l'intervalle de concentration $0 \leq l \leq 18$; les courbes grises montrent la puissance évitée lorsque $19 \leq l \leq 127$. Les valeurs de h_l^2 sont en dB, normalisées à zéro aux maxima individuels. Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ spécifiant la qualité de la concentration spectrale sont indiquées. Les fonctions propres correspondantes à bande limitée, à domaine spectral, sont montrées sur la Figure 2.*

représentation (82)–(84) dans l'équation (51), et en utilisant l'orthogonalité des fonctions longitudinales $\ldots, \sqrt{2}\cos m\phi, \ldots, 1, \ldots, \sqrt{2}\sin m\phi, \ldots$ sur l'intervalle $0 \leq \phi < 2\pi$. Le problème des valeurs propres d'une matrice $(L - m + 1) \times (L - m + 1)$ (76) peut en retour être dérivé en commençant par l'équation de Fredholm séparable (85), de telle façon que les problèmes d'ordre fixé spectral et spatial sont complètement équivalents. Lorsque l'ordre est fixé, les fonctions propres à espace limité

$$h(\theta) = \begin{cases} g(\theta) & \text{if } 0 \leq \theta \leq \Theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{87}$$

satisfont une équation identique à (85), mais seulement dans la calotte elle-même :

$$\int_0^{\Theta} D(\theta,\theta')\,h(\theta')\sin\theta'\,d\theta' = \lambda\,h(\theta), \quad 0 \le \theta \le \Theta. \tag{88}$$

La valeur propre λ est une mesure à la fois de la concentration spatiale de $g(\theta) \in \mathcal{S}_L$ pour $0 \le \theta \le \Theta$ et de la concentration spectrale de $h(\theta) \in \mathcal{S}_R$ pour $0 \le l \le L$.

La substitution $\mu = \cos\theta$ convertit les équations (85) et (88) en

$$\int_{\cos\Theta}^{1} D(\mu,\mu')\,g(\mu')\,d\mu' = \lambda\,g(\mu), \quad -1 \le \mu \le 1, \tag{89a}$$

$$\int_{\cos\Theta}^{1} D(\mu,\mu')\,h(\mu')\,d\mu' = \lambda\,h(\mu), \quad \cos\Theta \le \mu \le 1. \tag{89b}$$

Le noyau $D(\mu,\mu')$ peut être simplifié en utilisant l'identité de Christoffel-Darboux (22) :

$$D(\mu,\mu') = \frac{(L-m+1)!}{2(L+m)!}\left[\frac{P_{L+1,m}(\mu)P_{Lm}(\mu') - P_{Lm}(\mu)P_{L+1,m}(\mu')}{\mu-\mu'}\right], \tag{90}$$

où la règle de L'Hôpital couvre le cas $\mu = \mu'$. Les coefficients harmoniques sphériques h_l^2 des quatre fonctions propres à espace limité les mieux concentrées $h_1(\theta)$, $h_2(\theta)$, $h_3(\theta)$, $h_4(\theta)$ pour $0 \le m \le 4$ sont visualisées selon l dans la Figure 3. Le rayon de la calotte $\Theta = 40°$, à bande limitée $L = 18$, et la disposition sont les mêmes que dans la Figure 2. La contribution maximale à la α-ième fonction propre dans la zone ($m = 0$) vient du degré harmonique satisfaisant $\sqrt{l(l+1)} \approx \pi/(\alpha\Theta)$; physiquement, cela correspond au fait de faire s'adapter un nombre entier de longueurs d'onde asymptotiques $2\pi/\sqrt{l(l+1)}$ dans la calotte de diamètre 2Θ.

5.3 Valeurs propres d'ordre fixé significatif

Le nombre de valeurs propres significatives, ou le nombre partiel de Shannon, pour chacun des problèmes de valeurs propres d'ordre fixé (76), (85), (88) ou (89) peuvent être calculés en utilisant n'importe laquelle des formules équivalentes

$$N_m = \sum_{\alpha=1}^{L-m+1}\lambda_\alpha = \sum_{l=m}^{L} D_{ll} = \int_0^{\Theta} D(\theta,\theta)\,d\theta = \int_{\cos\Theta}^{1} D(\mu,\mu)\,d\mu. \tag{91}$$

Nous pouvons réécrire la dernière relation dans l'équation (91) en utilisant l'équation (90) sous la forme

$$N_m = \frac{(L-m+1)!}{2(L+m)!}\int_{\cos\Theta}^{1}\left[P'_{L+1,m}P_{Lm} - P'_{Lm}P_{L+1,m}\right]d\mu, \tag{92}$$

où les primes dénotent la différentiation selon μ. La Figure 4 montre les spectres de valeurs propres d'ordre fixé pour $0 \le m \le 5$. Le rayon de la calotte est $\Theta = 40°$ et le degré harmonique sphérique maximal est $L = 18$, comme dans les Figures 2 et 3. Les nombres partiels de Shannon N_m, calculés par l'équation (91) et arrondis à l'entier le plus proche, sont montrés. Comme dans le cas du problème classique de Slepian [30; 46; 57], les spectres ont une forme caractéristique étagée, montrant les valeurs propres ($\lambda \approx 1$) significatives et celles ($\lambda \approx 0$) qui sont non significatives séparées par une étroite bande de transition. Le nombre de Shannon (91) fournit une bonne estimation du nombre

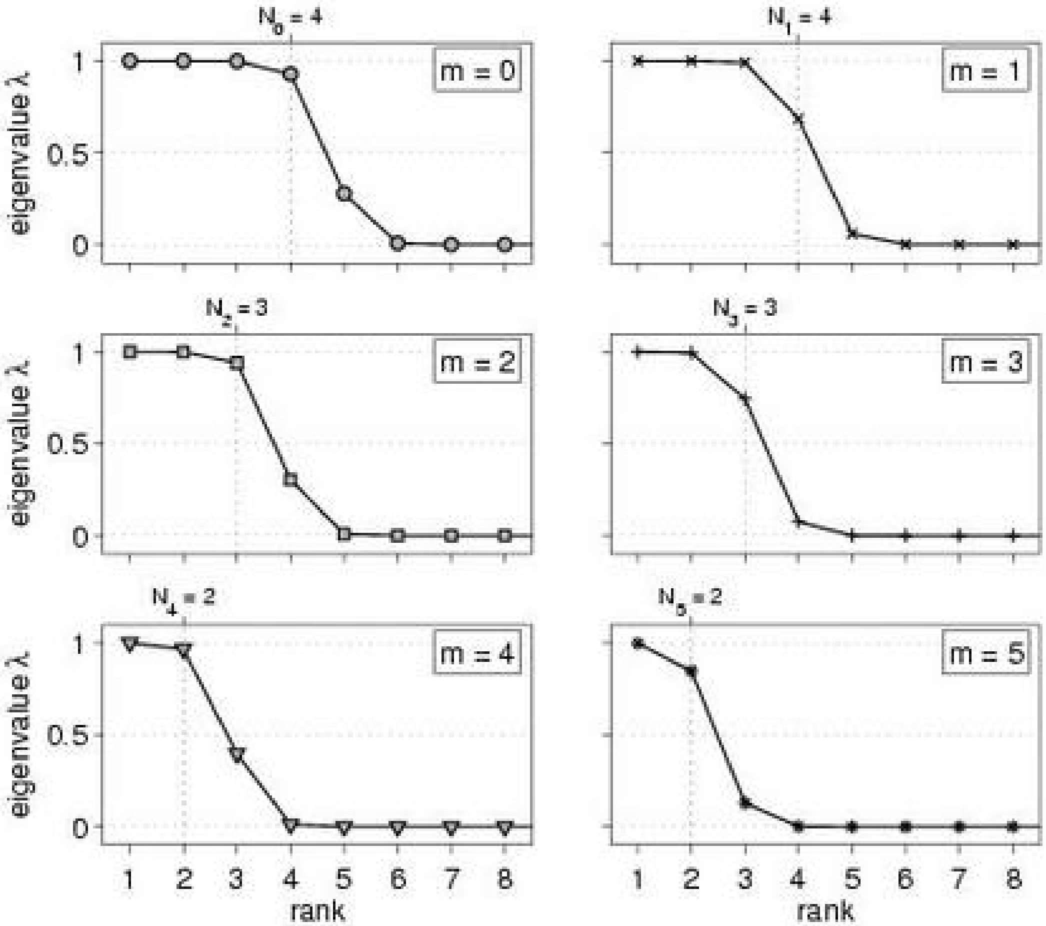


FIGURE 4 – *Spectres de valeurs propres d'ordre fixé pour une calotte polaire symétrique par rapport à l'axe de rayon $\Theta = 40°$. Le degré maximum harmonique sphérique est $L = 18$. Un symbole différent est utilisé pour visualiser λ_α selon le rang α pour chaque ordre $0 \leq m \leq 5$. Le nombre total des valeurs propres d'ordre fixé est $L - m + 1$; seules les huit plus larges (λ_1 à λ_8) sont montrées. Les lignes verticales et les étiquettes en haut spécifient les nombres partiels de Shannon N_m, arrondis à l'entier le plus proche.*

de fonctions propres bien concentrées ; les N_m premières fonctions propres ont toutes un facteur de concentration excédant $\lambda = 0.5$.

Une fois que les $L + 1$ séquences de valeurs propres d'ordre fixé (80) ont été trouvées, elles peuvent être retriées selon le rang d'ordre (45). Le nombre total de valeurs propres significatives est :

$$N = N_0 + 2 \sum_{m=1}^{L} N_m, \tag{93}$$

où le facteur 2 prend en compte la $\pm m$ dégénérescence. Dans la Figure 5, nous montrons le spectre des valeurs propres réordonnées selon m pour quatre calottes polaires différentes, avec des rayons colatitudinaux $\Theta = 10°, 20°, 30°, 40°$; le degré harmonique sphérique maximal est $L = 18$. Les nombres de Shannon arrondis $N = 3, 11, 24, 42$, sont au milieu du graphique, la partie transitionnelle des spectres séparant grossièrement les solutions en valeurs propres bien concentrées ($\lambda > 0.5$) de celles qui le sont moins bien ($\lambda < 0.5$) dans les quatre cas.

Nous illustrons les sommes de carrés point par point $\sum_\alpha g_\alpha^2(\theta, \phi)$ et $\sum_\alpha \lambda_\alpha g_\alpha^2(\theta, \phi)$ dans la Figure 6, pour des calottes polaires de rayons $\Theta = 10°, 20°, 30°, 40°$ et une largeur de bande $L = 18$. La

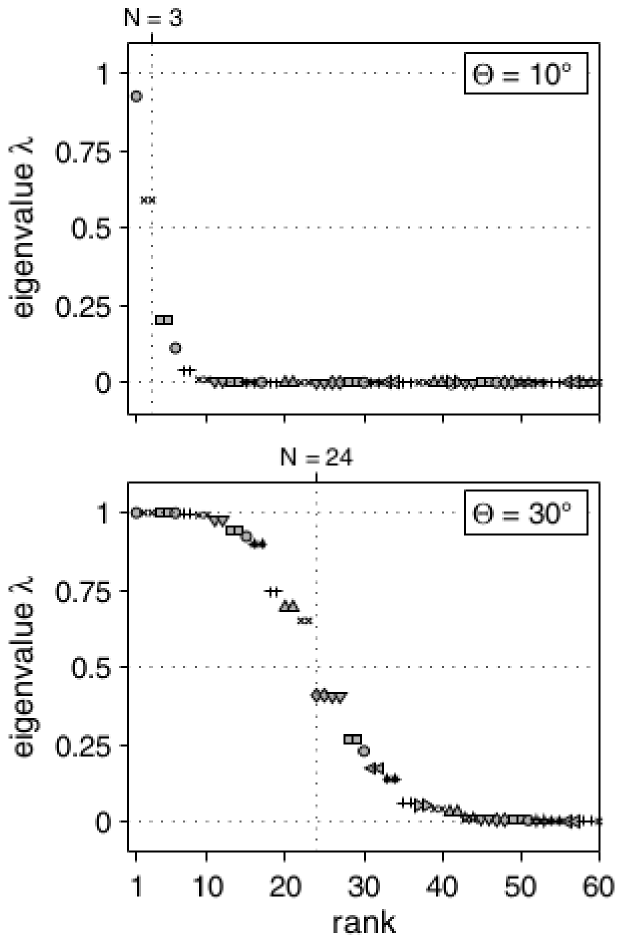


Figure 5 – *Les spectres dont on a réordonné les valeurs propres (λ_α selon le rang α) pour les calottes symétriques autour de l'axe d'angles $\Theta = 10°, 20°, 30°, 40°$ et de degré sphérique harmonique maximum commun $L = 18$. Le nombre total de valeurs propres est $(L+1)^2 = 361$; seules λ_1 parmi λ_{60} sont montrées. Différents symboles sont utilisés pour visualiser les différents ordres $-11 \leq m \leq 11$; les six premiers symboles sont les mêmes que ceux utilisés dans la Figure 4. Les lignes verticales des grilles et les étiquettes en haut spécifient les nombres de Shannon arrondis.*

somme complète non pondérée de $(L+1)^2$ termes (pointillés) est égale à $N/A = (L+1)^2/(4\pi)$ sur la sphère complète $0° \leq \theta \leq 180°$, en accord avec l'équation (65). Les sommes pondérées par les valeurs propres sont, par contraste, concentrées dans la calotte polaire $0 \leq \theta \leq \Theta$; les lignes pleines ombrées selon différentes nuances de gris distinguent les sommes jusqu'aux $N/2$, N, ou pour tous les $(L+1)^2$ termes possible. Ce que nous attendions dans l'équation (66) se réalise bien. L'uniformité du recouvrement de la région par la concentration réalisée en utilisant seulement les N premiers cônes propres est un résultat-clef, responsable du succès de la méthode multi-cônes pour l'estimation spectrale [64]. L'utilisation d'un seul cône de données, non oscillant en général perd de l'information aux endroits proches du bord ; pourtant, cette information est retrouvée en appliquant les autres cônes orthogonaux. L'énergie des N premiers cônes est proportionnelle à l'énergie originale des données dans la région de concentration, permettant une extraction spatiale uniforme de l'information statistique tout en minimisant le leakage spectral [66].

