Positionner les décompositions triviales de Goldbach sur la droite du plan complexe de partie réelle $\frac{1}{2}$

Denise Vella-Chemla

11/4/14

On aimerait fournir une représentation graphique des décompositions de Goldbach dans le plan complexe qui positionnerait les décompositions dites triviales, i.e. $6 = 3 + 3, 10 = 5 + 5, 14 = 7 + 7, 22 = 11 + 11, \ldots$, sur la droite de partie réelle $\dfrac{1}{2}$.

On aimerait d'autre part trouver une fonction à variable complexe qui permettrait de distinguer les décompositions de Goldbach des nombres pairs (i.e. comme sommes de deux nombres premiers) des autres décompositions.

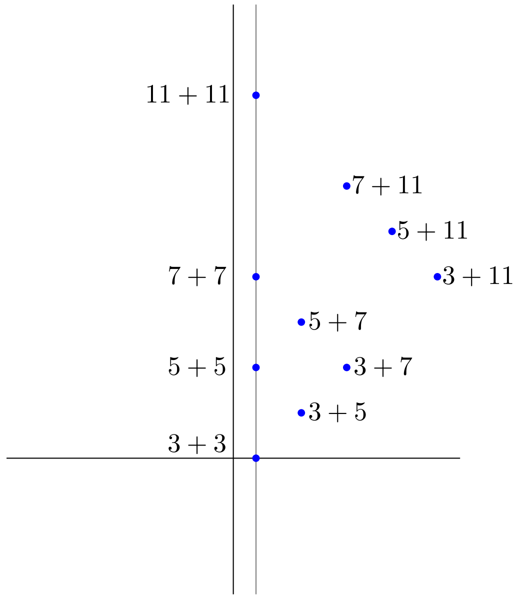
Pour cela, une décomposition $p + q$ est représentée par le point du plan complexe de coordonnées $\left(\dfrac{q-p}{2} + \dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{q+p}{2} - 3\right)$, correspondant au nombre complexe $\left(\dfrac{q-p}{2} + \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{q+p}{2} - 3\right) i$.

On définit une fonction $f(s)$ qui associe au nombre complexe $s = x+iy$ la valeur de $\sigma(x)+\sigma(y)$ où σ est la notation habituellement utilisée pour noter la somme des diviseurs d'un nombre. On impose que $\sigma(k) = \infty$ si k est un réel non entier.

Si la conjecture de Goldbach est vraie, la fonction f prend des valeurs minimales (égales à $n + 2$) pour les points d'un intervalle horizontal de points $x + iy$ tels que $x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{n}{2} - \dfrac{5}{2}\right]$ et $y = \dfrac{n}{2} - 3$.

La fonction $f'(x) = f(x) - x - 2$ admet donc des "zéros" correspondant aux points $x + ix$ qui sont sur la droite de partie réelle $\dfrac{1}{2}$ [*].

[*]. Le seul zéro trivial de f' correspond à la décomposition $6 = 3 + 3$.



On pourrait inversement utiliser la fonction $g(x)$ qui associe au nombre complexe $x+iy$ la valeur de $\varphi(x) \times \varphi(y)$ où φ est la notation habituellement utilisée pour noter le nombre $\varphi(k)$ de nombres k' inférieurs à k et premiers à k (tels que $(k, k') = 1$). On étend $\varphi(k)$ aux k qui sont des réels non entiers en imposant que pour eux, $\varphi(k) = 0$.

Si la conjecture de Goldbach est vraie, la fonction g prend des valeurs maximales (égales à $(x-1)(n-x-1)$) pour les points $x+iy$ d'un intervalle horizontal tels que $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{n}{2} - \frac{5}{2}\right]$ et $y = \frac{n}{2} - 3$.

Les "pics triviaux" de la fonction g, correspondant aux points $x + ix$, sont sur la droite de partie réelle $\frac{1}{2}$.