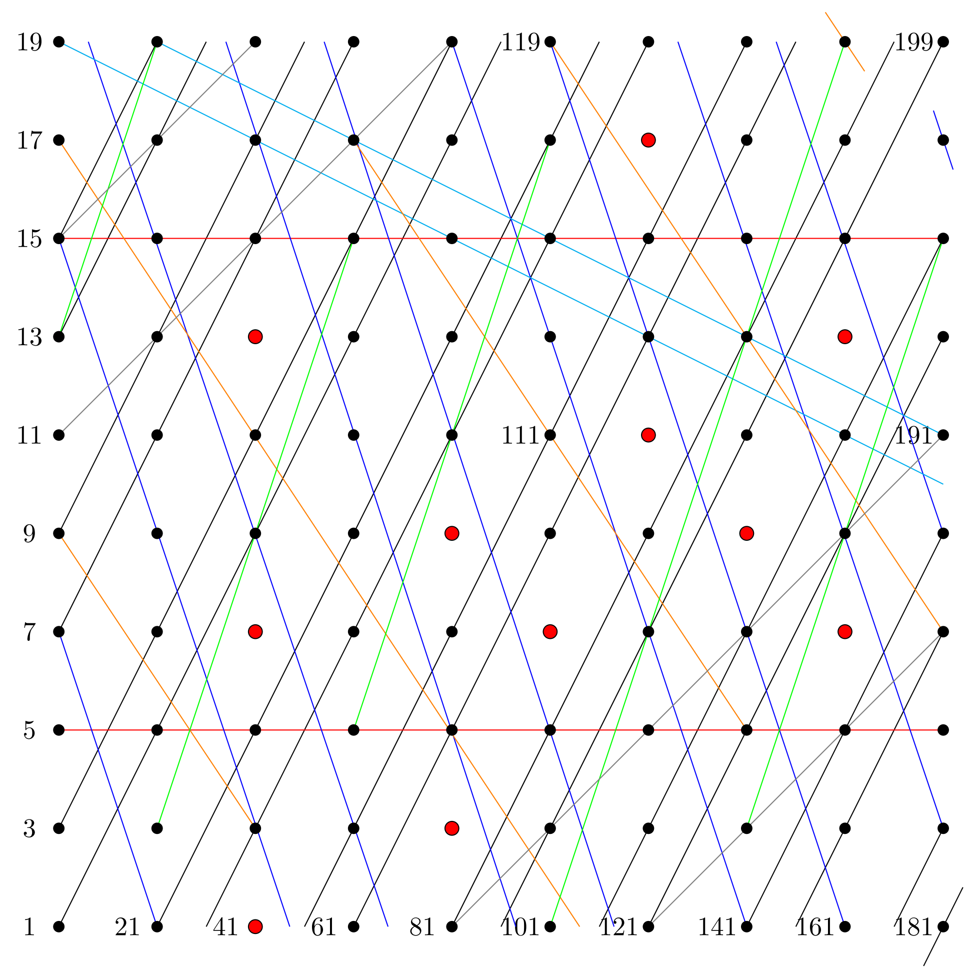
Comprendre comment on pourrait peut-être compter les décomposants de Goldbach sur le cristal de 400 (Denise Vella-Chemla, 4.3.2020)

On rappelle le schéma qui fournit les décomposants de Goldbach de 400.



On cherche à compter les décomposants de Goldbach de 400 supérieurs à $\sqrt{400}$.

Il y a 100 nombres candidats ($100 = 400/4$ soit $n/4$).

Parmi eux, 33 sont divisibles par 3 et 34 sont congrus à 1 modulo 3, ce qui fait 67 nombres à éliminer initialement. On a aussi 20 nombres divisibles par 5 et pas de nombres de la forme $5a + b$ à éliminer modulo 5 (puisque 5 divise 400). On doit également éliminer 14+15 nombres modulo 7, 9+9 nombres modulo 11, 8+7 nombres modulo 13, 6+6 nombres modulo 17 et 5+6 nombres modulo 19.

Note : ces nombres de nombres à éliminer sont calculables, il s'agit de diviser n par tout $2p$ avec p premier inférieur à $\sqrt{n}$ pour obtenir chaque sous-total, sauf pour les diviseurs de n pour lesquels il faut diviser n par $4p$ (en l'occurrence, modulo 5).

Ce qui fait un total de 172 nombres à éliminer, qui dépasse amplement le nombre 100 de nombres disponibles.

400 a pourtant des décomposants de Goldbach : on a oublié de rajouter (en fait de soustraire au nombre de nombres à éliminer) les nombres qui sont intersections de plusieurs droites, combinatoirement (par exemple qui sont à la fois des $3a+1$ et des $5a'$, etc.).

Comptons simplement ces nombres sur le schéma : on en trouve 52 qui sont intersections de 2 droites ou plus, 23 qui sont intersections de 3 droites ou plus, 5 qui sont intersections de 4 droites ou plus, ce qui fait un total de 80 nombres intersections de deux droites au moins sur le schéma.

On soustrait ce nombre 80 (qui correspond aux double-comptages effectués à tort) du nombre 172 (car ce nombre correspondait au fait d'éliminer un nombre dès qu'il est composé, en le comptant autant de fois qu'il a de diviseurs premiers différents ou bien qu'il est congru à n selon un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$, on appelle ça des multiplicités), on obtient 92 et c'est ce nombre 92 qu'on doit soustraire à 100, le nombre de nombres potentiellement décomposants de Goldbach (nombre de nombres du schéma).

100-92=8, alors que 400 a effectivement 11 décomposants de Goldbach supérieurs à sa racine.

Problème : on ne sait de toute façon absolument pas compter les multiplicités mais si l'on veut établir un lien avec des propriétés géométriques, il faudrait être capable de compter les nombres appartenant à au moins deux droites (i.e. ayant au moins deux propriétés, soit de divisibilité par un premier, soit de congruence à n selon un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$), ceux appartenant à au moins 3 droites, etc. On ne sait pas faire cela. Une minuscule indication est que les droites correspondant aux nombres de la forme $3a$ ou $3a+b$ (ou plus généralement aux nombres de la forme $pa+b$ avec b potentiellement nul et p premier inférieur à $\sqrt{n}$) n'ont jamais d'intersections entre elles.

Puisqu'il s'agit dans tous les cas de n'éliminer que 2 classes de congruences au plus selon chaque module premier inférieur à la racine carrée de n, on préfère conserver la façon de considérer le problème consistant à utiliser le produit :

$$\prod_{p\ premier,\ p \leqslant \sqrt{n}} \left(1 - \frac{2}{p}\right)$$