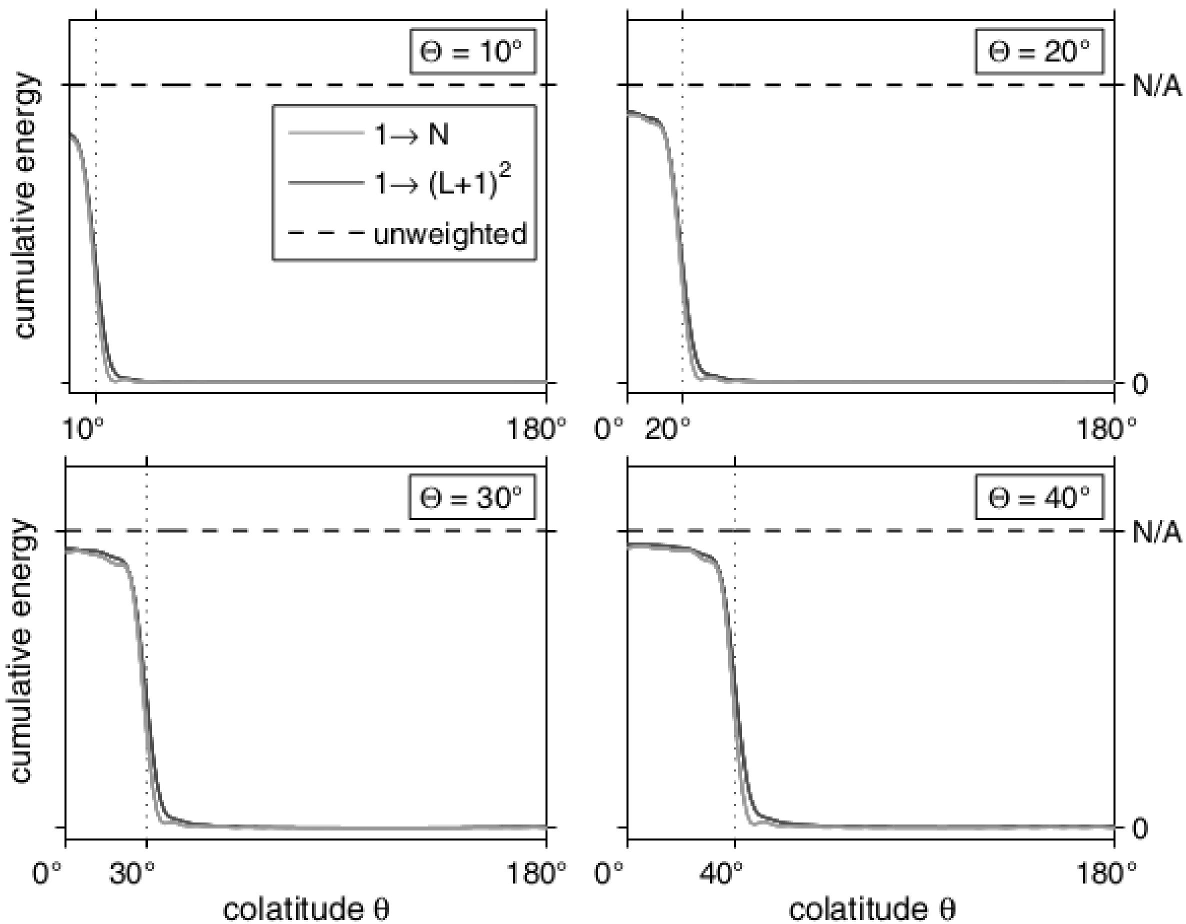


FIGURE 6 – *Énergie cumulée des fonctions propres concentrées dans les calottes polaires circulaires symétriques de rayons colatitudinaux* $\Theta = 10°, 20°, 30°, 40°$. *Le degré harmonique sphérique maximal est* $L = 18$ *; les nombres de Shannon* $N = 3, 11, 24, 42$. *Les sommes des carrés* $g_1^2(\theta, \phi) + g_1^2(\theta, \phi) + \cdots$ *et* $\lambda_1 g_1^2(\theta, \phi) + \lambda_2 g_2^2(\theta, \phi) + \cdots$, *sont visualisées selon la colatitude* θ *le long d'un méridien arbitraire fixé* ϕ. *Les lignes en pointillés montrent les sommes complètes non pondérées des termes* $(L+1)^2$, *qui convergent vers la valeur constante* N/A *sur la sphère entière* $0 \leq \theta \leq \pi$. *Les lignes pleines montrent les sommes partielles pondérées par les valeurs propres de* $N/2$ *et* N *termes, et la somme complète de* $(L+1)^2$ *termes, qui sont concentrés dans la calotte polaire* $0 \leq \theta \leq \Theta$.

Finalement, la Figure 7 montre une visualisation polaire des 32 fonctions propres $g(\theta, \phi)$, définies par les équations (84), qui sont optimalement concentrées dans une calotte polaire de rayon $\Theta = 40°$. Le degré sphérique harmonique maximum est $L = 18$ et le nombre de Shannon est $N = 42$, comme dans les Figures 2–4. Le réordonnancement des valeurs propres en ordre mélangé, comme dans la Figure 5, et tous les doublets dégénérés $\sqrt{2}\cos m\phi, \sqrt{2}\sin m\phi$ sont montrés. Les facteurs de concentration $1 < \lambda < 0.849$ et les ordres $-5 \leq m \leq 5$ de chaque fonction propre sont indiqués. Les couleurs bleu et rouge représentent les valeurs positives et négatives, respectivement ; pourtant, le signe de chaque $g(\theta, \phi)$ étant fondamentalement arbitraire, tous les signes pourraient être inversés sans violer les critères de concentration quadratique (38) et (52).

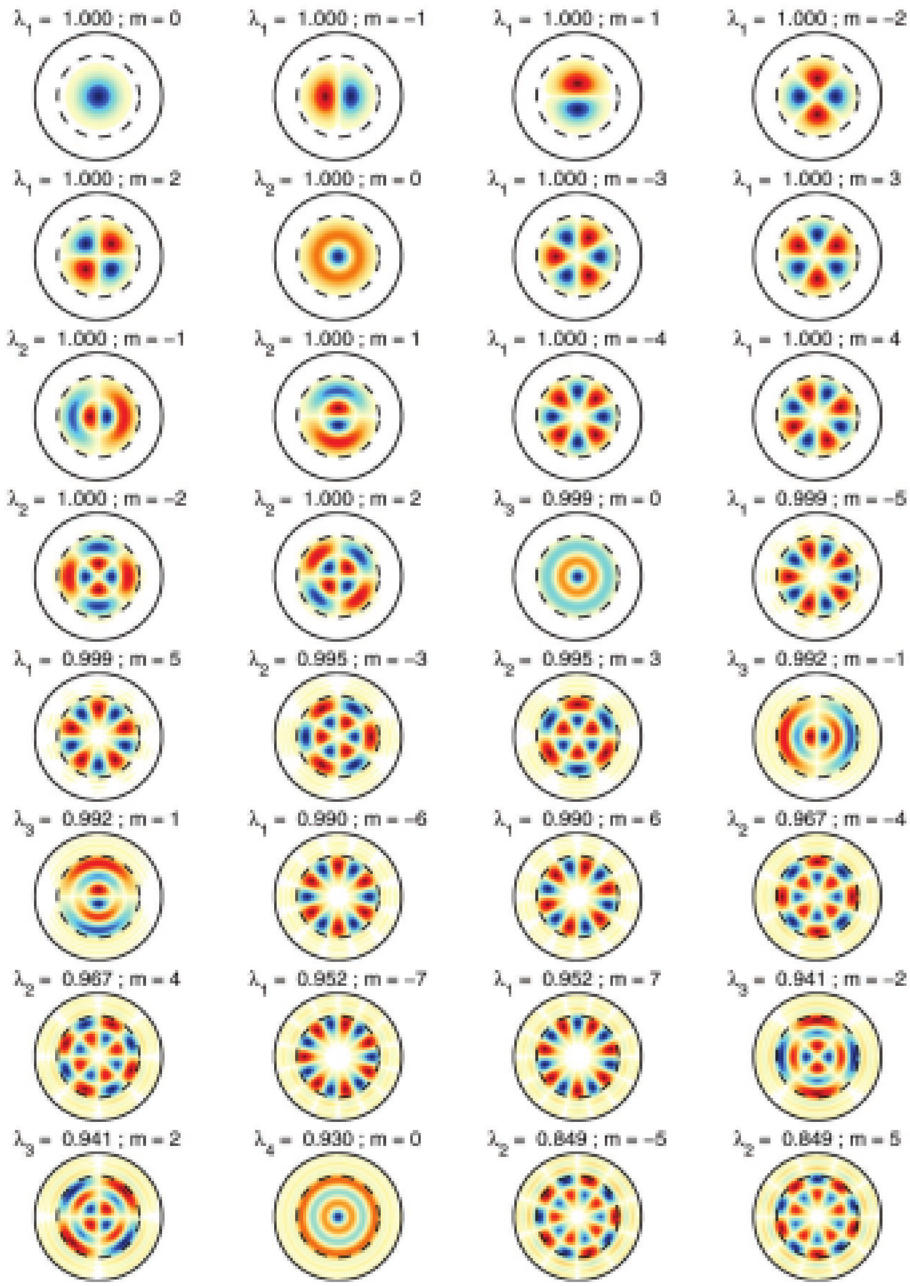


FIGURE 7 – *Fonctions propres à bande limitée $g(\theta, \phi)$ qui sont optimalement concentrées dans une calotte de rayon $\Theta = 40°$. Le cercle pointillé montre le bord de la calotte. Le degré harmonique sphérique maximal est $L = 18$, et le nombre de Shannon est $N = 42$. Les indices des valeurs propres λ_α spécifient le rang d'ordre fixé. Les valeurs propres ont été réordonnées selon un ordre différent, avec la fonction propre la mieux concentrée sur la gauche et la 32$^{\text{ième}}$ mieux concentrée sur l'extrême droite. Les régions dans lesquelles la valeur absolue est inférieure à un centième de la valeur absolue maximale sur la sphère sont notées en blanc, en bleu pour les positives et en rouge pour les négatives.*

5.4 Opérateur différentiel commutant

L'analyse du problème de concentration temps-fréquence à une dimension a été considérablement approfondie par la découverte par sérendipité par Slepian de l'opérateur commutant différentiel sphéroïdal (8). De façon remarquable, il y a aussi un opérateur différentiel, découvert par Grünbaum et al. [19], qui commute avec l'opérateur intégral dans le côté gauche des équations (88) et (89b) [voir également 18]. L'opérateur différentiel de second ordre est donné explicitement par

$$\mathcal{G} = (\cos\Theta - \cos\theta)\nabla^2 + \sin\theta\,\frac{d}{d\theta} - L(L+2)\cos\theta, \tag{94}$$

où

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{d\theta^2} + \cot\theta\,\frac{d}{d\theta} - m^2(\sin\theta)^{-2} \tag{95}$$

est l'opérateur d'ordre fixe de Laplace-Beltrami (15).

Réécrit en fonction de $\mu = \cos\theta$, l'opérateur de Grünbaum (94) est

$$\mathcal{G} = \frac{d}{d\mu}\left[(\cos\Theta - \mu)(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\right] - L(L+2)\mu - \frac{m^2(\cos\Theta - \mu)}{1-\mu^2}. \tag{96}$$

Puisque les opérateurs commutant ont les mêmes fonctions propres, nous pouvons trouver les fonctions propres limitées en espace d'ordre fixe $h(\theta)$ ou $h(\mu)$ en résolvant l'équation différentielle des valeurs propres $\mathcal{G}h = \chi h$, où $\chi \neq \lambda$ est la valeur propre de Grünbaum associée.

Pour confirmer que $\mathcal{G}$ dans l'équation (96) est l'opérateur différentiel commutant souhaité, nous devons montrer que

$$\int_{\cos\Theta}^{1} \mathcal{G}_\mu D(\mu,\mu')\,h(\mu')\,d\mu' = \int_{\cos\Theta}^{1} D(\mu,\mu')\,\mathcal{G}_{\mu'}h(\mu')\,d\mu', \tag{97}$$

pour une fonction arbitraire limitée en espace $h(\mu)$.
Il y a deux étapes dans l'argument fourni par Grünbaum et al. [19]. Le premier est de montrer que le côté droit de l'équation (97) peut être réécrit en

$$\int_{\cos\Theta}^{1} D(\mu,\mu')\,\mathcal{G}_{\mu'}h(\mu')\,d\mu' = \int_{\cos\Theta}^{1} \mathcal{G}_{\mu'}D(\mu,\mu')\,h(\mu')\,d\mu', \tag{98}$$

et le second est de montrer que

$$\mathcal{G}_\mu D(\mu,\mu') = \mathcal{G}_{\mu'}D(\mu,\mu'). \tag{99}$$

Le premier résultat (98) est un exercice évident d'intégration par parties ; quelles que soient deux fonctions $\zeta(\mu)$ et $\eta(\mu)$, on peut facilement montrer que

$$\begin{aligned}\int_{\cos\Theta}^{1} \zeta(\mathcal{G}\eta)\,d\mu \quad = \quad -\int_{\cos\Theta}^{1} \Big[&(\cos\Theta-\mu)(1-\mu^2)\zeta'\eta' + L(L+2)\mu\,\zeta\eta \\ &+ m^2(\cos\Theta-\mu)(1-\mu^2)^{-1}\zeta\eta\Big]\,d\mu = \int_{\cos\Theta}^{1}(\mathcal{G}\zeta)\eta\,d\mu,\end{aligned} \tag{100}$$

où nous avons utilisé une apostrophe (signe prime) pour noter $d/d\mu$.

Bien que cela ne soit pas nécessaire pour la preuve de l'équation (97), nous notons pour des références ultérieures que le résultat (100) est également valide si l'intégration est effectuée sur l'intervalle complet $-1 \le \mu \le 1$.

Pour vérifier le second résultat (99), nous utilisons la relation $\nabla^2 P_{lm} = -l(l+1)P_{lm}$ pour écrire

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{G}_\mu - \mathcal{G}_{\mu'})D(\mu,\mu') = &\\
&+ \frac{1}{2}\sum_{l=m}^{L}[l(l+1) - L(L+2)](2l+1)\left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]P_{lm}(\mu)P_{lm}(\mu')\\
&- \frac{1}{2}(1-\mu^2)\sum_{l=m}^{L}(2l+1)\left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]\frac{d}{d\mu}P_{lm}(\mu)P_{lm}(\mu')\\
&+ \frac{1}{2}(1-\mu'^2)\sum_{l=m}^{L}(2l+1)\left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]P_{lm}(\mu)\frac{d}{d\mu'}P_{lm}(\mu'). \qquad (101)
\end{aligned}
$$

Une application de l'identité de dérivation de Legendre (20b) transforme (101) en

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{G}_\mu - \mathcal{G}_{\mu'})D(\mu,\mu') = &\\
&+ \frac{1}{2}(\mu-\mu')\sum_{l=m}^{L}[l^2 - (L+1)^2](2l+1)\left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]P_{lm}(\mu)P_{lm}(\mu')\\
&- \frac{1}{2}(\mu-\mu')\sum_{l=m}^{L}(2l+1)\left[\frac{(l-m+1)!}{(l+m)!}\right]\\
&\qquad\qquad \times [P_{l+1\,m}(\mu)P_{lm}(\mu') - P_{lm}(\mu)P_{l+1\,m}(\mu')], \qquad (102)
\end{aligned}
$$

et l'identité de Christoffel-Darboux (22) transforme l'équation (102) en

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{G}_\mu - \mathcal{G}_{\mu'})D(\mu,\mu') = &\\
&+ \frac{1}{2}(\mu-\mu')\sum_{l=m}^{L}[l^2 - (L+1)^2](2l+1)\left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]P_{lm}(\mu)P_{lm}(\mu')\\
&- \frac{1}{2}(\mu-\mu')\sum_{l=m}^{L}(2l+1)\sum_{n=m}^{l}(2n+1)\left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]P_{nm}(\mu)P_{nm}(\mu'). \qquad (103)
\end{aligned}
$$

En interchangeant l'ordre de sommation dans la dernière ligne de l'équation (103), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{G}_\mu - \mathcal{G}_{\mu'})D(\mu,\mu') = &\\
&+ \frac{1}{2}(\mu-\mu')\sum_{l=m}^{L}[l^2 - (L+1)^2](2l+1)\left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]P_{lm}(\mu)P_{lm}(\mu')\\
&- \frac{1}{2}(\mu-\mu')\sum_{n=m}^{L}(2n+1)\left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]P_{nm}(\mu)P_{nm}(\mu')\sum_{l=n}^{L}(2l+1). \qquad (104)
\end{aligned}
$$

La dernière somme sur n est égale à $(L+1)^2 - n^2$, de telle façon que les deux termes dans l'équation (104) s'éliminent, $(\mathcal{G}_\mu - \mathcal{G}_{\mu'})D(\mu,\mu') = 0$, et la relation de commutation (97) est confirmée.

5.5 Équation de Grünbaum

L'argument ci-dessus montre que nous pouvons calculer les fonctions propres colatitudinales d'ordre fixé limitées en espaces $h_1(\theta), h_2(\theta), \ldots, h_{L-m+1}(\theta)$ soit en résolvant l'équation intégrale (85) soit en résolvant l'équation différentielle

$$(\cos\Theta - \cos\theta)\nabla^2 h + \sin\theta\,\frac{dh}{d\theta} - L(L+2)\cos\theta\, h = \chi h, \quad 0 \le \theta \le \Theta. \qquad (105)$$

L'équation équivalente en termes de $\mu = \cos\theta$ est de la forme standard de Sturm-Liouville [7] :

$$(ph')' - qh + \chi\rho h = 0, \quad \cos\Theta \leq \mu \leq 1, \tag{106}$$

où les primes dénotent la différentiation selon μ, et où

$$\begin{aligned} p(\mu) &= (\cos\Theta - \mu)(1-\mu^2), && (107a)\\ q(\mu) &= m^2(1-\mu^2)^{-1}(\mu - \cos\Theta) - L(L+2)\mu, && (107b)\\ \rho(\mu) &= 1. && (107c) \end{aligned}$$

L'équation (106) devrait être résolue en respectant la contrainte que $h(\mu)$ reste fini aux points extrêmaux $\mu = \cos\Theta$ et $\mu = 1$.

Le problème variationnel associé est [7]

$$\chi = \frac{\displaystyle\int_{\cos\Theta}^{1} (ph'^2 + qh^2)\, d\mu}{\displaystyle\int_{\cos\Theta}^{1} \rho h^2\, d\mu} = \text{minimum}. \tag{108}$$

Tous les théorèmes habituels de Sturm-Liouville s'appliquent. En particulier, nous savons que l'équation (106) a un spectre simple, avec un nombre infini de valeurs propres distinctes $\chi_1 < \chi_2 < \ldots$, avec un point d'accumulation à l'infini. Les ordonnancements des fonctions propres $\chi_1, \chi_2, \ldots$ et des facteurs de concentration spatio-spectraux $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{L-m+1}$ sont inversés, de telle façon que la fonction propre $h_1(\theta)$ associée avec la plus petite valeur propre numérique χ_1, qui n'a pas de point dans la calotte polaire $0 \leq \theta \leq \Theta$, soit la fonction propre d'ordre fixe la plus concentrée ; $h_2(\theta)$, la suivante, soit celle qui a exactement un point, et etc. Seules les $L-m+1$ premières fonctions propres $h_1(\theta), h_2(\theta), \ldots, h_{L-m+1}(\theta)$ avec des valeurs propres non nulles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{L-m+1}$ sont intéressantes dans la plupart des applications. Les fonctions propres restantes $h_{L-m+2}(\theta), h_{L-m+3}(\theta), \ldots$ sont dans l'espace nul de l'équation intégrale (88).

5.6 Matrice commutante tridiagonale

Comme dans le cas de (85) et (88), nous sommes libres d'étendre le domaine de l'équation (105) au domaine $0 \leq \theta \leq \pi$ tout entier ; dans ce cas, la fonction inconnue doit être limitée en bande plutôt que limitée en espace :

$$(\cos\Theta - \cos\theta)\nabla^2 g + \sin\theta\, \frac{dg}{d\theta} - L(L+2)\cos\theta\, g = \chi g, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \tag{109}$$

En substituant la représentation harmonique (82) de $g(\theta)$ dans l'équation (109), et en multipliant les deux côtés par $2\pi\sin\theta\, X_{l'm}(\theta)$, en intégrant sur $0 \leq \theta \leq \pi$, et en invoquant la relation d'orthogonalité (17b), on obtient l'équation des valeurs propres algébriques

$$\mathsf{G}\mathsf{g} = \chi\mathsf{g}, \tag{110}$$

où

$$\mathsf{G} = \begin{pmatrix} G_{mm} & \cdots & G_{mL} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{Lm} & \cdots & G_{LL} \end{pmatrix} \tag{111}$$

est la matrice $(L-m+1)\times(L-m+1)$ avec pour éléments

$$G_{ll'} = 2\pi \int_0^{\pi} X_{lm}(\mathcal{G}X_{l'm}) \sin\theta \, d\theta. \tag{112}$$

L'équation (110) est la version dans le domaine spectral de l'équation différentielle (109) de la même façon que l'équation (76) est l'équivalent dans le domaine spectral de l'équation intégrale des valeurs propres (85).
Comme nous l'avons remarqué, la relation symétrique (100) est valide même si l'intervalle d'intégration est étendu à $0 \le \theta \le \pi$, comme dans l'équation (112). Cela montre que la matrice de Grünbaum G est symétrique :

$$\mathsf{G} = \mathsf{G}^{\mathsf{T}}. \tag{113}$$

De plus, les matrices D et G commutent l'une avec l'autre,

$$\mathsf{DG} = \mathsf{GD}, \tag{114}$$

de telle façon qu'elles ont les mêmes vecteurs propres. La version indicée de (114) est

$$\sum_{n=m}^{L} D_{ln}G_{nl'} = 2\pi \int_0^{\Theta} X_{lm}(\mathcal{G}X_{l'm}) \sin\theta \, d\theta = \sum_{n=m}^{L} G_{ln}D_{nl'}. \tag{115}$$

L'expression intérieure impliquant à la fois l'opérateur $\mathcal{G}$ et l'intégration sur la région de concentration $0 \le \theta \le \Theta$ est l'élément ll' ou $l'l$ du produit de matrice symétrique $\mathsf{DG} = (\mathsf{DG})^{\mathsf{T}}$.

La vérification des étapes intermédiaires nécessite d'utiliser la relation d'orthogonalité (17b), l'opérateur identité (99), et à la fois la relation de symétrie (100) et son extension à l'intervalle $0 \le \theta \le \pi$.

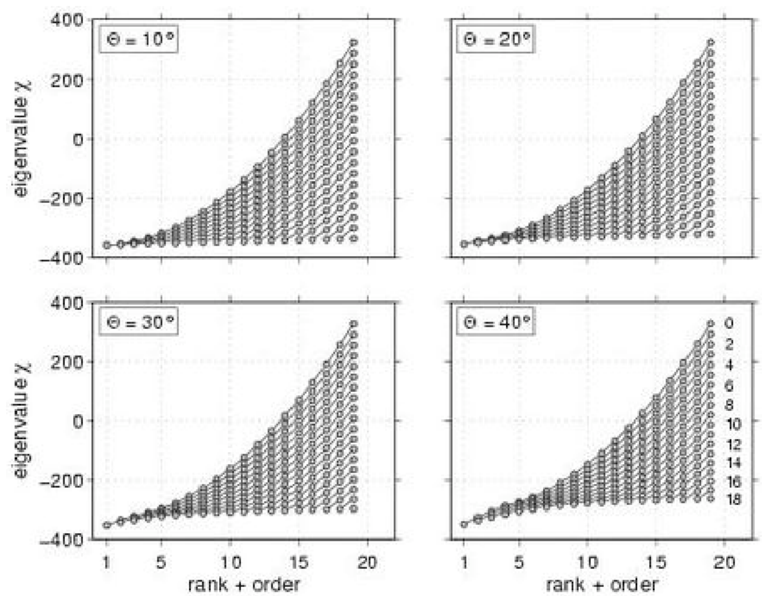


FIGURE 7 : *Valeurs propres de Grünbaum ordonnées par le rang pour des calottes polaires de rayons colatitudinaux variables,* $\Theta = 10°,20°,30°,40°$, *et un degré sphérique harmonique maximal* $L = 18$. *Les séquences séparées de valeurs propres* $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{L-m+1}$ *pour chaque ordre d'angle* $0 \le m \le L$ *sont reliées par des lignes, avec chaque décalage horizontal par son ordre* m *pour clarifier le graphique.*

Il y a de nombreuses façons d'évaluer les éléments de la matrice (112) ; peut-être que le plus évident est d'utiliser la relation $\nabla^2 X_{lm} = -l(l+1)X_{lm}$ et les identités de Legendre (20). En fait, la matrice de Grünbaum G est tridiagonale :

$$G_{ll} = -l(l+1)\cos\Theta, \tag{116a}$$

$$G_{l\,l+1} = G_{l+1\,l} = [l(l+2) - L(L+2)]\sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}}, \tag{116b}$$

$$G_{ll'} = 0 \quad \text{sinon}, \tag{116c}$$

ce qui est en accord avec le résultat correspondant fourni par Grünbaum et al. [19].

La solution de l'équation (110) offre des moyens particulièrement attractifs de calculer les vecteurs propres $\mathsf{g} \in \mathcal{S}_L$ et ainsi les fonctions propres de la calotte polaire concentrée de manière optimale $g(\theta) \in \mathcal{S}_L$, parce qu'elle nécessite seulement la diagonalisation numérique d'une matrice tridiagonale G avec des éléments prescrits analytiquement (116), et un spectre de valeurs propres χ qui est garanti d'être simple. Pour illustrer cela, nous montrons le spectre des valeurs propres de Grünbaum pour des calottes polaires symétriques par rapport à l'axe de rayons $\Theta = 10°, 20°, 30°, 40°$ et un degré sphérique harmonique maximal $L = 18$ dans la Figure 7. Les valeurs propres rangées pour tout ordre $0 \le m \le L$ sont reliées par des lignes, chaque séquence décalée par son ordre pour faciliter la lecture. Ainsi, $L+1$ valeurs propres $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{L+1}$ sont visualisées pour $m = 0$, alors qu'une seule valeur propre χ_1 est dessinée pour $m = L$. L'espacement grossièrement égal et l'absence d'une queue gênante de valeurs proches de zéro, comme dans les Figures 4-5, est évidente.

La diagonalisation de la matrice de Grünbaum G permet un calcul stable des fonctions de Slepian sphériques optimalement concentrées qui sont limitées en bande à des degrés angulaires très élevés.

Pour illustrer cela, nous montrons dans la Figure 8 les deux premières fonctions propres de zone $(m = 0)$ $g_1(\theta), g_2(\theta)$ qui sont optimalement concentrées dans une calotte polaire de rayon $\Theta = 40°$, pour des largeurs de bande croissantes $L = 10, 100, 300, 600$.
Lorsque la largeur de bande croît, les fonctions propres deviennent de plus en plus concentrées près du pôle $\theta = 0°$. Dans une application spectrale multi-cônes, une fraction de plus en plus grande de toute donnée près du bord de la calotte polaire verra son poids diminué par le fenêtrage ; pourtant, avec une largeur de bande augmentant et ainsi le nombre de Shannon, de plus en plus de cônes propres bien concentrés deviennent possible, pour permettre la reconstitution de cette information perdue.
La concentration dans une grande calotte calotte plutôt qu'une petite est un autre problème auquel la méthode de Grünbaum est idéalement adaptée. Pour illustrer cela, nous montrons dans la Figure 9, les quatre premières (g_1, g_2, g_3, g_4) et les quatre dernières $(g_{16}, g_{17}, g_{18}, g_{19})$ fonctions propres de zone pour $m = 0$; une fois de plus pour une calotte polaire de rayon $\Theta = 40°$ et un degré sphérique harmonique maximal $L = 18$.

Comme noté dans la Section 4.3, les fonctions propres qui sont optimalement exclues de la calotte polaire $\Theta = 40°$ sont optimalement concentrées dans la calotte antipodale la plus grande $\Theta = 140°$. Les valeurs propres effectives $\lambda_{16}, \lambda_{17}, \lambda_{18}, \lambda_{19}$ sont de plusieurs ordres de grandeur plus petites que les valeurs listées, ce qui représente simplement le plancher de bruit de nos calculs en double précision. Les valeurs propres exclues ne peuvent jamais être précisément calculées par diagonalisation de la matrice tridiagonale G ; ce n'est pas non plus possible en arithmétique en double précision (voir l'Appendice A).

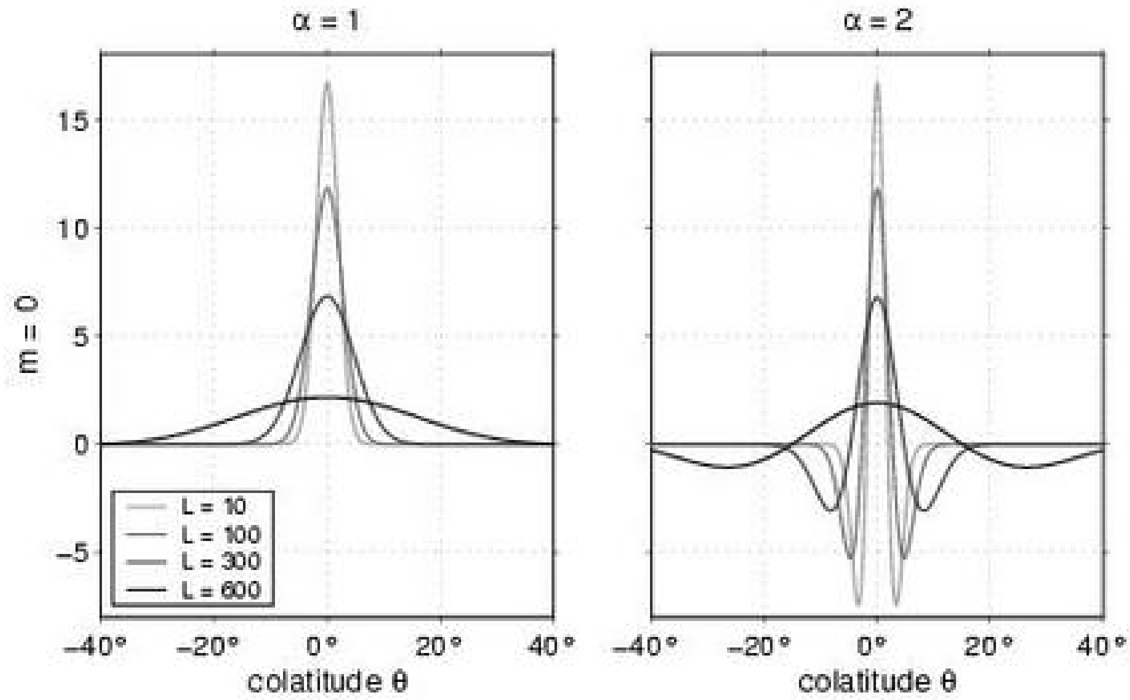


FIGURE 8 – *Les fonctions propres de zone ($m = 0$) $g_1(\theta)$ (à gauche) et $g_2(\theta)$ (à droite) qui sont optimalement concentrées dans une calotte polaire de rayon colatitudinal symétrique faisant un angle de $\Theta = 40°$ avec l'axe pour un intervalle de degrés harmoniques sphériques maximaux $L = 10, 100, 300, 600$ (nuances de gris croissantes). L'erreur par l'arrondi empêche un calcul précis des fonctions propres pour $L = 300$ et $L = 600$ par diagonalisation en double précision numérique de la matrice D ; la diagonalisation de la matrice de Grünbaum G évite cet obstacle.*

5.7 Formulation de l'opérateur abstrait

La relation de commutation de domaine spatial (97) peut être exprimée en utilisant la notation des opérateurs de la Section 4.4 par

$$(\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R})\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}). \tag{117}$$

Puisque l'opérateur de Grünbaum $\mathcal{G}$ agit seulement sur les fonctions limitées en espace colatitudinal $h(\theta)$, il doit satisfaire

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{G}. \tag{118}$$

En pré-multipliant l'équation (117) par $\mathcal{L}\mathcal{H}$, et en la post-multipliant par $\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}$, et en utilisant la relation (118) et le fait que $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$, on obtient

$$(\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L})(\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{G}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}) = (\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{G}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L})(\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}). \tag{119}$$

L'équation (119) est la formulation de l'opérateur abstrait de la relation de commutation de la matrice du domaine spectral $\mathsf{DG} = \mathsf{GD}$.

Les opérateurs équivalents de l'équation des valeurs propres pour le domaine spectral (110) et pour l'équation des valeurs propres pour le domaine spatial (105) sont

$$(\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{G}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L})(\mathcal{L}\,\mathsf{f}) = \chi(\mathcal{L}\,\mathsf{f}), \tag{120a}$$

$$\mathcal{G}(\mathcal{R}f) = \chi(\mathcal{R}f), \tag{120b}$$

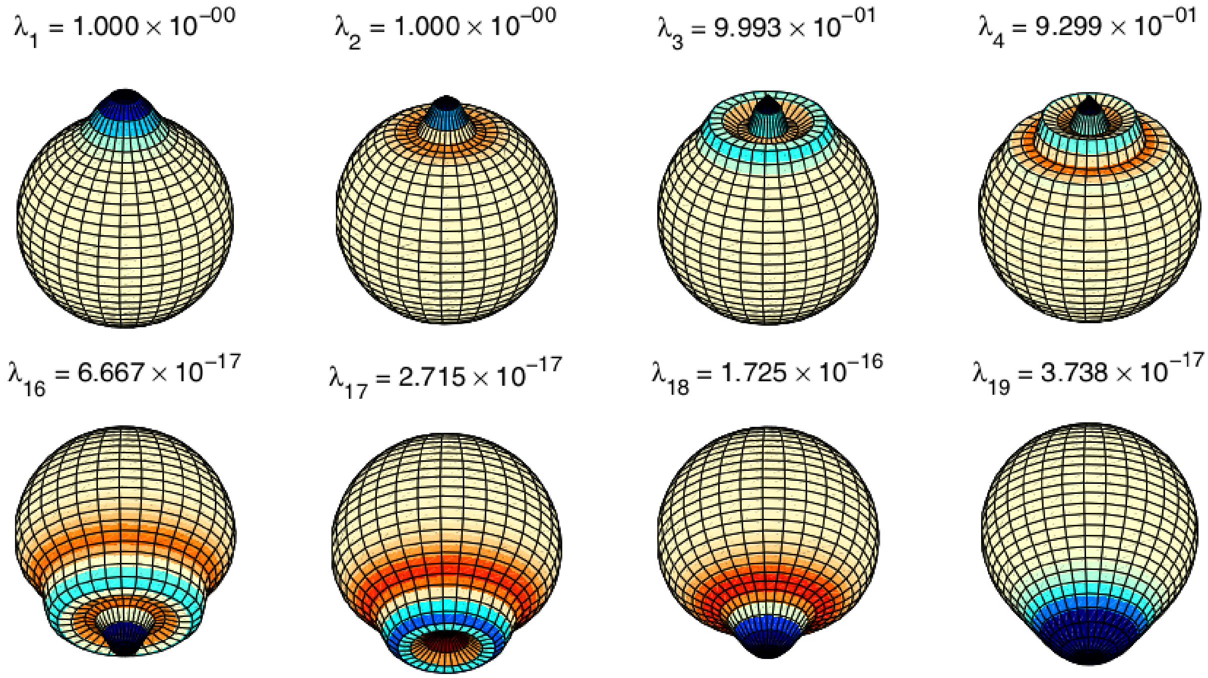


FIGURE 9 – *Les fonctions propres zonales optimalement concentrées (ligne du haut) et optimalement exclues (ligne du bas) ($m = 0$) pour une calotte polaire circulaire de rayon colatitudinal $\Theta = 40°$ et de degré harmonique sphérique maximal $L = 18$. Les fonctions propres optimalement exclues ne peuvent pas être calculées précisément par diagonalisation en double précision de la matrice* D.
La solution du problème de la concentration pour une calotte polaire de rayon $\Theta = 140°$ donne naissance aux mêmes fonctions propres $g_1(\theta), g_2(\theta), g_3(\theta), g_4(\theta), \ldots, g_{16}(\theta), g_{17}(\theta), g_{18}(\theta), g_{19}(\theta)$, mais dans l'ordre inverse.

où $f(\theta)$ est une fonction colatitudinale arbitraire, ni limitée en bande, ni limitée en espace. À cause des relations de commutation (117) et (119), nous sommes libres de résoudre les équations (120) plutôt que les équations de la version d'ordre fixé (72), pour trouver les vecteurs propres à bande limitée $\mathsf{g} = \mathcal{L}\,\mathsf{f}$ et les fonctions propres à espace limité $h(\theta) = \mathcal{R}f(\theta)$.

6 Concentrations continentales

Pour illustrer la théorie pour une région de forme irrégulière, nous considérons le problème de la concentration spatio-spectrale sur 6 régions continentales terrestres, listées dans la table 1 ordonnées selon une taille croissante, avec leurs nombres de Shannon pour différentes largeurs de bandes. L'analyse spectrale des données dans les continents terrestres ou les océans a des applications en géodésie, géophysique et océanographie [e.g., 23; 24; 45; 49] ; les multicônes sphériques de Slepian illustrés ici devraient être idéalement adaptés à cette tâche.

La Figure 10 montre les spectres de valeurs propres pour cinq des six régions (Groenland, Australie, Amérique du Nord, Afrique et Eurasie) et quatre largeurs de bande différentes, $L = 6, 12, 18, 24$, correspondant à $(L+1)^2 = 49, 169, 361, 625$ fonctions propres chacune. Le nombre d'onde de cutoff associé à une limite de la largeur de bande L est $\sqrt{L(L+1)} \approx L + 1/2$ divisé par le rayon de la Terre [5; 26] ; les longueurs d'onde coupées correspondant aux choix $L = 6, 12, 18$ et 24 sont $6200, 3200, 2200$ et 1600 kilomètres, respectivement. Seules le continent le plus grand, l'Eurasie, est

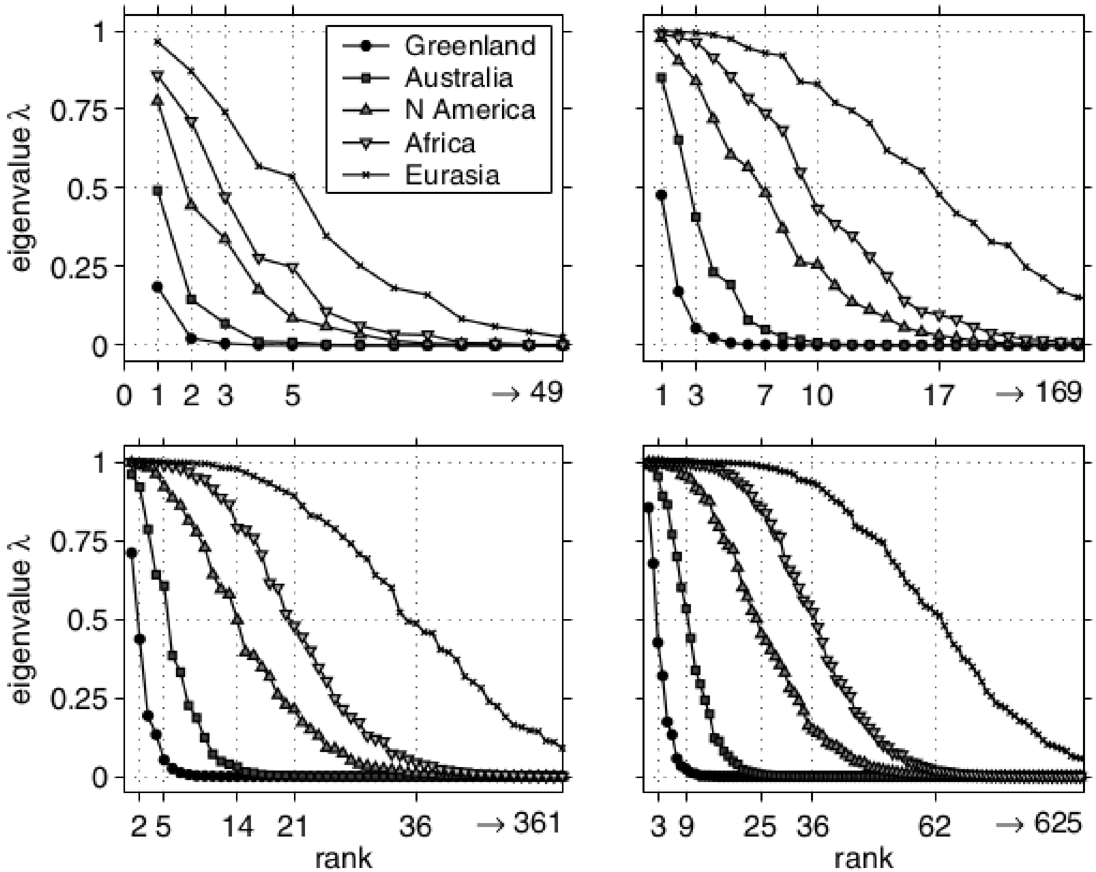


FIGURE 10 – *Spectres des valeurs propres pour cinq régions continentales terrestres (Groenland, Australie, Amérique du Nord, Afrique, Eurasie) et quatre degrés harmoniques sphériques maximaux ($L = 6, 12, 18, 24$). Les lignes verticales de la grille et les cinq étiquettes les plus à gauche spécifient les nombres de Shannon arrondis N. Les ordonnées sont tronquées à droite ; les nombres à droite des flèches sont les nombres totaux de valeurs propres,* $(L+1)^2 = 49, 169, 361, 625$.

Continental region	Area $A/(4\pi)$ dans %	nombre de Shannon N			
		$L = 6$	$L = 12$	$L = 18$	$L = 24$
Groenland	0.44	0	1	2	3
Australie	1.50	1	3	5	9
Amérique du Sud	3.50	2	6	13	22
Amérique du Nord	3.98	2	7	14	25
Afrique	5.78	3	10	21	36
Eurasie	9.98	5	17	36	62

TABLE 1 – Régions, nombres de Shannon et largeurs de bandes pour le problème de la concentration sur continents.

suffisamment grand pour montrer au moins une fonction propre parfaitement concentrée pour le plus petit degré, $L = 6$, et la plus petite région considérée, le Groenland, est trop étroite pour montrer ne serait-ce qu'une seule fonction propre avec un facteur de concentration λ proche de l'unité pour le degré le plus grand, $L = 24$. Comme dans le cas de la calotte polaire (Figure 5), les nombres de Shannon arrondis $N = (L+1)^2 A/(4\pi)$ montrés par les lignes en pointillés verticales séparent grossièrement les fonctions propres avec facteurs de concentration $\lambda > 0.5$ de ceux avec facteurs de concentration $\lambda > 0.5$.

Dans les Figures 11, 12 et 13, nous montrons des vues cartographiques des 12 premières fonctions propres pour $L = 18$: $g_1(\hat{\mathbf{r}}), g_2(\hat{\mathbf{r}}), \ldots, g_{12}(\hat{\mathbf{r}})$ qui sont optimalement concentrées sur l'Australie, l'Amérique du Nord et l'Afrique. La couleur bleu dénote des valeurs positives et la couleur rouge des valeurs négatives (bien que, comme nous l'avons noté, elles puissent être inversées, puisque le signe d'une fonction propre est arbitraire). Les régions dans lesquelles la valeur absolue est moindre qu'un pour cent de la valeur absolue maximale sur la sphère sont blanchies.

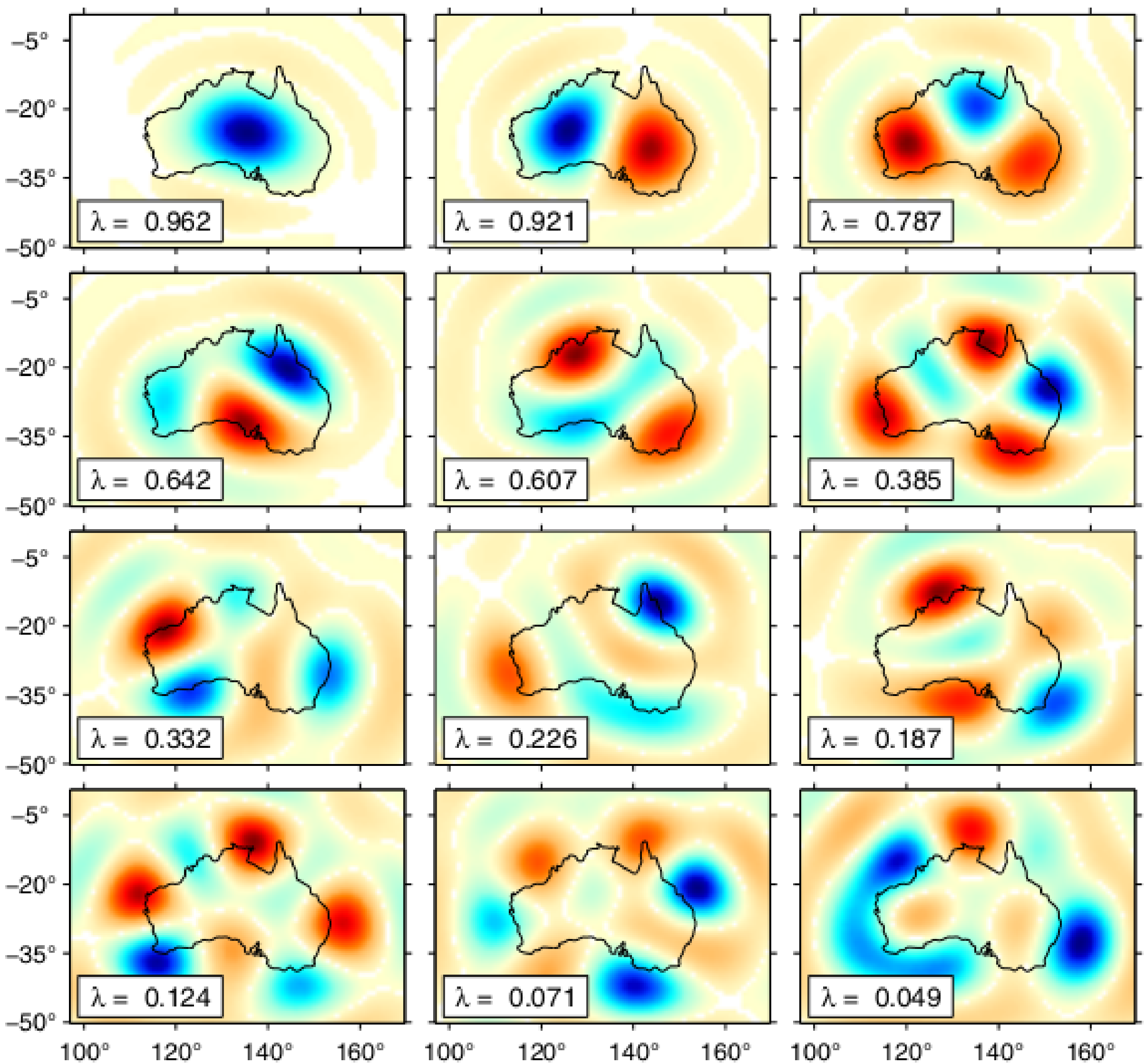


FIGURE 11 – *Fonctions propres à bande limitée $L = 18$: $g_1, g_2, \ldots, g_{12}$ qui sont optimalement concentrées sur le continent australien. Les facteurs de concentration $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{12}$ sont indiqués ; le nombre de Shannon est $N = 5$. L'ordre est de gauche à droite et de haut en bas, ordre habituel de lecture.*

Dans le cas de l'Australie (Figure 11) les cinq premières fonctions propres sont raisonnablement bien concentrées dans les frontières continentales ($\lambda_5 = 0.607$) ; pourtant, les facteurs de concentration λ diminuent rapidement ensuite, de telle façon que g_{12} est davantage exclu que concentré ($\lambda_{12} = 0.049$). Avec une largeur de bande limitante $L = 18$, et ainsi un cutoff de longueur d'onde de 2200 kilomètres, il est seulement possible de concentrer $N = 5$ fonctions propres à bande limitée orthogonales g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 dans un continent qui du nord au sud, mesure seulement 1500 kilomètres.

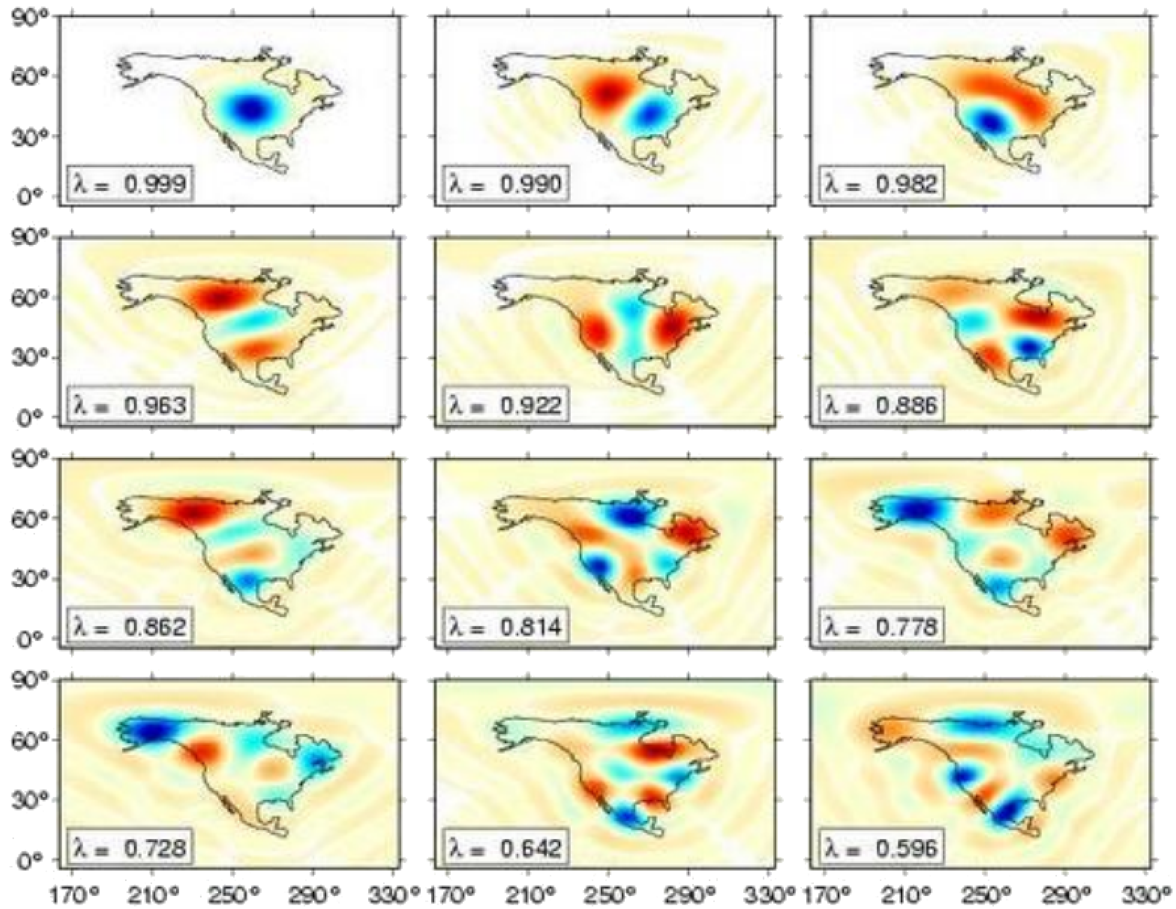


FIGURE 12 – *Fonctions propres à bande limitée $L = 18$: $g_1, g_2, \ldots, g_{12}$ qui sont optimalement concentrées dans le continent nord-américain. Les facteurs de concentration $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{12}$ sont indiqués ; le nombre de Shannon est $N = 14$. Le modèle de la représentation est le même que pour la Figure 11.*

Cette situation est bien améliorée dans le cas du continent nord-américain (Figure 12), qui a une superficie A qui est 2.7 plus grande que celle de l'Australie. En fait, l'Amérique du Nord a $N = 14$ fonctions propres raisonnablement bien concentrées pour $L = 18$, dont seulement les 12 premières sont montrées ici. La première fonction propre g_1, est à peu près circulaire et centrée sur le milieu du continent, comme dans le cas de l'Australie. Les fonctions propres orthogonales suivantes $g_2, g_3, \ldots$ montrent des lobes dans les régions précédemment non découvertes. La ligne de côte nord-américaine est plus irrégulière que celle de l'Australie. Le Québec et les Territoires nord-ouest du Canada sont essentiellement non couvert jusqu'à g_8, l'Alaska ouest n'est pas couvert correctement jusqu'à g_9 et g_{10}, et la Floride, la basse Californie et le sud du Mexique sont seulement couverts par g_{11} et g_{12} au prix d'un leakage substantiel ($\lambda_{11} = 0.642, \lambda_{12} = 0.596$) en dehors des frontières

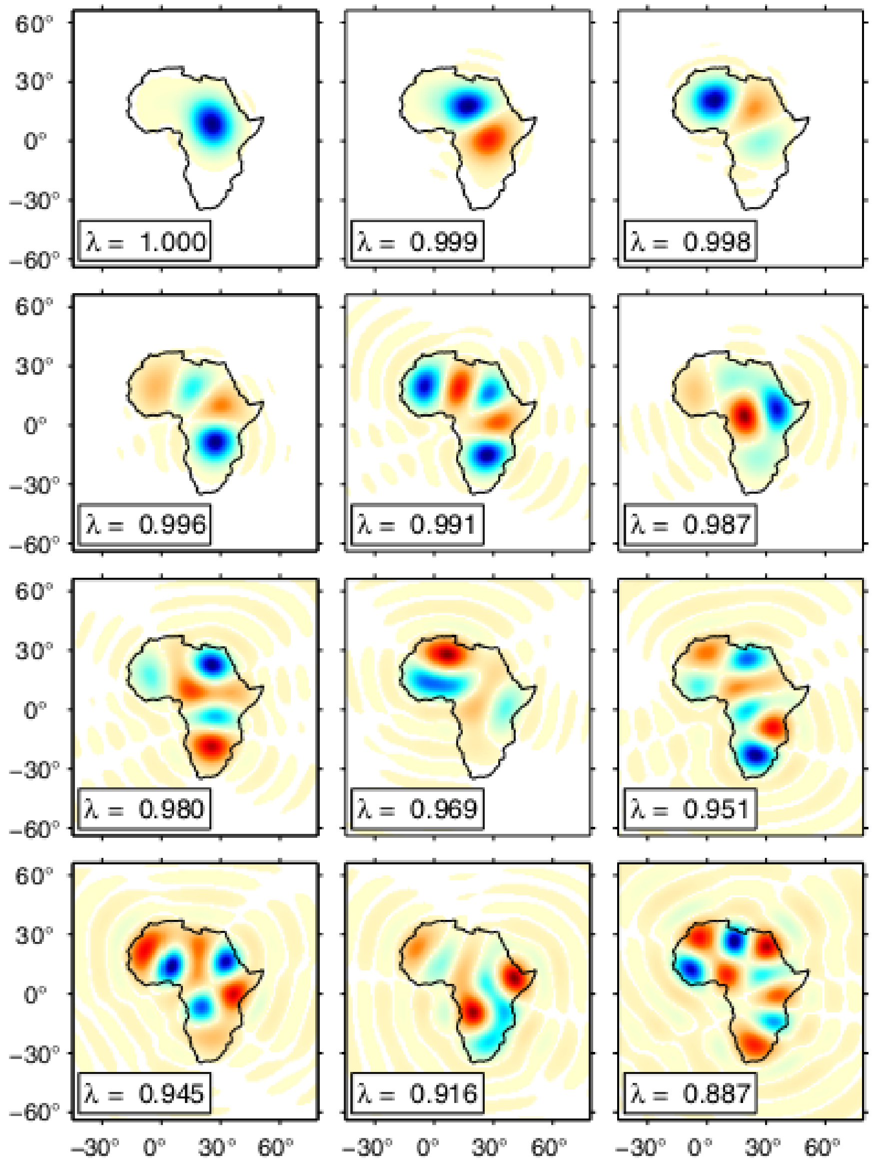


FIGURE 13 – *Fonctions propres à bande limitée $L = 18$: $g_1, g_2, \ldots, g_{12}$ qui sont optimalement concentrées sur le continent africain. Les facteurs de concentration $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{12}$ sont indiqués ; le nombre de Shannon est $N = 21$. Le modèle de la représentation est le même que pour la Figure 11.*

continentales.

L'Afrique (Figure 13), qui a une superficie A qui est 3.9 plus grande que celle de l'Australie, a $N = 21$ fonctions propres raisonnablement bien concentrées pour $L = 18$, la douzième d'entre elles a un facteur de concentration $\lambda_{12} = 0.887$. Une fois encore, g_1 est grossièrement circulaire, et les fonctions propres orthogonales suivantes $g_2, g_3, \ldots$ recouvrent successivement les régions précédemment non couvertes. L'Afrique de l'ouest n'est pas couverte par g_1 et g_2, mais devient raisonnablement couverte par g_3 et g_5 ; en outre, l'Afrique du sud n'est pas couverte jusqu'à g_4 et g_5. Les autres éléments géographiques deviennent bien couverts avec les fonctions propres de plus en plus oscillantes (e.g., Egypte par g_7 et g_{12}).

La Figure 14 montre la somme des carrés pondérée par les valeurs propres $\sum_\alpha \lambda_\alpha g_\alpha^2(\hat{\mathbf{r}})$ des fonctions propres à bande limitée pour $L = 18$ des 6 continents (à l'exception de l'Antarctique). Nous trouvons les fonctions propres $g_1(\hat{\mathbf{r}}), g_2(\hat{\mathbf{r}}), \ldots, g_{(L+1)^2}(\hat{\mathbf{r}})$ par diagonalisation de la matrice $(L+1)^2 \times (L+1)^2$ (41) formée en ajoutant les matrices correspondant à chacun des six continents $\mathsf{D}_{\mathrm{Eurasia}} + \mathsf{D}_{\mathrm{Africa}} + \cdots$. L'aire combinée totale est $A/(4\pi) = 25.2\%$, et le nombre de Shannon est $N = 91$; les sommes partielles des $N/4, N/2$ et N premiers termes, ainsi que la somme totale des $(L+1)^2 = 361$ termes, sont montrées. La capacité des N premières fonctions à fournir une couverture uniforme de l'aire cible est évidente ; comme dans la Figure 6, la couverture est seulement marginalement améliorée en ajoutant le reste, les "mal" concentrées $(L+1)^2 - N = 250$ termes. À cause de leur petite taille, l'Australie et le Groenland n'apparaissent pas jusqu'aux $1 \to N/2$ et $1 \to N$ sommes partielles, respectivement. Même alors, la couverture du Groenland est imparfaite, une conséquence attendue du petit nombre de Shannon pour le Groenland ($N = 2$ pour un degré sphérique harmonique maximal de $L = 18$).

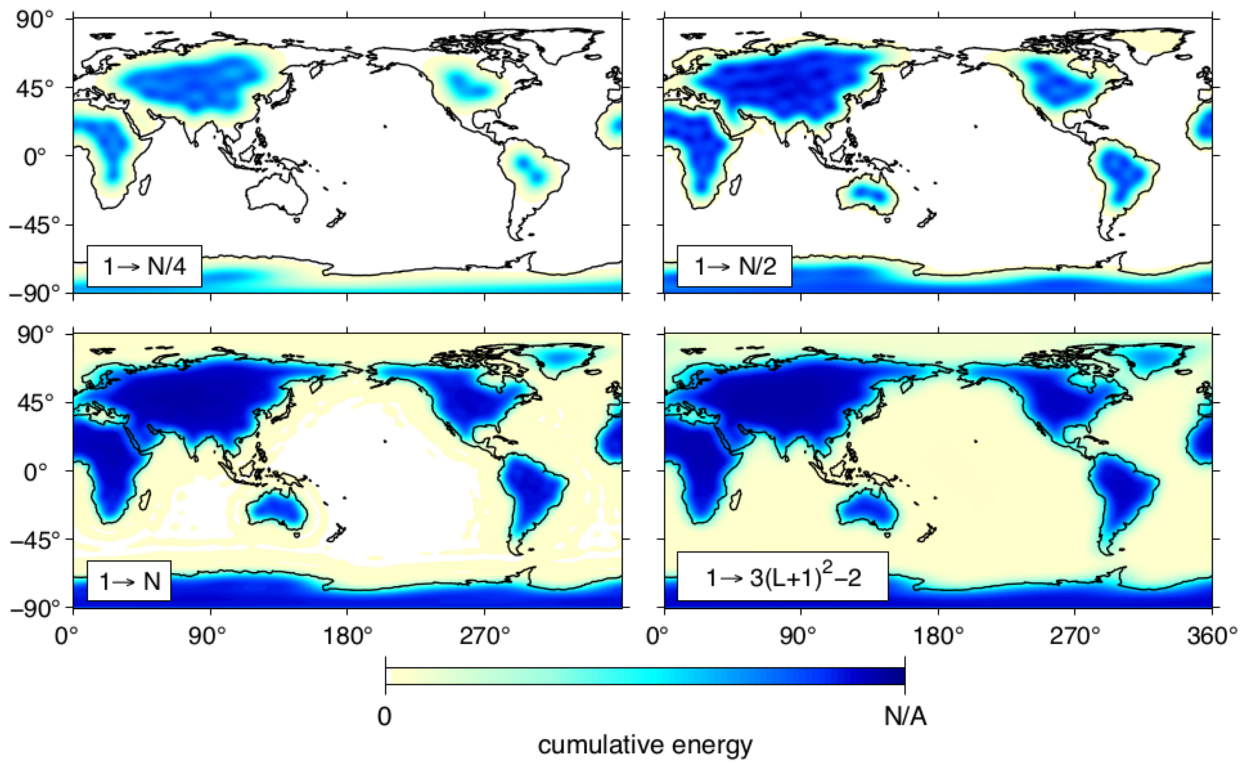


FIGURE 14 – *L'énergie cumulée pondérée par les valeurs propres des $N/4, N/2, N$ et $(L+1)^2$ fonctions propres qui sont optimalement concentrées dans l'ensemble des continents (l'Eurasie, l'Afrique, l'Amérique du Nord, l'Amérique du Sud, l'Australie et le Groenland). Le degré sphérique harmonique maximal est $L = 18$; l'aire cumulée fractionnaire est $A/(4\pi) = 25.2\%$; le nombre de Shannon est $N = 91$. Le bleu le plus foncé sur la barre des couleurs correspond à la valeur attendue (66) de la somme. Les régions dans lesquelles la valeur est moins d'un pour cent de la valeur maximale sur la sphère sont blanchies.*

7 Échelonnage asymptotique

Comme nous l'avons noté, les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ et les fonctions propres convenablement mises à l'échelle $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ du problème original de concentration de Slepian (6) dépendent seulement du nombre de Shannon $N = 2TW/\pi$. Cette mise à l'échelle par nombre de Shannon est la seule caractéristique importante qui ne se transmet pas du problème à une dimension au problème de concentration spatio-spectrale sur la sphère. Fondamentalement, ce manque de mise à l'échelle est une conséquence du fait qu'il n'est pas possible de rapetisser ou agrandir une région, comme l'Afrique, sur une sphère Ω de rayon fixé $\|\hat{\mathbf{r}}\| = 1$, tout en conservant les relations angulaires entres tous les points intérieurs de la même façon. La mise à l'échelle par nombre de Shannon sur une sphère ne se montre qu'asymptotiquement, pour la limite

$$A \to 0, \quad L \to \infty, \quad \text{avec} \quad N = (L+1)^2 \frac{A}{4\pi} \quad \text{tenu fixé.} \tag{121}$$

Pour cette limite d'une petite aire de concentration A et d'une grande largeur de bande $0 \le l \le L$, la courbure de la sphère devient négligeable et le problème de la concentration sphérique approche le problème de la concentration sur un plan.

7.1 Approximation de Hilb et formule de la somme de Poisson

Deux résultats sous-tendent la considération de cette limite de la Terre plate (121), que nous considérons dans cette section.

Le premier est l'approximation asymptotique de Hilb pour les fonctions de Legendre [2; 8; 21; 60],

$$X_{lm}(\theta) \approx (-1)^m \sqrt{\frac{l+1/2}{2\pi}} \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\, J_m[(l+1/2)\theta], \quad 0 \le \theta \ll \pi, \tag{122}$$

où $J_m(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce et la seconde est la formule de sommation de Poisson tronquée,

$$\sum_{l=0}^{L} f(l+1/2) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \int_0^{L+1} f(k) e^{-2\pi i s k}\, dk, \tag{123}$$

qui est valide pour une fonction continue arbitraire $f(x)$.

Pour vérifier la relation (123), nous commençons avec la représentation en série de Fourier de $f(x)$ sur l'intervalle $0 \le x \le 2\pi$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(u) e^{is(x-u)}\, du. \tag{124}$$

En posant $x \to x + 2\pi l$ dans l'équation (124) et en sommant selon $0 \le l \le L$, on aboutit à

$$\sum_{l=0}^{L} f(x + 2\pi l) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_0^{(L+1)2\pi} f(u) e^{is(x-u)}\, du, \tag{125}$$

où nous avons translaté l'intervalle d'intégration pour chaque terme par $2\pi l$ et utilisé la périodicité de 2π de l'exponentielle. En divisant l'argument par 2π, et en substituant $k = u/(2\pi)$, et en posant $x = \pi$, nous obtenons l'identité souhaitée (123).

7.2 Équation intégrale mise à l'échelle pour une région arbitraire

Une application à la fois de l'approximation de Hilb (122) et de la formule de sommation de Poisson (123) nous permet d'écrire le noyau de Fredholm $D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$ dans l'équation (51) sous la forme

$$\begin{aligned} D(\Delta) &= \sum_{l=0}^{L} \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right) P_l(\cos\Delta) \\ &\approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\Delta}{\sin\Delta}} \sum_{l=0}^{L} (l+1/2) J_0[(l+1/2)\Delta] \\ &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\Delta}{\sin\Delta}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \int_0^{L+1} J_0(k\Delta) e^{-2\pi i s k} k\, dk. \end{aligned} \tag{126}$$

En substituant $k = (L+1)p$ et en prenant la limite $L \to \infty, \Delta \to 0$, avec la limite $L\Delta$ maintenue fixe, l'équation (126) se réduit à

$$D(\Delta) \approx \frac{(L+1)^2}{2\pi} \int_0^1 J_0[(L+1)p\Delta]\, p\, dp = \frac{(L+1)\, J_1[(L+1)\Delta]}{2\pi\Delta}, \tag{127}$$

où nous avons fait l'approximation $\Delta/\sin\Delta \approx 1$, et utilisé le lemme de Riemann-Lebesgue [43] pour éliminer les termes $s \neq 0$ entraînant les facteurs oscillants les plus élevés $e^{-2\pi i s(L+1)p}$. Pour la limite $x \to 0$, le rapport $J_1(x)/x$ tend vers $1/2$, de telle façon que la limite lorsque Δ tend vers 0 du noyau (127) est $D(0) = (L+1)^2/(4\pi)$, ce qui garantit que le nombre de Shannon, ou la somme des valeurs propres (59), est toujours donné dans cette approximation asymptotique par

$$N = \int_R D(0)\, d\Omega = (L+1)^2 \, \frac{A}{4\pi}. \tag{128}$$

Pour obtenir une version mise à l'échelle de l'équation (51) dépendant seulement du nombre de Shannon N, nous utilisons l'approximation (127) pour le noyau $D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$, et nous introduisons les transformations des variables dépendantes et indépendantes

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{4\pi}{A}}\, \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{x}' = \sqrt{\frac{4\pi}{A}}\, \hat{\mathbf{r}}', \qquad \psi(\mathbf{x}) = g(\hat{\mathbf{r}}), \quad \psi(\mathbf{x}') = g(\hat{\mathbf{r}}'). \tag{129}$$

Les coordonnées mises à l'échelle $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ sont les projections des points $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}' \in \Omega$ sur une grande sphère Ω_* de rayon au carré $\|\mathbf{x}\|^2 = 4\pi/A$.

La distance géodésique entre les points mis à l'échelle $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega_*$ et l'aire différentielle de la surface sur Ω_* sont

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{\frac{4\pi}{A}}\, \Delta \quad \text{et} \quad d\Omega_* = \frac{4\pi}{A}\, d\Omega. \tag{130}$$

En effectuant les substitutions (129)–(130), les équations (51) et (127) se réduisent à

$$\int_{R_*} D_*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\, \psi(\mathbf{x})\, d\Omega'_* = \lambda \psi(\mathbf{x}), \tag{131}$$

où R_* est la projection de la région de concentration R sur la sphère Ω_*, et

$$D_*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\sqrt{N}}{2\pi} \, \frac{J_1(\sqrt{N}\, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \tag{132}$$

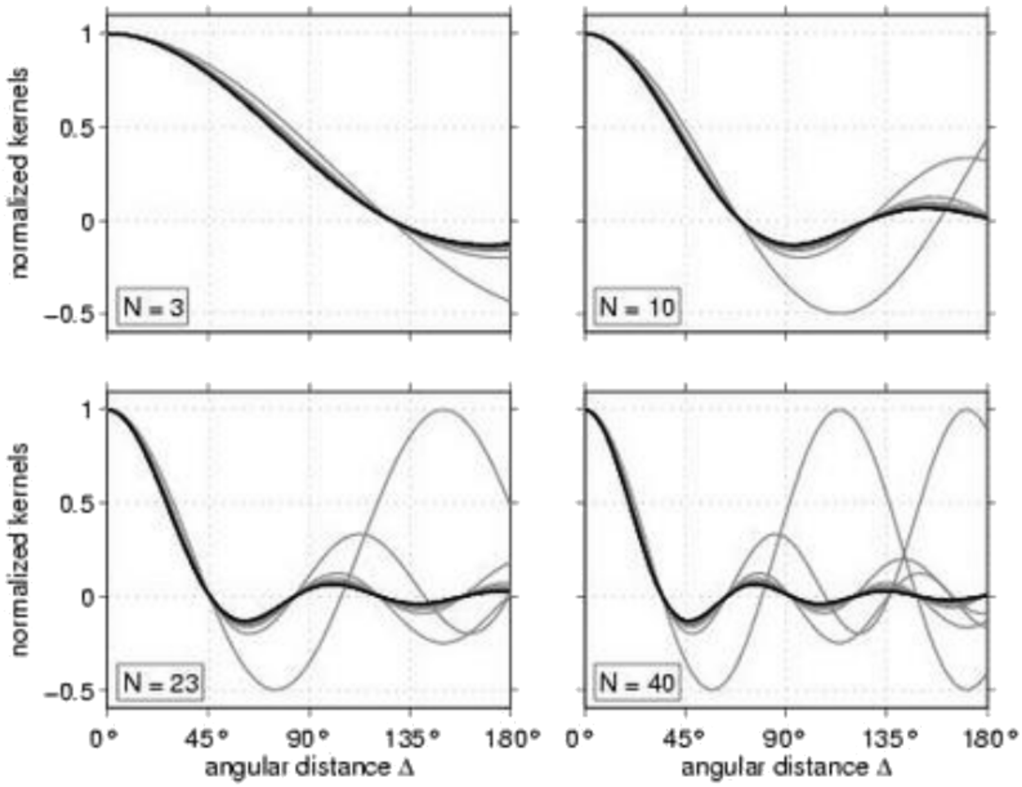


FIGURE 15 – *Comparaison des noyaux mis à l'échelle exacts (134) avec l'approximation asymptotique de la Terre plate (135) (en noir). Le nombre de Shannon* $N = 3, 10, 23, 40$ *est gardé constant dans chacun des quatre échantillons, et la largeur de bande utilisée pour calculer les noyaux mis à l'échelle exacts varie entre* $L = 1$ *(adaptation la plus mauvaise) et* $L = 100$ *(meilleure adaptation)*

est le noyau de Fredholm symétrique, dépendant de N.

Les équations (131)–(132) sont les analogues sphériques de l'équation en une dimension aux valeurs propres mises à l'échelle (6). Les valeurs propres asymptotiques $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et les fonctions mises à l'échelle associées $\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \ldots$ dépendent du degré maximal L et de l'aire A seulement à travers le nombre de Shannon $N = (L+1)^2 A/(4\pi)$. Comme dans le cas des équations (51) et (55), nous sommes libres de résoudre (131)–(132) soit sur la totalité de Ω_*, auquel cas les fonctions propres $\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \ldots$ sont en bande limitée, ou bien, seulement dans la région de concentration R_*, auquel cas elles sont à espace limité. On est prêt à vérifier que la mise à l'échelle n'a pas d'effet sur la somme des valeurs propres, dans la mesure où

$$N = \int_{R_*} D_*(0)\, d\Omega_* = \frac{N}{4\pi} \int_{R_*} d\Omega_* = N. \tag{133}$$

Nous montrons dans l'appendice B que le problème des valeurs propres mises à l'échelle (131)–(132) est identique à celui de contrôler le problème de la concentration en deux dimensions sur un plan.

Les considérations ci-dessus montrent que pour la limite (121), nous nous attendons à ce que le noyau exact de Fredholm (50), évalué sur Ω_* et normalisé par sa valeur à décalage nul,

$$\frac{D(\sqrt{4\pi/A}\,\Delta)}{D(0)} = \frac{1}{(L+1)^2}\sum_{l=0}^{L}(2l+1)\,P_l\left(\cos\sqrt{\frac{4\pi}{A}}\,\Delta\right), \tag{134}$$

soit approximé par le noyau asymptotique similairement normalisé

$$\frac{D_*(\Delta)}{D_*(0)} = \frac{2J_1(\sqrt{N}\Delta)}{\sqrt{N}\Delta}. \tag{135}$$

La qualité de cette approximation asymptotique vers le noyau et la mise à l'échelle associée à la limite de la Terre plate sont illustrés sur la Figure 15. Dans les quatre exemples montrés, avec les nombres de Shannon $N = 3, 10, 23, 40$, l'approximation est excellente même pour des distances angulaires aussi grandes que $\Delta \approx 135°$, une fois que le degré harmonique sphérique excède $L = 3-4$.

7.3 Équation des valeurs propres mises à l'échelle pour une calotte polaire symétrique par rapport à l'axe

La version asymptotique "Terre plate" du problème des valeurs propres colatitudinales de rang fixé (85) peut être obtenue de deux manières différentes : soit par l'application d'une approximation de Hilb (122) et la formule de sommation de Poisson (123) au noyau $D(\theta,\theta')$ donné dans l'équation (86), soit en utilisant le théorème d'addition pour les fonctions de Bessel [27],

$$J_0(k\Delta) = J_0(k\theta)J_0(k\theta') + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(k\theta)J_m(k\theta')\cos m(\phi-\phi'), \tag{136}$$

la représentation (84) de $g(\theta,\phi)$, et l'orthonormalité des fonctions longitudinales $\ldots, \sqrt{2}\cos m\phi, \ldots, 1, \ldots, \sqrt{2}\sin m\phi, \ldots$ sur l'intervalle $0 \le \phi \le 2\pi$ pour décomposer les équations (51) et (127) en une série de problèmes individuels de valeurs propres, un pour chaque ordre $0 \le m \le L$. En utilisant l'une ou l'autre méthode, nous trouvons que l'équation (85) peut être approximée pour la limite (121) par

$$\int_0^{\Theta} D(\theta,\theta')\,g(\theta')\,\theta'\,d\theta' = \lambda g(\theta), \tag{137}$$

où

$$D(\theta,\theta') = (L+1)^2\int_0^1 J_m[(L+1)p\theta]\,J_m[(L+1)p\theta']\,p\,dp. \tag{138}$$

Il est pratique dans l'instance courante d'approximer l'aire de la petite calotte polaire par $A = 2\pi(1-\cos\Theta) \approx \pi\Theta^2$, et d'introduire des coordonnées mises à l'échelle qui sont légèrement différentes de celles dans les équations (129), notamment

$$x = \theta/\Theta, \quad x' = \theta'/\Theta, \qquad \psi(x) = g(\theta), \quad \psi(x') = g(\theta'). \tag{139}$$

Cela amène à un problème de valeurs propres mis à l'échelle d'ordre fixé,

$$\int_0^1 D_*(x,x')\,\psi(x')\,x'\,dx' = \lambda\psi(x), \tag{140}$$

avec un noyau associé

$$D_*(x,x') = 4N\int_0^1 J_m(2\sqrt{N}\,px)\,J_m(2\sqrt{N}\,px')\,p\,dp, \tag{141}$$

dont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et les fonctions propres associées mises à l'échelle $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ dépendent du degré harmonique sphérique maximal L et du rayon de la calotte Θ seulement à travers le nombre de Shannon de la petite calotte polaire $N = \frac{1}{4}(L+1)^2\Theta^2$.

Bien que les relations de mise à l'échelle de la calotte polaire (140)–(141) soient uniquement valides dans la limite asymptotique $L \to \infty, \Theta \to 0$, l'approximation est excellente même pour des largeurs de bande modérées L et des rayons de calotte modifiables Θ.

Pour un nombre de Shannon fixé $N = 40$, un degré maximal dans le domaine $25 \leq L \leq 40$, et par conséquent un rayon de calotte $\Theta = 2\sqrt{N}/(L+1)$ dans le domaine $29° \geq \Theta \geq 18°$, l'accord entre les fonctions propres mises à l'échelle d'ordre fixe est toujours respecté avec un tout petit pourcentage d'écart. En principe, les résultats asymptotiques (140)–(141) devraient permettre la détermination d'approximations des fonctions propres de la calotte polaire $g(\theta)$ pour des valeurs variables de L et Θ en mettant à l'échelle un catalogue pré-calculé de fonctions propres pour N fixé. En pratique, la construction et la diagonalisation de la matrice tridiagonale de Grünbaum (116) est si évident et efficace qu'il est préférable de simplement calculer les fonctions propres optimalement concentrées $g(\theta)$ exactement.

7.4 Nombre de Shannon d'ordre fixe asymptotique

L'approximation asymptotique des valeurs propres significatives associées à un ordre donné m est

$$\begin{aligned} N_m &= \int_0^1 D_*(x,x)\, x\, dx \\ &= 4N \int_0^1\int_0^1 J_m^2(2\sqrt{N}\, px)\, p\, dp\, x\, dx \\ &= +\, 2N\left[J_m^2(2\sqrt{N}\,) + J_{m+1}^2(2\sqrt{N}\,)\right] \\ &\quad - (2m+1)\sqrt{N} J_m(2\sqrt{N}\,) J_{m+1}(2\sqrt{N}\,) \\ &\quad - \frac{m}{2}\left[1 - J_0^2(2\sqrt{N}\,) - 2\sum_{n=1}^{m} J_n^2(2\sqrt{N}\,)\right]. \end{aligned} \tag{142}$$

La relation (93) entre le nombre total N de valeurs propres significatives et le nombre N_m associé avec chaque ordre m est préservée dans cette approximation asymptotique, dans la mesure où

$$\begin{aligned} N &= N_0 + 2\sum_{m=1}^{\infty} N_m \\ &= 4N \int_0^1\int_0^1 \left[J_0^2(2\sqrt{N}pq) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m^2(2\sqrt{N}pq)\right] p\, dp\, x\, dx \\ &= 4N \int_0^1\int_0^1 p\, dp\, x\, dx = N. \end{aligned} \tag{143}$$

Dans la Figure 16, nous comparons les nombres de Shannon exacts pour un ordre fixé N_m, calculés par l'intégration numérique de l'équation de Gauss-Legendre (92), avec le résultat asymptotique (142), pour les mêmes valeurs de $N = 3, 10, 23, 40$ et $1 \leq L \leq 100$ comme dans la Figure 15.

Le nombre de valeurs propres significatives pour $m = 0$ peut même être simplement approximé par $N_0 \approx 2\sqrt{N}/\pi \approx (L+1)\Theta/\pi$, comme cela est montré.

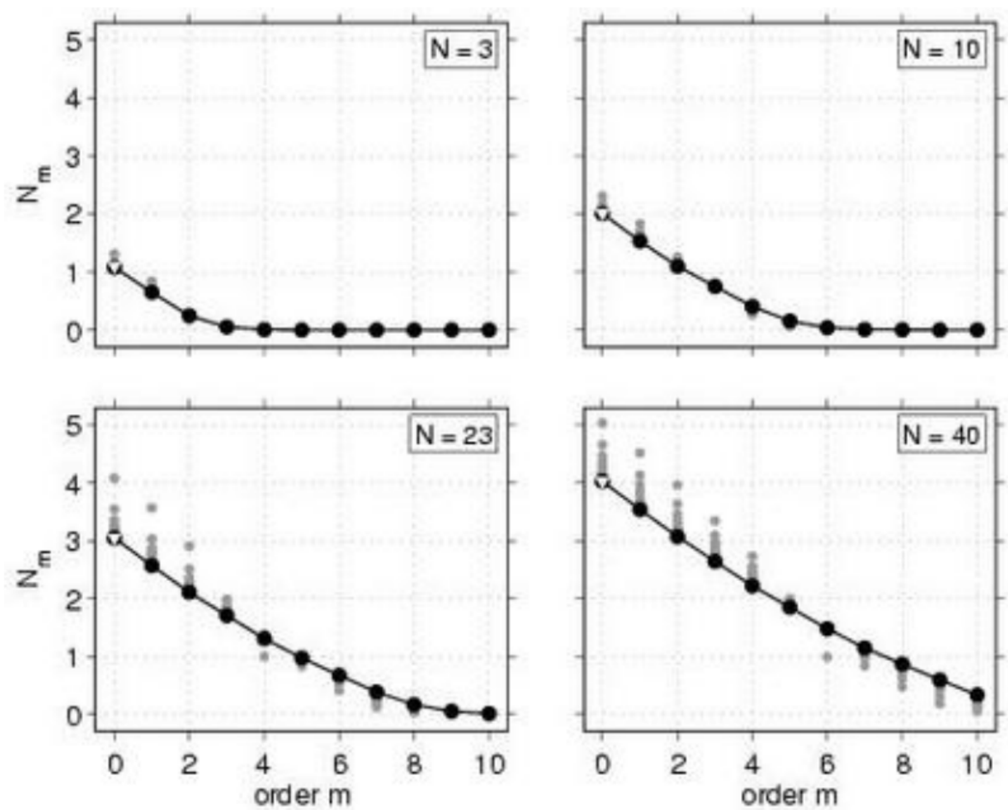


FIGURE 16 – *Comparaison du nombre N_m de valeurs propres significatives pour un ordre fixé m (en gris) avec l'approximation asymptotique (142) (en noir). Le nombre de Shannon $N = 3, 10, 23, 40$ est gardé constant dans chacun des quatre échantillons, et la largeur de bande utilisée pour calculer les valeurs exactes de N_m varie entre $L = 1$ (pire remplissage) et $L = 100$ (meilleur remplissage). Les points inconsistants avec la contrainte $A/(4\pi) = N/(L+1)^2 < 1$ ne sont pas représentés graphiquement. Les triangles blancs montrent l'approximation simplifiée de $N_0 \approx (L+1)\Theta/\pi$ dans le cas $m = 0$.*

8 Conclusion

Une famille orthogonale d'expansions harmoniques sphériques à bande limitée qui sont optimalement concentrées dans une région finie R de la sphère unité peut être calculée en résolvant soit un problème de valeurs propres d'une matrice symétrique dans le domaine spectral soit un problème équivalent de Fredholm de recherche de valeurs propres dans le domaine spatial. Toute valeur propre $0 < \lambda < 1$ est une mesure à la fois de la concentration spatiale de la fonction propre à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}})$ et de la fonction propre à espace limité de la concentration spectrale $h(\hat{\mathbf{r}})$ qui coïncide avec $g(\hat{\mathbf{r}})$ dans la région de concentration. Le nombre de fonctions propres correctement concentrées est $N = (L+1)^2 A/(4\pi)$, où L est le degré sphérique maximal et A est l'aire de la région de concentration. Pour le dire rapidement, le nombre de Shannon N est la dimension de l'espace des fonctions $f(\hat{\mathbf{r}})$ qui peuvent être concentrées dans une région finie R de la sphère et dans un intervalle spectral $0 \leq l \leq L$. Pour une petite région $A \ll 4\pi$, et un degré harmonique sphérique maximal L, les fonctions propres optimalement concentrées à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}})$ et leurs fonctions propres associées limitées en espace $h(\hat{\mathbf{r}})$ peuvent être calculées précisément, même pour une région de forme irrégulière R. Dans le cas spécial, mais important, d'une calotte polaire circulaire, chaque fonction propre peut être calculée précisément, par diagonalisation numérique d'une matrice commutante tridiagonale, qui a un spectre simple de Sturm-Liouville. Exactement comme dans le problème de Slepian à une dimension, les cônes propres sphéroïdaux prolates ont prouvé leur extrême utilité en analyse spectrale en temps-fréquence, nous nous attendons à ce que les fonctions propres sphériques en deux dimensions développées ici aient une large variété d'applications en analyse de données dans des domaines tels que la géophysique, la science planétaire et la cosmologie.

Remerciements

F. J. S. remercie Ingrid Daubechies, Peter E. Harris, Jean Steiner, Partha Mitra, Bill Symes, et David Thomson pour des discussions perspicaces, et le Département de Géophysique Spatiale et Planétaire à l'Institut de Physique du Globe de Paris pour leur hospitalité. Le support financier de ce travail a été apporté par l'U. S. National Science Foundation sous le numéro d'attribution EAR-0105387.

Références

[1] A. Albertella, F. Sansò, N. Sneeuw, *Band-limited functions on a bounded spherical domain : the Slepian problem on the sphere*, J. Geodesy, 73 (1999), p. 436–447.

[2] R. D. Amado, K. Stricker-Bauer, D. A. Sparrow, *Semiclassical methods and the summation of the scattering partial wave series*, Phys. Rev. C, 32 (1985), p. 329–332.

[3] M. A. Blanco, M. Flórez, M. Bermejo, *Evaluation of the rotation matrices in the basis of real spherical harmonics*, J. Mol. Struct. (Theochem), 419 (1997), p. 19–27.

[4] M. Böhme, D. Potts, *A fast algorithm for filtering and wavelet decomposition on the sphere*, Electron. Trans. Numer. Anal., 16 (2003), p. 70–93.

[5] J. N. Brune, *Travel times, body waves, and normal modes of the Earth*, Bull. Seism. Soc. Am., 54 (1964), p. 2099–2128.

[6] W. E. Byerly, *An Elementary Treatise on Fourier's Series and Spherical, Cylindrical, and Ellipsoidal Harmonics*, Ginn & Co., Boston, Mass., 1893.

[7] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience, New York, 1953.

[8] F. A. Dahlen, *A uniformly valid asymptotic representation of normal mode multiplet spectra on a laterally heterogeneous Earth*, Geophys. J. R. Astron. Soc., 62 (1980), p. 225–247.

[9] F. A. Dahlen, J. Tromp, *Theoretical Global Seismology*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1998.

[10] I. Daubechies, *Time-frequency localization operators – a geometric phase space approach*, IEEE Trans. Inform. Theory, 34 (1988), p. 605–612.

[11] I. Daubechies, T. Paul, *Time-frequency localisation operators – a geometric phase space approach : II. The use of dilations*, Inv. Probl., 4 (1988), p. 661–680.

[12] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1996.

[13] P. Flandrin, *Maximum signal energy concentration in a time-frequency domain*, in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process., vol. 4, IEEE, 1988, p. 2176–2179.

[14] P. Flandrin, *Time-frequency/Time-scale analysis*, Academic Press, San Diego, Calif., 1999.

[15] W. Freeden, V. Michel, *Orthogonal zonal, tesseral and sectorial wavelets on the sphere for the analysis of satellite data*, Adv. Comput. Math., 21 (2004), p. 181–217.

[16] W. Freeden, M. Schreiner, *Orthogonal and nonorthogonal multiresolution analysis, scale discrete and exact fully discrete wavelet transform on the sphere*, Constr. Approx., 14 (1998), p. 493–515.

[17] W. Freeden, U. Windheuser, *Combined spherical harmonic and wavelet expansion – A future concept in Earth's gravitational determination*, Appl. Comput. Harm. Anal., 4 (1997), p. 1–37.

[18] E. N. Gilbert, D. Slepian, *Doubly orthogonal concentrated polynomials*, SIAM J. Math. Anal., 8 (1977), p. 290–319.

[19] F. A. Grünbaum, L. Longhi, M. Perlstadt, *Differential operators commuting with finite convolution integral operators : some non-abelian examples*, SIAM J. Appl. Math., 42 (1982), p. 941–955.

[20] A. Hanssen, *Multidimensional multitaper spectral estimation*, Signal Process., 58 (1997), p. 327–332.

[21] E. Hilb, *Über die Laplacesche Reihe*, Math. Z., 5 (1919), p. 17.

[22] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990.

[23] C. Hwang, *Spectral analysis using orthonormal functions with a case study on sea surface topography*, Geophys. J. Int., 115 (1993), p. 1148–1160.

[24] C. Hwang, S.-K. Chen, *Fully normalized spherical cap harmonics : Application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1*, Geophys. J. Int., 129 (1997), p. 450–460.

[25] R. Jakob-Chien, B. K. Alpert, *A fast spherical filter with uniform resolution*, J. Comput. Phys., 136 (1997), p. 580–584.

[26] J. Jeans, *The propagation of earthquake waves*, Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 102 (1923), p. 554–574.

[27] H. Jeffreys, B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 3 ed., 1988.

[28] R. P. Kanwal, *Linear Integral Equations ; Theory and Technique*, Academic Press, New York, 1971.

[29] M. Kido, D. A. Yuen, A. P. Vincent, *Continuous wavelet-like filter for a spherical surface and its application to localized admittance function on Mars*, Phys. Earth Planet. Inter., 135 (2003), p. 1–14.

[30] H. J. Landau, *On the eigenvalue behavior of certain convolution equations*, Trans. Am. Math. Soc., 115 (1965), p. 242–256.

[31] ——, *Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions*, Acta Mathematica Uppsala, 117 (1967), p. 37–52.

[32] H. J. Landau, H. O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – II*, Bell Syst. Tech. J., 40 (1960), p. 65–84.

[33] ——, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – III : The dimension of the space of essentially time- and band-limited signals*, Bell Syst. Tech. J., 41 (1962), p. 1295–1336.

[34] K. G. Libbrecht, *Practical considerations for the generation of large-order spherical harmonics*, Solar Physics, 99 (1985), p. 371–373.

[35] J. M. Lilly, J. Park, *Multiwavelet spectral and polarization analyses of seismic records*, Geophys. J. Int., 122 (1995), p. 1001–1021.

[36] T.-C. Liu, B. D. van Veen, *Multiple window based minimum variance spectrum estimation for multidimensional random fields*, IEEE Trans. Signal Process., 40 (1992), p. 578–589.

[37] G. Masters, K. Richards-Dinger, *On the efficient calculation of ordinary and generalized spherical harmonics*, Geophys. J. Int., 135 (1998), p. 307–309.

[38] P. J. McGovern, S. C. Solomon, D. E. Smith, M. T. Zuber, M. Simons, M. A. Wieczorek, R. J. Phillips, G. A. Neumann, O. Aharonson, J. W. Head, *Localized gravity/topography admittance and correlation spectra on Mars : Implications for regional and global evolution*, J. Geophys. Res., 107 (2002), p. 5136, doi :10.1029/2002JE001854.

[39] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Dover, New York, 2000.

[40] L. Miranian, *Slepian functions on the sphere, generalized Gaussian quadrature rule*, Inv. Prob., 20 (2004), p. 877–892.

[41] F. J. Narcowich, J. D. Ward, *Nonstationary wavelets on the m-sphere for scattered data*, Ap. Comput. Harm. Anal., 3 (1996), p. 324–336.

[42] S. Olhede, A. T. Walden, *Generalized Morse wavelets*, IEEE Trans. Signal Process., 50 (2002), p. 2661–2670.

[43] F. W. J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, A. K. Peters, Wellesley, Mass., 1997.

[44] S. M. Ould Kaber, *A Legendre pseudospectral viscosity method*, J. Comput. Phys., 128 (1996), p. 165–180.

[45] R. Pail, G. Plank, W.-D. Schuh, *Spatially restricted data distributions on the sphere : the method of orthonormalized functions and applications*, J. Geodesy, 75 (2001), p. 44–56.

[46] D. B. Percival, A. T. Walden, *Spectral Analysis for Physical Applications, Multitaper and Conventional Univariate Techniques*, Cambridge Univ. Press, New York, 1993.

[47] A. S. Polyakov, *Local basis expansions for linear inverse problem*, PhD thesis, New York University, 2002.

[48] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in FORTRAN : The Art of Scientific Computing*, Cambridge Univ. Press, 2nd ed., 1992.

[49] S. S. Shapiro, B. H. Hager, T. H. Jordan, *The continental tectosphere and Earth's long-wavelength gravity field*, Lithos, 48 (1999), p. 135–152.

[50] F. J. Simons, R. D. van der Hilst, M. T. Zuber, *Spatio-spectral localization of isostatic coherence anisotropy in Australia and its relation to seismic anisotropy : Implications for lithospheric deformation*, J. Geophys. Res., 108 (2003), p. 2250, doi : 10.1029/2001JB000704.

[51] M. Simons, B. H. Hager, *Localization of the gravity field and the signature of glacial rebound*, Nature, 390 (1997), p. 500–504.

[52] M. Simons, S. C. Solomon, B. H. Hager, *Localization of gravity and topography : Constraints on the tectonics and mantle dynamics of Venus*, Geophys. J. Int., 131 (1997), p. 24–44.

[53] D. Slepian, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – IV : Extensions to many dimensions ; Generalized prolate spheroidal functions*, Bell Syst. Tech. J., 43 (1964), p. 3009–3057.

[54] ——, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – V : The discrete case*, Bell Syst. Tech. J., 57 (1978), p. 1371–1429.

[55] D. Slepian, *Some comments on Fourier-analysis, uncertainty and modeling*, SIAM Rev., 25 (1983), p. 379–393.

[56] D. Slepian, H. O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – I*, Bell Syst. Tech. J., 40 (1960), p. 43–63.

[57] D. Slepian, E. Sonnenblick, *Eigenvalues associated with prolate spheroidal wave functions of zero order*, Bell Syst. Tech. J., 44 (1965), p. 1745–1759.

[58] N. Sneeuw, *Global spherical harmonic-analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective*, Geophys. J. Int., 118 (1994), p. 707–716.

[59] Swarztrauber, W. F. Spotz, *Generalized discrete spherical harmonic transforms*, J. Comput. Phys., 159 (2000), p. 213–230.

[60] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 4 ed., 1975.

[61] D. J. Thomson, *Spectrum estimation and harmonic analysis*, Proc. IEEE, 70 (1982), p. 1055–1096.

[62] F. G. Tricomi, *Integral Equations*, Interscience, New York, 5 ed., 1970.

[63] D. L. Turcotte, R. J. Willemann, W. F. Haxby, J. Norberry, *Role of membrane stresses in the support of planetary topography*, J. Geophys. Res., 86 (1981), p. 3951–3959.

[64] A. T. Walden, *Improved low-frequency decay estimation using the multitaper spectral-analysis method*, Geophys. Prospect., 38 (1990), p. 61–86.

[65] M. A. Wieczorek, R. J. Phillips, *Potential anomalies on a sphere : Applications to the thickness of the lunar crust*, J. Geophys. Res., 103 (1998), p. 1715–1724.

[66] M. A. Wieczorek, F. J. Simons, *Localized spectral analysis on the sphere*, Geophys. J. Int., (2004), in preparation.

A Considérations calculatoires

Ici nous présentons une brève description des méthodes numériques employées dans cette étude. Tous les calculs effectués l'ont été en arithmétique double précision. Les assertions faisant intervenir la précision machine sont valides selon une double précision, avec une erreur arrondie de $\sim 10^{-16}$.

A.1 Concentration dans une calotte polaire

Nous calculons les fonctions propres colatitudinales $g_1(\theta), g_2(\theta), \ldots, g_{L-m+1}(\theta)$ d'une calotte polaire symétrique par rapport à l'axe $0 \le \theta \le \Theta$ en utilisant trois méthodes différentes. La première méthode est la diagonalisation numérique des matrices D de taille $(L-m+1)\times(L-m+1)$ dans l'équation (76).

Nous n'implémentons pas l'expression de Wigner 3-j (79) pour les éléments de la matrice $D_{ll'}$, mais utilisons à la place la quadrature de Gauss-Legendre [48] pour évaluer l'intégrale définissant (78) :

$$\begin{aligned} D_{ll'} &= \int_{\cos\Theta}^{1} X_{lm}(\arccos\mu) X_{l'm}(\arccos\mu)\, d\mu \\ &\approx \sum_{j=1}^{J} w_j X_{lm}(\arccos\mu_j) X_{l'm}(\arccos\mu_j), \end{aligned} \tag{144}$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_J$ sont les racines des polynômes de Legendre $P_J(\bar{\mu})$, mises à l'échelle de $-1 \le \bar{\mu}_j \le 1$ vers $\cos\Theta \le \mu_j \le 1$, et $w_j = 2(1-\bar{\mu}_j^2)^{-1}[P_J'(\bar{\mu}_j)]^{-2}, j = 1, 2, \ldots, J$ sont les poids d'intégration associés. Seuls les éléments les plus hauts de la matrice triangulaire $D_{ll'}, l \le l'$ sont calculés explicitement ; les éléments les plus bas sont complétés en utilisant la symétrie $D_{ll'} = D_{l'l}$.

L'ordre J de l'intégration de Gauss-Legendre est ajusté vers le haut jusqu'à ce que les $L-m+1$ fonctions propres $g_1(\theta), g_2(\theta), \ldots, g_{L-m+1}(\theta)$ du domaine spatial satisfassent les relations d'orthogonalité (83) à la précision permise par la machine. La même règle de quadrature de Gauss-Legendre pour les hauts degrés est utilisée pour évaluer les intégrales orthogonales. Les fonctions de Legendre $X_{lm}(\theta)$ sont calculées avec une haute précision à très haut degré ($l \approx 500$) en utilisant un algorithme récursif [34; 37].

La seconde méthode consiste à résoudre numériquement l'équation de Fredholm (89b). En utilisant la règle de quadrature de Gauss-Legendre pour discrétiser cette équation, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{J} w_j D(\mu_j, \mu_j') h(\mu_j') = \lambda h(\mu_j), \quad j = 1, 2, \ldots, J. \tag{145}$$

L'équation (145) peut être réécrite comme une équation algébrique symétrique de valeurs propres,

$$(\mathsf{W}^{1/2}\tilde{\mathsf{D}}\mathsf{W}^{1/2})(\mathsf{W}^{1/2}\tilde{\mathsf{h}}) = \lambda(\mathsf{W}^{1/2}\tilde{\mathsf{h}}), \tag{146}$$

où $\tilde{\mathsf{h}}$ est un vecteur colonne J-dimensionnel avec pour éléments $\tilde{h}_j = h(\mu_j)$, et où $\tilde{\mathsf{D}}$ et W dénotent les matrices $J \times J$ d'éléments $\tilde{D}_{jj'} = D(\mu_j, \mu'_j)$ et $W_{jj'} = w_j\delta_{jj'}$. Les valeurs propres λ et les vecteurs propres transformés $\mathsf{W}^{1/2}\tilde{\mathsf{h}}$ sont calculés par diagonalisation numérique de la matrice $\mathsf{W}^{1/2}\tilde{\mathsf{D}}\mathsf{W}^{1/2}$.

L'ordre d'intégration J est à nouveau choisi pour assurer une orthogonalité précise des fonctions propres du domaine spatial $h_1(\theta), h_2(\theta), \ldots, h_{L-m+1}(\theta)$. Dans le cas zonal ($m = 0$), le choix $J = L+1$ rend à la fois les intégrations (144) et (145) exactes ; pour $m \neq 0$, nous utilisons un ordre d'intégration élevé et conservatif J, puisque les intégrandes ne sont plus polynomiaux. Les puissances du spectre montrées dans la Figure 3 pour un ordre fixé sont calculées en transformant les fonctions propres du domaine spatial (55) vers le domaine spectral, en utilisant comme domaine pour le degré sphérique harmonique $m \leq l \leq 127$ qui est suffisant pour éviter les phénomènes d'aliasing [5] [58].

Même pour des valeurs modérées du spectre de degré maximal L et une calotte de rayon Θ, les plus petites valeurs propres $\ldots, \lambda_{L-m}, \lambda_{L-m+1}$ tombent en dessous de la précision machine.

Les fonctions propres associées, moins bien concentrées, calculées en utilisant soit l'une soit l'autre des deux méthodes directes sont dans ce cas des éléments orthogonaux essentiellement arbitraires d'un espace propre dégénéré numériquement, et ne sont plus assez précis [1]. À cause de cela, il n'est pas possible de trouver les fonctions propres optimalement exclues d'une petite calotte polaire, ou de façon équivalente, les fonctions propres optimalement concentrées d'une grande calotte, par diagonalisation soit de la matrice D soit de $\tilde{\mathsf{D}}$. Heureusement, cette difficulté peut être surmontée dans la troisième méthode, qui est une diagonalisation de la matrice tridiagonale de Grünbaum (116). L'espacement grossièrement équidistant des valeurs propres de Sturm-Liouville $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{L-m+1}$ permet de calculer toutes les fonctions propres associées, à la précision permise par la machine. Les facteurs de concentration spatio-spectrale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{L-m+1}$ sont calculés à la même précision, soit par une multiplication matricielle *a posteriori*, $\lambda = \mathsf{g}^{\mathsf{T}}\mathsf{D}\mathsf{g}$, soit par une intégration de Gauss-Legendre de la relation spatiale équivalente (83).

À la fois les valeurs propres significatives et non significatives calculées en utilisant chacune des méthodes ci-dessus s'accordent selon la précision machine, fournissant une vérification numérique utile. La diagonalisation de la matrice tridiagonale G est la seule manière numériquement stable de résoudre le problème de la concentration soit pour une grande calotte polaire soit pour un grand degré maximal L. Par une extension de l'analyse ci-dessus, il est même possible d'utiliser l'opérateur de Grünbaum $\mathcal{G}$ pour calculer des fonctions propres à espace limité $h_{L-m+2}(\theta), h_{L-m+3}(\theta), \ldots$ qui sont dans l'espace nul [40].

A.2 Concentration dans une région de forme arbitraire

On résoud le problème de concentration spatio-spectral pour une région de forme arbitraire R par diagonalisation numérique de la matrice D de taille $(L+1)^2 \times (L+1)^2$ et d'éléments $D_{lm,l'm'}$ définie par l'équation (40). Étant donnée la frontière lissée de R, nous trouvons d'abord les points le plus au nord et le plus au sud, de colatitudes θ_n et θ_s. Pour tout $\theta_\mathrm{n} \leq \theta \leq \theta_\mathrm{s}$, nous trouvons les points le plus à gauche et le plus à droite, de longitudes $\phi_\mathrm{e}(\theta)$ et $\phi_\mathrm{w}(\theta)$. Dans le cas d'une région non convexe

5. repliement de spectre : confusion par recouvrement de différentes parties qui donne un effet de moirage dans le cas spatial et un effet de distorsion (par exemple audio) dans le cas temporel.

avec des protubérances et des baies, il peut y avoir plusieurs points les plus à gauche et à droite, que nous indexerons avec un indice supplémentaire $i = 1, 2, \ldots, I$. L'intégrale selon la longitude,

$$\Phi_{mm'}(\theta) = \sum_{i=1}^{I} \int_{\phi_{\mathrm{w}i}}^{\phi_{\mathrm{e}i}} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m'\phi \\ \sin m'\phi \end{Bmatrix} d\phi, \tag{147}$$

peut être calculée analytiquement, et nous utilisons la quadrature de Gauss-Legendre pour calculer l'intégrale restante sur la colatitude :

$$\begin{aligned} D_{lm,l'm'} &= \int_{\mu_{\mathrm{n}}}^{\mu_{\mathrm{s}}} X_{lm}(\arccos\mu) X_{l'm'}(\arccos\mu) \Phi_{mm'}(\arccos\mu)\, d\mu \\ &\approx \sum_{j=1}^{J} w_j X_{lm}(\arccos\mu_j) X_{l'm'}(\arccos\mu_j) \Phi_{mm'}(\arccos\mu_j). \end{aligned} \tag{148}$$

Comme dans le cas d'une calotte polaire, nous ajustons l'ordre d'intégration J vers le haut jusqu'à ce que les fonctions propres $g_1(\hat{\mathbf{r}}), g_2(\hat{\mathbf{r}}), \ldots, g_{(L+1)^2}(\hat{\mathbf{r}})$ satisfassent les relations d'orthogonalité (47) en accord avec la précision de la machine. Il n'y a pas d'analogue de l'opérateur de Grünbaum $\mathcal{G}$ pour une région de forme arbitraire, si ce n'est que seules les fonctions propres associées aux valeurs propres qui sont au-dessus de la précision machine peuvent être calculées efficacement. Dans la plupart des applications pratiques, il n'y a pas de limitation, puisqu'on s'intéresse en général seulement aux fonctions propres bien concentrées et calculables $g_1(\hat{\mathbf{r}}), g_2(\hat{\mathbf{r}}), \ldots, g_N(\hat{\mathbf{r}})$, qui sont associées aux valeurs propres numériquement significatives $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$.

A.3 Concentration dans une calotte non polaire

Une des applications principales des fonctions de Slepian sphériques en géophysique et en physique planétaire sera d'analyser les mesures dans une région circulaire symétrique centrée en un lieu géographique arbitraire θ_0, ϕ_0 [e.g., 29; 38; 51; 52]. La procédure la plus adaptée pour déterminer les fonctions propres optimalement concentrées requises consiste à d'abord calculer les coefficients harmoniques sphériques g_{lm} des fonctions propres (84) concentrées dans une calotte polaire $0 \leq \theta \leq \Theta$, et ensuite à les faire tourner vers le lieu désiré pour la calotte [3; 9; 12; 37]. Le fenêtrage réel des données pour des analyses ultérieures peut soit être effectué dans le domaine spectral [52], soit, plus simplement, par multiplication évidente après transformation des fonctions propres tournées vers le domaine spatial. Si l'on souhaite éviter la rotation sphérique harmonique, il est aussi possible de calculer les fonctions propres tournées directement, en effectuant l'intégration numérique dans l'équation (147) sur les limites analytiques prescrites d'une calotte de rayon Θ centrée en θ_0, ϕ_0, données par

$$\phi_{\mathrm{w,e}}(\theta) = \phi_0 \mp \Delta\phi(\theta) \quad \text{where} \quad \Delta\phi(\theta) = \frac{\arccos(\cos\Theta - \cos\theta\cos\theta_0)}{\sin\theta\sin\theta_0}. \tag{149}$$

B Concentration spatio-spectrale sur un plan

Dans l'un de ses nombreux articles étendant son analyse en une dimension, Slepian [53] a considéré le problème de la concentration spatio-temporelle dans un espace cartésien de dimension arbitraire. Nous présentons une brève revue du problème de concentration dans un espace cartésien à deux dimensions, pour établir une comparaison avec l'analyse asymptotique de la Terre plate présentée dans la Section 7.

Une fonction arbitraire à valeurs réelles de carré intégrable $f(\mathbf{r})$ dans le plan a la représentation de Fourier en deux dimensions, analogue à la représentation harmonique sphérique (23),

$$f(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d^2\mathbf{k}, \qquad F(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d^2\mathbf{r}. \tag{150}$$

La relation d'orthonormalité de Fourier analogue à l'équation (16) est

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\, d^2\mathbf{k} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{\delta(\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|)}{2\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}. \tag{151}$$

La relation de Parseval stipule que les puissances de toute fonction $f(\mathbf{r})$ dans les domaines spectral et spatial sont identiques

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\mathbf{r})\, d^2\mathbf{r} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mathbf{k})|^2\, d^2\mathbf{k}. \tag{152}$$

L'équation (152) est l'analogue dans le plan de la relation sphérique $\|f\|_\Omega^2 = \|\mathsf{f}\|_\infty^2$.

Nous utilisons $g(\mathbf{r})$ pour dénoter une fonction à bande limitée,

$$g(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\|\mathbf{k}\|\le K} G(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d^2\mathbf{k}, \tag{153}$$

qui n'a pas de puissance excédant un nombre d'onde maximal K.

Par analogie avec le critère d'optimisation (38), nous cherchons à concentrer la puissance de $g(\mathbf{r})$ dans une région finie R :

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_R g^2\, d^2\mathbf{r}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g^2\, d^2\mathbf{r}} = \text{maximum}. \tag{154}$$

Les fonctions à bande limitée $g(\mathbf{r})$ qui maximisent le rapport λ dans l'équation (154) sont solutions de l'équation des valeurs propres dans le domaine de Fourier, analogue à l'équation (43),

$$\int_{\|\mathbf{k}\|\le K} D(\mathbf{k},\mathbf{k}')\, G(\mathbf{k})\, d^2\mathbf{k}' = \lambda G(\mathbf{k}), \quad \|\mathbf{k}\| \le K, \tag{155}$$

où

$$D(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_R e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}\, d^2\mathbf{r}. \tag{156}$$

Le problème correspondant dans le domaine spatial, analogue à l'équation (51), est

$$\int_R D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, g(\mathbf{r})\, d^2\mathbf{r}' = \lambda\, g(\mathbf{r}), \quad |\mathbf{r}| \le \infty, \tag{157}$$

où

$$D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\|\mathbf{k}\|\le K} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\, d^2\mathbf{k}. \tag{158}$$

Les fonctions propres à espace limité $h(\mathbf{r})$, qui s'évanouissent en dehors de la région R, satisfont la même équation aux valeurs propres 157), mais avec le domaine de solution convenablement restreint :

$$\int_R D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, h(\mathbf{r})\, d^2\mathbf{r}' = \lambda\, h(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in R. \tag{159}$$

La valeur propre associée $0 < \lambda < 1$ est une mesure à la fois de la concentration spatiale de $g(\mathbf{r})$ dans une région R et de la concentration spectrale de $h(\mathbf{r})$ dans le domaine suivant pour la longueur d'onde $\|\mathbf{k}\| \leq K$.

Pour qu'il y ait consistance avec (45), nous rangeons les valeurs propres de telle façon que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$. Les fonctions propres à bande et à domaine spatial limités $g_1(\mathbf{r}), g_1(\mathbf{r}), \dots$ peuvent être choisis de manière à être orthonormaux sur tout le plan $\|\mathbf{r}\| \leq \infty$ et orthogonaux sur la région R :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha g_\beta \, d^2\mathbf{r} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \int_R g_\alpha g_\beta \, d^2\mathbf{r} = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \tag{160}$$

La somme des valeurs propres, ou nombre de Shannon, est donné par

$$N = \sum_\alpha^\infty \lambda_\alpha = \int_{\|\mathbf{k}\|\leq K} D(\mathbf{k},\mathbf{k})\, d^2\mathbf{k} = \int_R D(\mathbf{r},\mathbf{r})\, d^2\mathbf{r} = K^2 \, \frac{A}{4\pi}, \tag{161}$$

où A est l'aire de la région de concentration R.

Les équations (160) et (161) sont les analogues planaires des relations sphériques (47) et (64).

La comparaison des équations (151) et (158) montre que le noyau du domaine spatial $D(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, comme sa contrepartie sphérique $D(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}')$, est une fonction delta à bande limitée.

En introduisant des coordonnées polaires et en intégrant selon l'angle, on peut réduire $D(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ à une formule rappelant celle de la représentation (127) :

$$D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_0^K J_0(k\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|)\, k\, dk = \frac{K\, J_1(K\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|)}{2\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}. \tag{162}$$

En introduisant des variables mises à l'échelle indépendantes et dépendantes analogues à (129),

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{4\pi}{A}}\,\mathbf{r}, \quad \mathbf{x}' = \sqrt{\frac{4\pi}{A}}\,\mathbf{r}', \qquad \psi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{r}), \quad \psi(\mathbf{x}') = g(\mathbf{r}'), \tag{163}$$

on peut réécire les équations (157) et (162) dans une forme identique à (131)–(132) et analogue à (6) :

$$\frac{K}{2\pi} \int_{R_*} \frac{J_1(K\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|}\, \psi(\mathbf{x}) = \lambda\, \psi(\mathbf{x}), \tag{164}$$

où R_* est l'image de la région de concentration R sous l'application (163).

Si la région de concentration R est un cercle de rayon Q, alors une représentation en coordonnées polaires, $\mathbf{r} = (q,\phi)$, analogue à (84),

$$g(q,\phi) = \begin{cases} \sqrt{2}\, g(q) \cos m\phi & \text{si } -L \leq m < 0 \\ g(q) & \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2}\, g(q) \sin m\phi & \text{si } 0 < m \leq L, \end{cases} \tag{165}$$

peut être utilisée pour décomposer les équations (157) et (162) en une série de problèmes de valeurs propres d'ordre fixé analogues à (137)–(138) :

$$\int_0^Q D(q,q')\, g(q')\, q'\, dq' = \lambda\, g(q), \tag{166}$$

où

$$D(q,q') = K^2 \int_0^1 J_m(Kpq)\, J_m(Kpq')\, p\, dp. \tag{167}$$

Les transformations

$$x = q/Q, \quad x' = q'/Q, \qquad \psi(x) = g(q), \quad \psi(x') = g(q') \tag{168}$$

convertissent les équations (166)–(167) en un problème de valeurs propres mis à l'échelle

$$4N \int_0^1 \int_0^1 J_m(2\sqrt{N}\, px)\, J_m(2\sqrt{N}\, px')\, p\, dp\, \psi(x')\, x'\, dx' = \lambda\, \psi(x), \tag{169}$$

qui est identique à (140)–(141), et dépendant seulement du nombre de Shannon $N = \frac{1}{4}K^2Q^2$.

Slepian [53] a remarqué que l'équation (169) est une version itérée de l'équation de "racine carrée" équivalente

$$2\sqrt{N} \int_0^1 J_m(2\sqrt{N}\, xx')\, \psi(x')\, x'\, dx' = \sqrt{\lambda}\, \psi(x). \tag{170}$$

Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et les fonctions propres $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ de l'équation (169) peuvent être alternativement trouvées en résolvant l'équation équivalente (170).

Dans la limite asymptotique (121), à la fois les problèmes de concentration général et sphérique symétrique par rapport à l'axe sont vus comme identiques au problème de concentration correspondant dans un plan, avec un nombre d'onde maximal K remplacé par l'entier $L+1$. Le problème planaire montre une mise à l'échelle du nombre de Shannon exacte analogue à celle du problème en une dimension (6), tandis que la mise à l'échelle du problème sphérique est seulement asymptotique. L'équation (142) donnant le nombre de valeurs propres significatives N_m associé à chaque ordre angulaire m est exact dans le cas du plan.